

Volume 25, Issue 2, 2025, 101-114 DOI: 10.22034/25.2.101



# A Closed-form solution to the buckling of cracked beams on elastic foundation using equivalent moment technique

Tooba Makaremi<sup>1</sup>, Vahid Akrami<sup>2\*</sup>

1. M.Sc. graduate, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

2. Associate Professor, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

#### Abstract

Beams placed on elastic foundations are widely used in simulating a main portion of mechanical and civil structures. The buckling behavior of these beams, including the load and the shape of the buckling mode, is different from normal beams due to the loads imposed by the elastic foundation that is proportional to the beam deflection. Due to their functional modality, these types of beams are generally subjected to repetitive loads (such as railway tracks) and extreme environmental conditions (such as piles and buried pipelines), making them susceptible to damage such as cracks. The presence of these flaws along the members can lead to premature failure of these structural elements due to buckling in the damaged area. Evaluating the stability of such structures considering structural flaws is essential for ensuring their safety. In this context, this paper presents a new method for calculating the closed-form solution to the buckling of cracked beams on elastic foundations. In the proposed method, a concentrated moment is used to model the crack and apply the slope difference caused by the crack at the damage location. Then, the governing differential equations for pin-ended beams are derived, and by using Fourier expansion and calculating the value of applied moment, a closed-form solution is presented to calculate the buckling of beams on elastic foundations. Using this technique for crack modeling makes it easier to solve beam differential equations and achieve a closed-form solution for calculating beam buckling load. Finally, the effects of different parameters such as the bending stiffness of the beam, length of the beam, crack depth, and stiffness of the bed on the buckling load of the beam can be studied. To verify the proposed solution, the results of solving closedform equations are compared with the exact solutions of simplified problems and the results from finite element models, which confirms the accuracy of the performed calculations. As the current solutions to the buckling of cracked beams on an elastic foundation are mainly based on numerical or finite element methods, the presented closed-form solution in this study can significantly contribute to enhancing the accuracy and facility of calculations in the design and analysis process for such structures.

Review History Received: Jul 09, 2024 Revised: Jul 12, 2024

Revised: Jul 12, 2024 Accepted: Nov 20, 2024

### Keywords

Beam on elastic foundation Crack Buckling load Differential equation Fourier expansion Finite element analysis

5.2.101 ] [ Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2025-07-31

Corresponding Author Email: v.akrami@uma.ac.ir - ORCID: 0000-0002-1464-2683



Copyright © 2025, TMU Press. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0) which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.



# مجله علمى مهندسى عمران مدرس



پاسخ فرمبسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک با تکنیک لنگرمعادل

طوبي مكارمي'، وحيد اكرمي مُ ال

کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران.

۲. دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران.

### حكىدە

تیرهای قرار گرفته روی بستر الاستیک، کاربرد گستردهای در شبیهسازی بخش عمدهای از سازه ای مکانیکی و عمرانی دارند. رفتار کمانشی این تیرها شامل بار و شکل مود کمانشی، به دلیل بارهای وارد از سوی بستر الاستیک کـه متناسب با خیز تیر میباشند، متفاوت با تیرهای معمولی هستند. این نوع تیرها به دلیل ماهیت عملکـردی خـود عمومـا تحت بارهای تکرارشونده (مانند خطوط ریلی) و شرایط محیطی شدید (مانند شمع هـا و خطـوط لولـه مـدفون) قـرار داشته و مستعد بروز آسیبهایی مانند ترک میباشند. وجود این نقصها در طول عضو می توانید باعث خرابی زود هنگام این المانهای سازهای به دلیل بروز کمانش در محل آسیبدیده شود. برای اطمینان از ایمنی چنین سازههایی، بررسی پایداری آنها با در نظر گرفتن نقص های سازهای حائز اهمیت میباشـد. در همـین راسـتا، مقالـه حاضـر روش جدیدی را برای محاسبه پاسخ فرمبسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک ارائه میدهد. در روش پیشـنهادی از یک لنگر متمرکز به منظور مدلسازی ترک و ایجاد تفاوت شیب ناشی از ترک در محل آسیب اسـتفاده مـیشـود. در ادامه معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر پیوسته با شرایط تکیهگاهی ساده استخراج شده و با استفاده از بسط فوریه تابع خیز و محاسبه مقدار لنگر اعمالی، پاسخ فرمبستهای برای محاسبه کمانش تیر روی بستر الاستیک ارائه میشـود. اسـتفاده از این تکنیک به منظور مدلسازی ترک باعث سهولت در حل معادلات دیفرانسیل تیر و دستیابی به رابطهای فرمبسته برای محاسبه بار کمانش تیر میشود. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند سختی خمشی تیر، طـول تیـر، عمـق تـرک و سختی بستر بر بار کمانش تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. به منظور بررسی درستی حل ارائـه شـده، جـوابهـای بدست آمده از حل فرمبسته معادلات با پاسخ مسائل ساده شدهای که حل دقیق آنها موجود میباشد و همچنین نتایج حاصل از مدلهای المان محدود مقایسه شده است که این مقایسه موید دقت محاسبات انجام شده میباشد. با توجه به اینکه پاسخهای موجود فعلی برای مسئله کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاسـتیک بیشـتربه صـورت عـددی و یـا المانمحدود میباشند، پاسخ فرمبسته ارائه شده در این تحقیق می توانید کمیک شیایانی به افزایش دقیت و سهولت محاسبات در روند طراحی و تحلیل چنین سازههایی نماید.

### ۱- مقدمه

به عنوان یک عنصر اساسی در سازههای مهندسی، تیرهایی با بستر الاستیک به طور گسترده در سازه های صنعتی و عمرانی استفاده می شوند [2, 1]. همچنین سازه هایی که در آن ها یک المان سازهای روی زمین یا زیر آن قرار می گیرد، مانند: خطوط لوله

مدفون، شمعهای سازهای و خطوط ریل راهآهنها، از سری مسائل مربوط به اندرکنش خاک و سازه هستند که با توجه به هندسهی سیستم می توانند به عنوان یک مدل تیر روی بستر الاستیک ساده شوند [1]. در بین آسیبهای محتمل وارد به سیستمهای سازهای، ترک یکی از رایج ترین عیوب در سازهها است. وجود ترک در

\* رايانامه نويسنده مسئول: ORCID – v.akrami@uma.ac.ir. ORCID: 0000-0002-1464-2683

کیی رایت © ۲۰۲۵، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس (TMU Press). این مقاله به صورت دسترسی آزاد منتشر شده و تحت مجوز بین المللی Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 قرار دارد (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0). بر اساس این مجوز، شما می توانید این مطلب را در هر قالب و رسانهای کپی، بازنشر و باز آفرینی کنید و یا آن را ویرایش و بازسازی نمایید، به شرط آنکه نام نویسنده را ذکر کرده و از آن برای مقاصد غیرتجاری استفاده کنید.

یذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۳۰ كلمات كلبدي تير روى بستر الاستيک بار کمانش معادله ديفرانسيل بسط فوريه

ترک

تاريخچه داورى

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۹

بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۲۲

تحليل المان محدود

سازه چه در زمان ساخت و چه در طول دورهی به ره برداری و خدمت رسانی، ممکن است رخ دهد. این امر می تواند در طول زمان منجر به کاهش مقاومت موضعی و حتی شکست ناگهانی سازه ها شود که تهدیدی بزرگ برای ایمنی سازه به حساب می آید [4, 3]. برای اطمینان از ایمنی سازه ها، بررسی پایداری چنین اعضای سازه ای حائز اهمیت می باشد [5]. از این رو در سال های اخیر این موضوع مورد توجه پژوه شگران قرار گرفته است.

در بررسی رفتار تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک، سه جزء کلیدی: تیرها، بسترهای الاستیک و ترکها باید به درستی مدلسازی شوند. تیر اویلر -برنولی ' به طور گسترده برای مدلسازی خمش، کمانش، ارتعاش و سایر پدیدهها، مورد استفاده قرار گرفته و می توان آن را در حلهای تحلیلی، تقریبی و عددی گنجاند [2]. از مدلهای پیشنهاد شده در مطالعات مختلف که برای شبیه سازی بسترهایی مانند خاک به کار می روند، می توان به مدل ولازوف و لئونتیف<sup>۲</sup>، مدل کر<sup>۸</sup>) و مدل غیرخطی (الاستوپلاستیک، دو خطی، چاندرا<sup>۴</sup>، کوندنر<sup>۱۰</sup>) اشاره نمود. همه این مدلها از نظر ریاضی معادل هستند و فقط در پارامترهای پایه با هم تفاوت دارند انواع مطالعات است. برای شبیه سازی ترک، عموما از مدل فنر انواع مطالعات است. برای شبیه سازی ترک، عموما از مدل فنر خطی یا غیر خطی استفاده می شود [4].

برآورد ضرایب شدت تنش در تیرهای ترکخورده، برای ارزیابی عمر خستگی باقیمانده و یکپارچگی سازهای این اعضا مورد نیاز است[5] . در همین راستا لئونتی و وانتادوری<sup>۱۱</sup> [7] یک رویکرد تحلیلی و عددی برای تعیین ضرایب شدت تنش و بدست آوردن نرخ رشد ترک تحت خستگی تماسی غلتشی برای یک ترک جانبی شیبدار در صفحه ای با عرض محدود روی بستر الاستیک ارائه کردهاند. همچنین زارع [8] به بررسی تحلیلی و عددی ضرایب شدت تنش در تیر منحنی ترک خورده روی بستر الاستیک تحت ارتعاش خارج از صفحه پرداخته است. بوزیگیت و

- <sup>1</sup> Euler–Bernoulli
- <sup>2</sup> Winkler
   <sup>3</sup> Filonenko-Borodich
- <sup>4</sup> Hetényi
- <sup>5</sup> Pasternak
- <sup>6</sup> Reissner
- 7 Vlazov and Leontiev
- <sup>8</sup> Kerr
- 9 Chandra
- <sup>10</sup> Kondner
- <sup>11</sup> Leonetti & Vantadori

همکاران<sup>۱۲</sup> [9] به دلیل کاربرد تیرهای چند دهانه روی بستر الاستیک در انواع مسائل مهندسی ژئوتکنیک و راهآهن، مطالعهای تحلیلی و عددی برای شناسایی ترک در این سازهها انجام دادهاند. این کار از طریق رابطه بین محل ترک و انعطاف پذیری فنر چرخشی نشاندهنده ی ترک در تیرهای اویلر برنولی چند دهانه روی بستر الاستیک وینکلر، و با استفاده از فرمولهای ماتریس انتقال، انجام یافته است. همچنین شیانگ و همکاران<sup>۱۳</sup> [10] به منظور بررسی تغییرشکل عمودی تونل، رفتار تیر روی بستر

الاستیک وینکلر تحت بار یکنواخت را با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک<sup>۱۴</sup> و عملگر استخراج بزیر<sup>۱۵</sup> بررسی نمودهاند. تـاکنون مطالعـات متعـددی بـرای بررسـی پاسـخ دینـامیکی و

پایداری تیرهای ترک خورده انجام شده است. پژوهشگران، تحلیل ارتعاشی را به عنوان یکی از روش های کارآمد در تشخیص تـرک چنین سازههایی معرفی کردهاند [11]. در همین راستا، لویا و همكاران 12] و همچناين ديرزا و لييلو 12] به مقايسه خواص ارتعاشی تیرهای دارای بستر الاستیک در حضور و عدم حضور ترک پرداختهاند. فرقانی و همکاران [13] به بررسی تحلیلی و عددی فرکانس تیرهای ناهمگن ترکدار روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی ردی<sup>۱۸</sup> پرداختهاند. در زمینه مطالعه تيرهاي ناهمگن، ايسن و همكاران " [14] به بررسي تحليلي و عددی پاسخ دینامیکی تیرهای ناهمگن هلالی شکل روی بستر الاستیک پرداختهاند. حسین و للپ' [15] با استفاده از تئـوری تیـر اویلر-برنولی و به صورت تحلیلی به بررسی شکل های مودی نانو تير ترک خورده روی بستر الاستيک پاسترناک پرداختهانـد. تـران و لینگوین' [1] با استفاده از تـابع گـرین ۲۲ بـه محاسـبه تحلیلـی و عددی پاسخ دینامیکی یک تیر ترک خوردہ روی بستر ويسكوالاستيك كلوين-ويت" تحت بار متحرك پرداختهاند. ساير مطالعات در این زمینه شامل تحقیقات کنمون و همکاران<sup>۴۲</sup> [6] روى آثار تاخير زماني واكنش سيستم سازهاي روى بستر الاسـتيك،

- <sup>12</sup> Bozyigit et al.
   <sup>13</sup> Xiong et al.
  - <sup>14</sup> Isogeometric
  - <sup>15</sup> Bézier
  - <sup>16</sup> Loya et al.
  - <sup>17</sup> De Rosa and Lippiello
     <sup>18</sup> Reddy
- <sup>19</sup> Esen et al.
- <sup>20</sup> Hossain & Lellep
- <sup>21</sup> Tran & Le-Nguyen
- <sup>22</sup> Green's function
- <sup>23</sup> kelvin-voigt
- <sup>24</sup> Kenmogne

<sup>[</sup> Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2025-07-31

تحقیقات عبدالله و همکاران [16] روی آثار بارهای حرارتی بر پاسخ نانو تیرهای ترک خورده در یک محیط الاستیک، تحقیقات ژائو<sup>(</sup> [2] برای مدلسازی ترکهای متعدد، و بررسیهای مخلص و همکاران [17] روی ارتعاش آزاد تیرهای مخروطی با ترک های عرضی متعدد روی بستر الاستیک می شود.

پاسخ کمانشی تیر-ستون سالم روی بستر الاستیک را مے توان در کارهای تیموشنکو [18] یا سیمیتسس [19] مشاهده کرد. از کارهای بعدی در این زمینه می توان به تحقیقات شا و ژانگ<sup>۴</sup> [20] در خصوص محاسبه بار بحراني كمانش تير واقع بر بستر الاستيك به روش المان محدود اشاره کرد. برخلاف تیـر-سـتون،هـای تـرک خورده معمولي، تحقيقات انجام شده در مورد كمانش تير-ستونهای ترکخورده روی بستر الاستیک محدودتر میباشد. در اين زمينه، وانگ<sup>6</sup> [21] كمانش يك تير-ستون روى بستر الاسـتيك با یک لولای داخلی (با سختی چرخشی صفر) را مطالعـه نمـوده و محل بهينه لولا را براي سختي هاي مختلف بستر تعيين نموده است. در کار دیگری، وانگ [22] معادلات کمانش را برای یک تیـر بـی نهایت بر روی بستر الاستیک که حاوی یک یا چند ناحیه تضعیف شده است، فرموله کرد. در مطالعه دیگری، ملیسیانوس و گانتس<sup>°</sup> [23] به بررسي كمانش لوله هاي مدفون از طريق مدلسازي عددي یک تیر-ستون بر بستر الاستیک با یک یا دو اتصال انعطاف پـذیر میانی پرداختهاند. همچنین اکرمی و عرف انی [4] بـرای بـرآورد بـار کمانشی پوستههای استوانهای ترک خورده، از معادلات حاکم بر تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک استفاده نمودند. با توجه به اینکه در مطالعه مذکور، از مدل تیر-فنر برای شبیهسازی تیـر تـرک خورده روى بستر الاستيك استفاده شده است، پس معادلات حاكم بر سیستم پیچیده شده و برای رفع این مشکل، پاسخ کمانشی تیر به صورت عددي و المان محدود مورد بررسي قرار گرفته است.

در ادامه روش های بررسی شده برای حل معادلات تیر ترک خورده روی بستر الاستیک مشاهده می شود که در حال حاضر، تیر ترک خورده روی بستر الاستیک، به صورت دو تیر مجزا بر روی بستر الاستیک که در محل ترک توسط یک فنر به هم متصل شدهاند، مدلسازی می شود. این مسئله باعث می شود هر کدام از

<sup>1</sup> Zhao

قطعات تیر معادله دیفرانسل حاکم بر خود را داشته باشد که با در نظر گرفتن شرایط مرزی و معادلات مربوط به فنر میانی بایستی به صورت همزمان حل شوند. همچنین، پیچیدگیهای حل معادلات مشخصه حاکم به روش کلاسیک و با در نظرگرفتن شرایط مختلف سازهای و بارگذاری های پیچیده، حل معادله دیفرانسیل تیر با استفاده از روش تیر-فنر یاد شـده در مطالعـات پیشـین و در ادامـه دستیابی به راهحل فرم بسته به منظور محاسبه بار کمانش را غیر ممکن میسازد. به همین دلیل پاسخهای موجود فعلی برای مسئله كمانش اين نوع سازهها عمدتا به صورت عددي و يا المانمحدود میباشند، همین امر اهمیت ارائه یک رابطـه فـرمبسـته بـه منظـور بررسی پایداری در کنار افزایش سهولت محاسبات در روند تحلیل و طراحی چنین سازههای را نمایان میکند. از این رو نوآوری مطالعه حاضر ارائه روشی جدید با عنوان تکنیک لنگر معادل بـرای مدلسازی ترک میباشد که حل معادلات حاکم بر تیر را سادهتر ساخته و در نهایت ارائه رابطه فرمبسته برای محاسبه بار کمانش تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک که از دیگر اهداف مطالعه حاضر می باشد را شامل می شود. روش پیشنهادی مبتنی بر اعمال دو کوپل نیروی متمرکز در محل ترک با هدف ایجاد تفاوت شـیب موجود بین دو قطعه تیر در طرفین ترک میباشد. با انجام اینکار، تیر ترکخورده را می توان به صورت یک تیر پیوسته تحت لنگر خارجی در نظر گرفته و رفتار آنرا توسط یـک معادلـه دیفرانسـل واحد بیان نمود. در ادامه، فرآیند حل معادله تیر روی بستر الاستیک تحت لنگر خارجی وارد شده با استفاده از بسط فوریه توابع بار و تغییرشکل انجام گرفته و در نهایت رابطهای برای محاسبه بار کمانش استخراج شده است. در خاتمه، به منظور بررسی درستی و دقت روابط به دست آمده، بار کمانش حاصل از اين روابط با بار كمانش حاصل از حل عددي و روش المان محدود مقايسه شده است كه نتيجه رضايت بخش مي باشد. فرضیات، شرح روش پیشنهادی، حـل معـادلات حـاکم و بررسـی نتایج در ادامه ارائه می شود.

# ۲- ارائه پاسخ تحلیلی مسئله

# ۲-۱- مدل تحلیلی تیر-فنر

در حال حاضر، تیر ترک خورده روی بستر الاستیک، به صورت دو المان مجزا که در محل ترک توسط یک فنر دورانی به هم متصل شدهاند، مدلسازی میشود. شکل (۱)، پیکربندی تیر

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Timoshenko

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Simitses

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Xia and Zhang

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Wang <sup>6</sup> Melissianos and Gantes

که در آن I طول تیر،  $\beta$  پارامتر نشان دهنده محل ترک (مطابق شکل (۱)) و  $K_s$  سختی فنر دورانی می باشد. روابط مختلفی برای برآورد سختی فنر دورانی بر حسب عمق ترک پیشنهاد شده است [4]. به عنوان نمونه برای مقاطع مستطیلی این مقدار از رابطه زیر قابل محاسبه است [24]:

$$K_{s} = \frac{EI}{h.f(\xi)}$$

$$f(\xi) = \frac{2}{1-v^{2}} \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{2} \begin{bmatrix} 5.93 - 19.69\xi + 37.1\xi^{2} \\ -35.8\xi^{3} + 13.1\xi^{4} \end{bmatrix}$$
(A)

h که در آن کخ نسبت عمق ترک و برابر با c ،c/h عمق تـرک و h ارتفاع تیر میباشد.





**Fig. 1.** Cracked beam on elastic bed and its beam-spring model با جایگذاری توابع تغییرشکل ارائه شده در روابط (۳ و ۴) در معادلات روابط (۶ و ۷)، یک دستگاه ۸ معادله–۸ مجه ول بدست می آید که با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب آن، بار کمانش تیر تعیین می شود.

ترکخورده روی بستر الاستیک و مـدل تیـر-فنـر معـادل را نشـان میدهد. با انتخاب یک المان کوچک در داخل تیر و نوشتن تعـادل نیروها در جهت قائم، خواهیم داشت:

$$V - \left(V + \frac{dV}{dx}dx\right) - P_{cr}\frac{dy}{dx} + P_{cr}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx\right) + \alpha y dx = 0$$
<sup>(1)</sup>

که در آن، V برش تیر، x پارامتر طول تیر، P<sub>cr</sub> بار کمانش تیر و م سختی بستر می باشد. با ساده سازی رابط ه فوق و جایگ ذاری (V=-EI.y''' که در آن E و I مدول الاستیسیته و ممان اینرسی تیر می باشد، خواهیم داشت:

$$y_{1,2}^{\prime\prime\prime\prime} + k^2 y_{1,2}^{\prime\prime} + m_{bed} y_{1,2} = 0 \tag{(Y)}$$

که در آن، اندیس ۱ و ۲ نشان دهنده قطعات تیر سمت چپ و  $m_{bed} = P_{cr}/EI$  با جر ایس تیر و برابر با  $k^2$  و  $e^{-m_{bed}}$  و ضریب سختی نرمال شده بستر و برابر با  $\alpha/EI$  می باشد. در واقع رابطه فوق نشان دهنده دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم همگن می باشد که پاسخ آنها را به صورت زیر می توان نوشت:

$$y_{1} = A_{1} \sin \lambda_{1} x_{1} + B_{1} \cos \lambda_{1} x_{1} + C_{1} \sin \lambda_{2} x_{1} + D_{1} \cos \lambda_{2} x_{1}$$
(°)

$$y_{2} = A_{2} \sin \lambda_{1} x_{2} + B_{2} \cos \lambda_{1} x_{2} + C_{2} \sin \lambda_{2} x_{2} + D_{2} \cos \lambda_{2} x_{2}$$
(\*)

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{(k^2/2) \pm \sqrt{(k^2/2)^2 - m_{bed}}}$$
 (a)

و ضرایب A<sub>1,2</sub> تا D<sub>1,2</sub> با در نظر گرفتن شرایط مرزی و معادلات مربوط به فنر میانی محاسبه می شوند. برای تیر با تکیه گاه مفصلی شرایط مرزی به صورت زیر بوده:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_1'' = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_2'' = 0 \end{cases}$$
(9)

$$\begin{cases} x_{1} = \beta l \\ x_{2} = (1 - \beta) l \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_{1} = y_{2} \\ y_{1}' = -y_{2}' - \frac{EIy_{1}''}{K_{s}} \\ y_{1}'' = y_{2}'' \\ y_{1}''' + k^{2}y_{1}' = -y_{2}''' - k^{2}y_{2}' \end{cases}$$
(V)

### ۲-۲- مدل پیشنهادی لنگر معادل

مطابق شکل (۲)، وجود ترک در طول تیر باعث عدم پیوستگی در شیب تیر و ایجاد تفاوت در شیب قطعات تیر مجاور خواهد شد. با توجه به شرط دوم معادله (۷) مقدار تفاوت در شیب دو طرف تابعی از سختی فنر میانی و لنگر داخلی تیر در محل ترک (''(EL.) میباشد. پس با داشتن این دو می توان لنگر خارجی معادلی (EM) را محاسبه نمود که بتواند تفاوت شیب مشابهی را ایجاد نماید. در روش پیشنهادی لنگر معادل، از دو لنگر متمرکز معکوس هم که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، برای ایجاد این تفاوت شیب استفاده خواهد شد. بدین ترتیب، حل دو معادله دیفرانسیل مجزای داده شده در رابطه (۲) تحت شرایط مرزی و میانی ارائه شده در روابط (۶ و ۷) تبدیل به حل یک معادله دیفرانسیل برای تیر پیوستهای می شود که روی بستر الاستیک قرارداشته و تحت دو لنگر متمرکز میانی است.

با توجه به ماهیت بارگذاری موجود روی تیر که از جنس لنگر میباشد و ناپیوستگی آن که نوشتن تعادل نیروها در جهت قائم برای دستیابی به معادله دیفرانسیل مربوطه را مشکل مینماید، از بسط فوریه تابع خیز و لنگر متمرکز خارجی استفاده میشود. برای اینکار، لنگرهای معادل، *M*، وارد بر تیر به صورت دو کوپل نیروی نشان داده شده در شکل (۲) در نظر گرفته میشود. در این شکل، ع بازوی کوپل و *c* فاصله بین دو لنگر متمرکز است که هردو مقدار کوچکی بوده و به سمت صفر میل مینمایند. بسط فوریه چهار نیروی متمرکز موجود در این شکل به صورت زیر نوشته میشود:

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} -\sin\frac{n\pi(\beta l - \frac{c}{2} - \varepsilon)}{l} \\ +\sin\frac{n\pi(\beta l - \frac{c}{2})}{l} \\ +\sin\frac{n\pi(\beta l + \frac{c}{2})}{l} \\ -\sin\frac{n\pi(\beta l + \frac{c}{2} + \varepsilon)}{l} \end{bmatrix} \sin\frac{n\pi x}{l}$$
(9)

با بسط سینوس های دو و سه متغییری موجود در این رابطه و توجه به این فرض که کسینوس مقادیر کوچک برابر با ۱،۰ و سینوس مقادیر کوچک برابر با خود پارامتر میباشد، بسط فوریه رابطه (۹) به صورت زیر ساده میشود (مطابق پیوست ۱):

شکل ۲. تیر ترک خورده روی بستر الاستیک و مدل لنگر معادل





Fig. 2. Cracked beam on elastic bed and its Equivalent Moment (EM) model

$$EM = \frac{2M}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c}{l^2} \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi x}{l}$$
(1.)

بدین ترتیب، معادله دیفرانسیل تیر روی بستر الاستیک نشان داده شده در شکل (۲)، به صورت زیر قابل بیان میباشد:

$$y'''' + k^{2}y'' + m_{bed}y = \frac{2M}{EI.l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2}\pi^{2}c}{l^{2}} \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi x}{l}$$
(11)

۲-۳- مقدار لنگر معادل

چنانچه در بخش قبل بیان شد، لنگر معادل خارجی وظیفه ایجاد تفاوت شیبی برابر با تفاوت شیب موجود در طرفین ترک در تیر اصلی را به عهده خواهد داشت. درصورتیکه لنگر داخلی موجود در محل ترک را با (β*I*) نشان دهیم، مقدار تفاوت شیبی که باید توسط لنگر معادل خارجی ایجاد شود توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta \theta = -\frac{m(\beta L)}{K_s} + \frac{m(\beta L)}{EI}c = \left[\frac{c}{EI} - \frac{1}{K_s}\right]m(\beta l) \tag{11}$$

ترک در مدل فنر معادل و بخش دوم مربوط بـه تفـاوت شـیب دو سمت ترک در مدل تیر پیوسته میباشد. بدین ترتیب میتوان مقدار لنگر معادل خارجی را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} \frac{c}{EI} - \frac{1}{K_s} \end{bmatrix} m(\beta l) = -\frac{M}{EI}c$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{EI}{K_s \cdot c} - 1 \end{bmatrix} m(\beta l)$$
(17)

با توجه به اینکه در این رابطه مقدار c در مخرج عبارت نخست به سمت صفر میل مینماید، پس در مقابل این عبارت میتوان از عبارت دوم (یعنی ۱-) صرفنظر نمود.

۲–۴– حل معادله دیفرانسیل حاکم

برای حل معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۱۱) تابع خیـز تیر را به صورت سری سینوسی زیر فرض مینماییم:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{14}$$

که در آن z<sub>n</sub> ضرایب مجهول سری میباشـد کـه بایـد محاسـبه شوند. برای تعیین این ضرایب، با جایگذاری رابطه فوق در معادلـه (۱۱)، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_{bed} l^2}{n^2 \pi^2} - k^2 \right) \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$= \frac{2m(\beta l)}{EI.l} \left[ \frac{EI}{K_s} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin n \pi \beta \sin \frac{n \pi x}{l}$$
(10)
Here, where the set of the set o

تعيين شده:

$$z_{n} = \frac{2m(\beta l)}{K_{s} \cdot l} \frac{1}{\left(\frac{n^{2}\pi^{2}}{l^{2}} + \frac{m_{bed}l^{2}}{n^{2}\pi^{2}} - k^{2}\right)} \sin n\pi\beta$$
(19)  
e خواهیم داشت:

$$y = m(\beta l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/K_s \cdot l}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_{bed} l^2}{n^2 \pi^2} - k^2\right)} \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (1V)$$

۲–۵– تعیین بار کمانش تیر رابطه (۱۷) تعیین کننده خیـز تیـر روی بسـتر ا

ترک میباشد. همانطور که در این رابطه ملاحظه میشود، تابع خیز بدست آمده وابسته به مقدار لنگر داخلی تیر در محل ترک، (*اβا)* میباشد. مقدار این لنگر را میتوان با استفاده از تعادل خارجی تیر روی بستر الاستیک بدست آورد. تابع خیز تیر زمانی مقدار صحیح را ارائه خواهد داد که لنگر داخلی محاسبه شده از تعادل در محل ترک برابر با (*اβ*) باشد.

در شکل (۳) نیروهای موثر بر تیر واقع بر بستر الاستیک رسم شده است. با توجه به شکل و با لنگرگیری حول تکیه گاه سمت راست، می توان عکس العمل تکیه گاه سمت چپ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$A_{y} = -\frac{m_{bed}EI}{l} \int_{0}^{l} y_{(x)} \cdot (l-x) dx$$
  
=  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m(\beta l)}{K_{s}n\pi} \frac{m_{bed}EI}{\left(\frac{n^{2}\pi^{2}}{l^{2}} + \frac{m_{bed}l^{2}}{n^{2}\pi^{2}} - k^{2}\right)} \sin n\pi\beta$  (1A)





**Fig. 3.** Forces acting on the elastically supported beam در ادامه، مقطعی دقیقا در سمت چپ ترک لحاظ شده و با لنگرگیری حول آن، مقدار لنگر داخلی تیر به صورت زیر محاسبه می شود. چنانچه گفته شد، تابع خیز تیر زمانی صحیح خواهد بود که لنگر داخلی محاسبه شده از تعادل برابر با (β*I*) مورد استفاده

$$m(\beta l) = A_{y}\beta l + m_{bed}EI \int_{0}^{\beta l} y_{(x)} (\beta l - x)dx + k^{2}EIy(\beta l)$$
<sup>(19)</sup>

در محاسبه آن باشد. بدین ترتیب:

با ساده سازي رابطه فوق، خواهيم داشت:

$$m(\beta l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m(\beta l)}{K_{s} \cdot l} \frac{\left(k^{2} - \frac{m_{bed}l^{2}}{n^{2}\pi^{2}}\right) \cdot EI}{\left(\frac{n^{2}\pi^{2}}{l^{2}} + \frac{m_{bed}l^{2}}{n^{2}\pi^{2}} - k^{2}\right)} \sin^{2} n\pi\beta$$
(7.)  
put the set of the set o

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(k^2 - \frac{m_{bed}l^2}{n^2 \pi^2}\right)}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m_{bed}l^2}{n^2 \pi^2} - k^2\right)} \sin^2 n\pi\beta = \frac{K_s.l}{2EI}$$
(71)



**Fig. 4.** Response of governing differential equation for  $m_{bed}=1$ ; a)  $\beta=0.5$ ; b)  $\beta=0.3$ ; c)  $\beta=0.1$ 

روی بستر الاستیک را بر حسب طول تیر، *h* ضریب سختی بستر، *mbed* محل نسبی ترک، *β* و نسبت سختی مقطع ترک خورده به سختی خمشی تیر، *K*<sub>8</sub>/*EI*، بیان مینماید. بر همین اساس، این پاسخها در نمودارهای مختلف ارائه شده در شکلهای (۴ تا ۶) قابل ملاحظه میباشند. محور قائم هر نمودار معرف ضریب بار کمانش تیر میباشد. تاثیر طول تیر ترک خورده در محور افقی نمودارها نشان داده شده است. هر کدام از نمودارها شامل منحنی های مربوط به تیر سالم و ۵ نمونه با شدتهای ترک مختلف میباشد. همچنین تاثیر محل ترک در طول تیر با مقایسه نمودارهای a تا م در هر شکل قابل بررسی میباشد. در نهایت، هر کدام از شکل های (۴ تا ۶) مربوط به یک ضریب سختی بستر مشخص میباشد که با مقایسه آنها میتوان رفتار تیرهای واقع بر روی بسترهای مختلف را تعیین نمود.

# *sm<sub>bed</sub>=*3 باسخ های معادله دیفرانسیل حاکم برای sm<sub>bed</sub>=3 ( ، μ-d) ( ) β=0.1 ( ) β=0.5 ( ) β=0.5







**Fig. 6.** Response of governing differential equation for  $m_{bed}$ =5; a)  $\beta$ =0.5; b)  $\beta$ =0.3; c)  $\beta$ =0.1

مطابق شکل (a-۴)، بار کمانش تیرهای با طول کم بسیار بیشتر از تیرهای بلند میباشد. با افزایش طول تیر، ضریب بار کمانش تیر کاهش یافته و به یک مقدار مشخص میل مینماید. لازم به ذکر است که در پی افزایش طول تیر و کاهش مقاومت آن به مقدار یاد شده، مود کمانشی تیر نیز افزایش یافته و تابع خیز تیر شامل نیمسینوسهای بیشتری میشود.

با کاهش سختی مقطع ترک خورده که نشان دهنده افزایش عمق ترک می باشد، روند کلی نمودار حفظ شده ولی از مقدار ضریب بار کمانش کاسته می شود. مقدار این کاهش مقاومت برای تیرهای کوتاه بیشتر از تیرهای با طول زیاد می باشد. مسئله دیگری که در شکل (a-4)، قابل ملاحظه است، افزایش نسبی

ضریب بار کمانش در محدوده مود دوم می باشد. با توجه به اینکه برای نمونه هایی با 0.5 β ترک در نیمه تیر می باشد، دلیل این مسئله را می توان در قرار گرفتن ترک در نقطه عطف تابع خیز تیر و بسته ماندن ترک جستجو نمود. چنین رفتاری برای نمودارهای (d و c) در محدوده مودهای سوم و دهم قابل ملاحظه خواهد بود.

با مقایسه نمودارهای (a، d و c) در شکل (۴) می توان گفت که برای تیرهای کوتاه هرچه ترک به وسط تیر نزدیکتر باشد، نمونه افت مقاومت بیشتری را تجربه خواهد کرد. این در حالی است که برای تیرهای با طول بیشتر عکس این مسئله صادق می باشد. نهایتا با مقایسه شکلهای (۴ تا ۶) می توان ملاحظه نمود که برای بستر با ضرایب سختی متفاوت، روند کلی توضیح داده شده برای شکل (۴) دوباره صادق است. این در حالی است که با افزایش ضریب سختی بستر، نمودارها به سمت بالا شیفت پیدا کرده و بار کمانش تیر افزایش می یابد. همچنین ملاحظه می شود که با افزایش سختی بستر، موجهای نمودار فشرده تر شده و تیر در مود بالاتری (با نیم سینوسهای بیشتری) کمانش می نماید.

## ۳– بررسی درستی پاسخ ارائه شده

### ۳-۱- مقایسه با نتایج مسائل ساده شده

برای بررسی درستی راه حل ارائه شده، ابتدا به مقایسه پاسخ آن با دو مسئله ساده شده خواهیم پرداخت. مسئله نخست مربوط به تیر ترک خورده فاقد بستر الاستیک میباشد (mbed=0). برای چنین مسئلهای، راه حل فرمبسته معادله دیفرانسل حاکم به صورت زیر موجود میباشد:

$$k.\left[\cos(2\beta kl) - 1\right].\cot(kl) + k.\sin(2\beta kl) = \frac{2K_s}{El} \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$

شکل (۷)، مقایسه پاسخهای ارائه شده توسط روابط (۲۱ و ۲۲) را برای چنین تیری با یک ترک در وسط تیر نمایش میدهد. همانطور که ملاحظه می شود، انطباق مناسبی بین نتایج حاصل از دو رابطه یاد شده موجود می باشد.

مسئله دوم مورد مطالعه مربوط به تیر سالم دارای بستر الاستیک است (K<sub>s</sub>=Inf). برای چنین تیری مقدار ضریب بار کمانش از رابطه زیر قابل محاسبه میباشد:

$$k^{2} = \min\left\{\frac{n^{2}\pi^{2}}{l^{2}} + \frac{m_{bed}l^{2}}{n^{2}\pi^{2}}\right\} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$
 (Y7)





Fig. 7. Comparing response of a cracked beam without elastic foundation provided in Eqs. (21) and (22)





Fig. 8. Comparing response of a un-cracked beam on elastic foundation provided in Eqs. (21) and (23)

**شکل ۹**. مقایسه پاسخ های ارائه شده برای تیر ترک خورده (K<sub>s</sub>=EI/2 ،β=0.5).



Fig. 9. Comparing response of cracked beam (β=0.5 K<sub>s</sub>=EI/2) on elastic bed provided in Eqs. (21) and beam-spring model
 شکل ۸ مقایسه پاسخهای ارائه شده توسط این رابط و رابط و رابط.

همانطور که در شکل ملاحظه میشود، انطباق مناسبی بـین نتـایج حاصل از دو رابطه موجود میباشد.

## ۲-۲- مقایسه با نتایج مدل تیر-فنر

در ادامه درستی آزمایی راه حل ارائه شده، نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از حل روابط (۶ و ۷) برای مدل تیر –فنر مقایسه شده است. بدین منظور ترک در وسط تیر فرض شده (β=0.5) و سختی فنر دورانی برابر با *EI/2* لحاظ شده است. شکل (۹)، مقایسه ضریب بار کمانش را برای هر دو حالت نمایش می دهد. مطابق شکل، مشخص است که مدل لنگر معادل به خوبی قادر به پیش بینی پاسخ ها بوده و حاصل از آن بسیار دقیق می باشد.

## ٣-٣- مقايسه با نتايج تحليل المان محدود

در این بخش، درستی آزمایی پاسخ ارائه شده با استفاده از نتایج تحلیل های المان محدود انجام شده است. برای این منظور یک مدل عددی در نرمافزار آباکوس ایجاد و تحلیل کمانش روی آن انجام شده است. جزئیات مدلسازی مربوطه در شکل (۱۰) ارائه شده است. مطابق شکل، مدلسازی با استفاده از دو تیر مجزا انجام شده است که در محل ترک به وسیله قید بستن به هم وصل شدهاند. ناحیه ترک خورده فاقد قید مربوطه بوده و آزاد است. مجموعه تیرهای یاد شده روی یک بستر الاستیک قرار گرفته است که از طریق یک سری میله محوری با سختی و فاصله مشخص مدلسازی شده است. پایین میله ها دارای شرایط مفصلی و بالای آنها با استفاده از قید بستن، به تیر ترک خورده متصل میباشد. درجات آزادی واقع در ابتدا و انتهای تیر به یک نقطه کنترل کوپل شده و شرایط تکیه گاه مفصلی در آنها ایجاد شده است.

## شكل ۱۰. جزئيات مدلسازي عددي تير ترك خورده روى بستر الاستيك



Fig. 10. Modelling of cracked beam on elastic foundation

جزئیات هندسی نمونه های المان محدود مورد بررسی در جدول (۱) ارائه شده است. مطابق جدول، سه ردیف نخست دارای عمق ترک متفاوت، سه ردیف ۵–۳ دارای محل ترک متفاوت، سه ردیف ۵–۷ دارای طول تیر متفاوت، سه ردیف ۹–۷ دارای ضریب بستر متفاوت و دو ردیف آخر دارای ارتفاع تیر متفاوت می باشند. نتایج حاصل از رابطه (۲۱) و تحلیل های المان محدود در دو ستون آخر جدول ارائه شده است. همچنین، شکل کمانش نمونه ها در شکل (۱۱) ارائه شده است.

**شکل ۱۱**. شکل کمانش نمونههای جدول ۱ در تحلیل المان محدود



Fig. 11. Buckled shape of the models in Table 1 in FE analysis

جدول ۱. مقایسه بارکمانش نمونه های المان محدود با رابطه (۲۱)

Model	l	h	EI	β	ξ	m <sub>bed</sub>	k <sup>2</sup>	
	(m)	(m)	$(kg.m^2)$				Eq. (21)	FEM
1	20	0.1	175	0.3	0.2	10	6.32	6.28
2	20	0.1	175	0.3	0.4	10	6.21	6.18
3	20	0.1	175	0.3	0.6	10	5.59	5.64
4	20	0.1	175	0.1	0.6	10	5.65	5.70
5	20	0.1	175	0.5	0.6	10	5.59	5.65
6	10	0.1	175	0.3	0.6	10	5.60	5.67
7	5	0.1	175	0.3	0.6	10	6.05	6.07
8	5	0.1	175	0.3	0.6	5	4.22	4.26
9	5	0.1	175	0.3	0.6	1	1.86	1.88
10	5	0.2	1400	0.3	0.6	1	1.62	1.65

Table 1. Comparing buckling load FE models with Eq. (20)

۳-۴- مقایسه با نتایج سایر تحقیقات

چنانچه پیشتر ذکر شد، وانگ [22] روابط تحلیلی را برای محاسبه بار کمانش یک تیر بی نهایت بر روی بستر الاستیک که حاوی یک ناحیه تضعیف شده در وسط آن است، ارائه کرده است. برای درستی آزمایی نتایج رابطه (۲۱) از باز تولید نمودار ارائه شده در این مرجع مطابق شکل (۱۲) استفاده شده است. برای اینکار طول تیر مقداری بسیار بزرگ فرض شده و مقدار پارامتر β برابر با ۵٫۰ در نظر گرفته شده است. محور افقی نمودار سختی نرمال شده مقطع ترک خورده و محور قائم بار کمانش نرمال شده از نمایش می دهد. چنانچه ملاحظه می شود، نتایج بدست آمده از رابطه (۲۱) انطباق مناسبی با داده های ارائه شده توسط وانگ [22]

شکل ۱۲. مقایسه نتایج حاصل از تحقیق حاضر و مرجع [22]



Fig. 12. Comparing results of this study with reference [22]

۴- نتیجه گیری

مطالعه حاضر به ارائه روش تحلیلی و عددی به منظور محاسبه پاسخ فرمبسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک پرداختهاست. در روش ارائه شده با عنوان تکنیک لنگر معادل، در محل ترک تیر، از دو لنگر متمرکز معکوس هم به منظور اعمال تفاوت شیب ناشی از وجود ترک در طرفین محل آسیب استفاده شدهاست. در بخش اول مطالعه، به بررسی روش های معمول مدلسازی ترک از جمله مدل تحلیلی تیر فنر پرداخته و سپس مقدار لنگر متمرکز اعمال شده در روش پیشنهادی که تابعی از سختی فنر میانی و لنگر داخلی تیر در محل ترک میباشد، به دست آمد. در ادامه رابطه ظرفیت کمانشی تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک با حل معادلات مشخصه حاکم بر تیر روی بستر الاستیک افزایش یافته و تیر در مودهای بالاتری کمانش میکند. در بخش دوم، مطالعهی عددی به منظور بررسی درستی راه حل ارائه شده انجام شد. نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با مدلهای المان محدود و همچنین با پاسخ مسائل ساده شدهای که حل دقیق آنها موجود است مقایسه شد که نشانگر مطابقت بالای تکنیک لنگر معادل و تایید درستی و دقت این روش بود. بدین ترتیب از رابطهی به دست آمده بر مبنای این روش و نتایج آن می توان در روند طراحی و محاسبات و همچنین پیشبینی رفتار چنین سازههای استفاده کرد.

# ت*قد*یر و تشکر

بدینوسیله از زحمات هیات داوران و اعضای تیم علمی نشـریه در ارتقای کیفیت مقاله و انتشار آن شایسته قدردانی میباشد.

### References

- 1. Tran, L.H. and Le-Nguyen, K., 2023. Calculation of dynamic responses of a cracked beam on visco-elastic foundation subjected to moving loads, and its application to a railway track model. *International Journal of Applied Mechanics*, 15(03).
- 2. Zhao, X., 2021. Analytical solution of deflection of multi-cracked beams on elastic foundations under arbitrary boundary conditions using a diffused stiffness reduction crack model. *Archive of Applied Mechanics*, *91*(1), pp.277-299.
- Chen, B., Lin, B., Zhao, X., Zhu, W., Yang, Y. and Li, Y., 2021. Closed-form solutions for forced vibrations of a cracked double-beam system interconnected by a viscoelastic layer resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, 163.
- 4. Akrami, V. and Erfani, S., 2017. An analytical and numerical study on the buckling of cracked cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*, *119*, pp.457-469.
- 5. Rege, K. and Pavlou, D.G., 2019. Stress intensity factors for circumferential through-wall cracks in thinwalled cylindrical shells subjected to tension and torsion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 42(5), pp.1062-1074.
- Kenmogne, F., Ouagni, M.S.T., Simo, H., Kammogne, A.S.T., Bayiha, B.N., Wokwenmendam, M.L., Elong, E. and Ngapgue, F., 2022. Effects of time delay on the dynamical behavior of nonlinear beam on elastic foundation under periodic loadings: Chaotic detection and it control. *Results in Physics*, 35.
- 7. Leonetti, D. and Vantadori, S., 2022. On the growth of rolling contact fatigue cracks using weight functions. *Procedia Structural Integrity*, *39*, pp.9-19.
- 8. Zare, M., 2020. Free out-of-plane vibration of cracked

با استفاده از بسط فوریه تابع خیز تیر و لنگر متمرکز خارجی ارائه شد. همچنین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله سختی خمشی تیر، طول تیر، عمق ترک، محل ترک و سختی بستر بر بار کمانش تیر مورد مطالعه قرار گرفت. بر اساس نتایج به دست آمده، وجود ترک در تیر می تواند بار کمانشی عضو را به میزان قابل توجهی کاهش دهد که این کاهش مقاومت در تیرهای کوتاه مشهودتر است. ظرفیت کمانشی تیرهایی با طول کم بسیار بیشتر از تیرهای با طول زیاد است از طرفی با افزایش طول ضریب بار کمانش کاهش می یابد که به دنبال آن کاهش مقاومت و افزایش مود کمانشی تیر مشاهده می شود. در تیرهای کوتاه، بر عکس تیرهای با طول زیاد با نزدیک شدن ترک به وسط تیر با افت مقاومت بیشتر، بار کمانشی تیر

curved beams on elastic foundation by estimating the stress intensity factor. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(14), pp.1238-1245.

- 9. Bozyigit, B., Bozyigit, I., Yesilce, Y. and Abdel Wahab, M., 2020. Crack identification in multi-span beams on elastic foundation by using transfer matrix method. In *Proceedings of the 13th International Conference on Damage Assessment of Structures: DAMAS 2019, 9-10 July 2019, Porto, Portugal*, pp. 402-409.
- Xiong, Z., Kou, L., Zhao, J., Cui, H. and Wang, B., 2023. Isogeometric Analysis of Longitudinal Displacement of a Simplified Tunnel Model Based on Elastic Foundation Beam. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 136(1).
- 11. De Rosa, M.A. and Lippiello, M., 2021. Closed-form solutions for vibrations analysis of cracked Timoshenko beams on elastic medium: An analytically approach. *Engineering Structures*, 236.
- 12. Loya, J.A., Aranda-Ruiz, J. and Zaera, R., 2022. Natural frequencies of vibration in cracked Timoshenko beams within an elastic medium. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 118.
- 13. Forghani, M.A., Bazarganlari, Y., Zahedinejhad, P. and Kazemzadeh Parsi, M.J., 2021. Frequency Analysis of Cracked Porous Functionally Graded Beams on Elastic Foundation using Reddy Third Order Shear Deformation Theory. *Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, *32*(2), pp.93-112.
- Esen, I., Eltaher, M.A. and Abdelrahman, A.A., 2023. Vibration response of symmetric and sigmoid functionally graded beam rested on elastic foundation under moving point mass. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(5), pp.2607-2631.

DOI: 10.22034/25.2.101

Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2025-07-31

- 15. Hossain, M.M. and Lellep, J., 2021. Mode shape analysis of dynamic behaviour of cracked nanobeam on elastic foundation. *Engineering Research Express*, 3(4).
- 16. Abdullah, S.S., Hosseini-Hashemi, S., Hussein, N.A. and Nazemnezhad, R., 2022. Effect of temperature on vibration of cracked single-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium under different boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(5), pp.1614-1639.
- 17. Moukhliss, A., Rahmouni, A., Bouksour, O. and Benamar, R., 2022. N-dof discrete model to investigate free vibrations of cracked tapered beams and resting on winkler elastic foundations. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, 14(1), pp.1-7.
- 18. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 2012. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation.
- 19. Simitses, G.J. and Hutchinson, J.W., 1976. An

introduction to the elastic stability of structures. *Journal of Applied Mechanics*, 43(2), p.383.

- 20. Xia, G.P. and Zhang, Z., 2009. A numerical method for critical buckling load for a beam supported on elastic foundation. *EJGE*, *14*, pp.1-11.
- 21. Wang, C.Y., 2008. Optimum location of an internal hinge of a uniform column on an elastic foundation.
- 22. Wang, C.Y., 2010. Buckling of a weakened infinite beam on an elastic foundation. *Journal of engineering mechanics*, *136*(4), pp.534-537.
- 23. Melissianos, V.E. and Gantes, C.J., 2016, August. Buckling and post-buckling behavior of beams with internal flexible joints resting on elastic foundation modeling buried pipelines. In *Structures*, 7, pp. 138-152.
- 24. Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1973. The Stress Analysis of Cracks. *Handbook, Del Research Corporation, 34.*

## پیوست (۱)- بسط فوریه لنگر معادل (EM)

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left( \sin \frac{n\pi \left(\beta l - \frac{c}{2}\right)}{l} \cos \frac{n\pi \varepsilon}{l} - \cos \frac{n\pi \left(\beta l - \frac{c}{2}\right)}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l} \right) + \left( \sin n\pi \beta \cos \frac{n\pi c}{2l} - \cos n\pi \beta \sin \frac{n\pi c}{2l} \right) \right. \\ \left. + \left( \sin n\pi \beta \cos \frac{n\pi c}{2l} + \cos n\pi \beta \sin \frac{n\pi c}{2l} \right) \right. \\ \left. - \left( \sin \frac{n\pi \left(\beta l + \frac{c}{2}\right)}{l} \cos \frac{n\pi \varepsilon}{l} + \cos \frac{n\pi \left(\beta l + \frac{c}{2}\right)}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l} \right) \right] \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l} \right] \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l}$$

با فرض سادهسازی کسینوس مقادیر کوچک با ۱٫۰ و سینوس مقادیر کوچک با خود آرگومان، بسط فوریه رابطه فـوق را مـی تـوان بـه صورت زیر بیان کرد:

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left( \sin \frac{n\pi \left(\beta l - \frac{c}{2}\right)}{l} - \frac{n\pi \varepsilon}{l} \cos \frac{n\pi \left(\beta l - \frac{c}{2}\right)}{l} \right) + 2\sin n\pi \beta - \left( \sin \frac{n\pi \left(\beta l + \frac{c}{2}\right)}{l} + \frac{n\pi \varepsilon}{l} \cos \frac{n\pi \left(\beta l + \frac{c}{2}\right)}{l} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$(9-Y)$$

مجددا با استفاده از اتحادهای جمع و تفریق مثلثاتی، بسط رابطه بالا به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left(\sin n\pi\beta \cos \frac{n\pi c}{2l} - \cos n\pi\beta \sin \frac{n\pi c}{2l} - \frac{n\pi\varepsilon}{l} \left(\cos n\pi\beta \cos \frac{n\pi c}{2l} + \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi c}{2l}\right) \right) + 2\sin n\pi\beta - \left(\sin n\pi\beta \cos \frac{n\pi c}{2l} + \cos n\pi\beta \sin \frac{n\pi c}{2l} + \frac{n\pi\varepsilon}{l} \left(\cos n\pi\beta \cos \frac{n\pi c}{2l} - \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi c}{2l}\right) \right) \sin \frac{n\pi c}{l}$$
(9-7)

با سادهسازي رابطه بالا خواهيم داشت:

[ Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2025-07-31

پاسخ فرمبسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک با تکنیک لنگرمعادل

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left(\sin n\pi\beta - \frac{n\pi c}{2l}\cos n\pi\beta - \frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(\cos n\pi\beta + \frac{n\pi c}{2l}\sin n\pi\beta\right)\right) + 2\sin n\pi\beta - \left(\sin n\pi\beta + \frac{n\pi c}{2l}\cos n\pi\beta + \frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(\cos n\pi\beta - \frac{n\pi c}{2l}\sin n\pi\beta\right)\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$
(9-4)

در ادامه رابطه بالا را می توان به صورت زیر بیان کرد:

 $(\mathbf{q}_{-\mathbf{r}})$ 

$$EM = \frac{2M}{l \cdot \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left(\sin n\pi\beta - \frac{n\pi\varepsilon}{l} \frac{n\pi c}{2l} \sin n\pi\beta\right) + 2\sin n\pi\beta - \left(\sin n\pi\beta - \frac{n\pi\varepsilon}{l} \frac{n\pi c}{2l} \sin n\pi\beta\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$
(9- $\omega$ )

$$EM = \frac{2M}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c}{l^2} \sin n\pi\beta \sin \frac{n\pi x}{l}$$

جگونه به این مقاله ارجاع دهیم؟ Makaremi, T. and Akrami, V., 2025. A Closed-form solution to the buckling of cracked beams on elastic foundation using equivalent moment technique. *Modares Civil Engineering journal*, 25(2), pp.101-114.



DOI: 10.22034/25.2.101