مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره بیست و سوم، شماره۲، سال۱۴۰۲

برآورد خطا و بهبود تنش در تحلیل غیرخطی مصالح به روش ایزوژئومتریک

علی شاهینی[1]، احمد گنجعلی[2*]، ابوذر میرزاخانی[3]

۱- دانشجوی دکت ی، گ وه مهندسی عم ان، واحد شاه ود، دانشگاه زاد اسلامی، شاه ود، ای ان.
۲و۳- استادیار، گ وه مهندسی عم ان، واحد شاه ود، دانشگاه زاد اسلامی، شاه ود، ای ان.

ahmad.ganjali@iau-shahrood.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱٤۰۱/۰۲/۱۱ اریخ پذی ش: ۱٤۰۱/۰۹/۲٦

چکیده

همگام با رشد علوم و فناوری و با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریعتر و دقیق تر آن‌ها، پژوهشگران همواره سعی کردند در کنار توسعه مبانی علوم، روش‌های عددی را نیز توسعه بخشند. دراین مسیر، روش‌های متعددی توسط پژوهشگران ابداع شده است که از مهمترین آن‌ها می‌توان به روش ایزوژئومتریک غیرخطی که بر اساس بی‌اسپیلاین‌های نسبی غیر یکنواخت به وجود آمده است، اشاره کرد. در روش ایزوژئومتریک غیرخطی ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها و سطوح، از آن‌ها برای درونیابی و تقریب سازی هم استفاده می‌شود. استفاده از همه ظرفیت سازه در تحمل بار، باعث رفتار غیرخطی سازه می‌شود که ناشی از عملکرد نامناسب هندسه سازه، ضعف مصالح سازه و نارسائی ناشی از ترکیب دو حالت قبل است. و در این پژوهش غیرخطی شدن ناشی از ضعف مصالح مدنظر قرار داده شده است. همچنین در حل معادلات تعادلی غیر خطی از یک روند افزایشی و تکراری بار تا حصول ماکزیمم همگرایی استفاده شده است. همچنین به سبب وجود خطا در تحلیل‌های عددی و نگرانی پژوهشگران در قابلیت اعتماد نتایج، در این پژوهش نسبت به برآورد خطا براساس روش بازیافت تنش بر مبنای نقاطی که مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است (نقاط فوق همگرا) پرداخته شده است. بدین صورت که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان تعیین شده است. کلیه رابطه‌سازی‌های پژوهش و خطی‌سازی معادلات با استفاده از یک الگوریتم عددی با کمک برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار فرترن انجام شده و نتایج تحلیل برای درستی‌آزمایی با حل کلاسیک آن مقایسه شده است. نتایج تشابه عددی و توزیعی قابل قبولی را نشان داده است؛ پس می‌توان بیان کرد تحلیل صورت گرفته توسط برنامه از کارایی مناسبی برای تحلیل غیرخطی مسائل برخوردار است. همچنین روش تخمین کننده خطای به کار گرفته شده را می‌توان راه حلی ساده و مهندسی برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل الاستوپلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتریک نام برد.

واژگان کلیدی روش ایزوژئومتریک غیر خطی، برآورد خطا، روش بازیافت تنش، نقاط فوق همگرا، بهبود میدان تنش.

[DOI: 10.22034/23.2.6]

۱- مقدمه

برخی از مهندسین برای غلبه بر مشکلاتی مانند خطای تقریب در روش اجزای محدود و بهبود این روش‌ها، استفاده از توابع پایه اسپیلاین را به جای توابع شکل توصیه نموده‌اند و این کار برای اولین بار در سالهای ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان[1] و هولیگ[2] [1-3]، انجام شد. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز (بی-اسپیلاین‌های نسبی غیر یکنواخت[3]) که از توسعه توابع اسپیلاین بدست می‌آیند، توسط هیوز[4] [4]، تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت. در واقع اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه[5] و پیشرفت‌های اخیر در زمینه گرافیک کامپیوتری تشکیل می‌دهد. در این روش، ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و حجم‌ها، از آن‌ها برای درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود.

از طرفی لزوم استفاده از بیشترین ظرفیت مصالح و ایجاد طراحی‌های مقرون به صرفه و در عین حال ایمن سبب گسترش روش‌های تحلیلی در حیطه رفتار غیرخطی سازه‌ها شده است. همچنین برای برنامه‌نویسی کامپیوتری روابط غیرخطی و خطی سازی الگوریتم‌های عددی روش‌هایی مانند روش نیوتن-رافسون[6] ابداع شد. که از جمله پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه می‌توان ابتدا به فرایند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله توسط ترنر و همکاران[7] [5] و اگریس[8] [6,7] اشاره کرد. که در ادامه این پژوهشها توسط ادن [8]، مالت[9] و مارکل[10] [9]، ادن [10]، هایسلر[11] و همکاران [11] و زینکوویچ[12] [12] به توسعه روش نیوتن-رافسون انجامید. همچنین بربیا و کانر[13] [13]، مفهوم اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را معرفی کردند. و در تکمیل و بهبود رهیافت های یاد شده، حسنی و همکاران [14]، به بررسی مسائل غیرخطی الاستیک تراکم ناپذیر با روش ایزوژئومتریک پرداختند.

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی پژوهشگران در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی بود که توسط ریچاردسون[14] در سال ۱۹۱۰ نوشته شد [15]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ توسط بابوشکا[15] و رینبولت[16] آغاز شد[16,17]. روش آنها روش باقیمانده‌ای نام گرفت و طبق پژوهشی که بابوشکا در سال ۱۹۹۴ توسط آزمون وصله خود انجام داد، پی برده که روش بازیافت تنش در مقایسه با روش‌های باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار است [18,19]. به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، پیوسته و هموار نمودن میدان تنش بدست آمده از تحلیل عددی مسائل است. با استفاده از بازیافت تنش، یک جواب نزدیک به حل دقیق محاسبه شده، که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه خواهد داشت. اصلی ترین گام در روش‌های بازیافت تنش در سال ۱۹۹۲ توسط زینکویچ و زو[17] با روش SPR[18] برداشته شد[20]. اساس این روش برمبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا در اجزای محدود است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط دارای دقت بیشتری است.

در این پژوهش به کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش بر مبنای مفاهیم نقاط فوق همگرا در تحلیل الاستوپلاستیک مسائل به روش ایزوژئومتریک پرداخته شده است. روابط مسائل تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مرتبط با این روش، به کمک برنامه نویسی کامپیوتری در محیط فرترن توسعه داده شده و نتایج تحلیل برای درستی‌آزمایی با حل

1. Kagan
2. Hollig
3. Non-Uniform Rational B-splines (NURBS)
4. Hughes
5. CAD (Computer Aided Design)
6. Newton-Raphson Method
7.Turner et al.
8. Argyris
9. Mallet
10. Marcal
11. Haisler
12. Zienkiewicz
13. Brebbia & Connor
14. Richardson
15. Babuška
16. Rheinboldt
17. Zhu
18. Superconvergent patch recovery

[DOI: 10.22034/23.2.6]

کلاسیک آن مقایسه شده است. سپس دو مسئله نمونه برای نشان دادن کارایی تحلیل مذکور مورد تحلیل قرار گرفته است.

۲–استخراج روابط و معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- روش تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی[1]

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتریک، باید آن محیط را به یک محیط گسسته، متشکل از دهانه‌های گره‌ای[2] با فواصل مساوی تبدیل نمود. این عمل در روش ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی[3] نربز صورت می‌پذیرد [21 ,22]. یک سطح نربز به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود [23] . در شکل (۱) نمونه‌ای از این المان‌بندی نشان داده شده است.

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{i,j} \tag{۱}$$

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \tag{۲}$$

که در آن $P_{i,j}$ نقاط کنترلی، $N_{i,p}(\xi)$ و $N_{j,q}(\eta)$ و $N_{k,p}(\xi)$ و $N_{l,q}(\eta)$ توابع پایه‌ای بی– اسپلاین[4] از درجه p و q و $w_{i,j}$ و $w_{k,l}$ وزن نقاط کنترلی و $R_{i,j}(\xi,\eta)$، توابع پایه‌ای نسبی غیریکنواخت[5] و $S(\xi,\eta)$ یک سطح نربز است. به طورکلی در روش ایزوژئومتریک، مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان کننده مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط،(P_x,P_y)، بتوانند هندسه مسئله را در صفحه xy برآورد کنند، در این صورت مولفه سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درون‌یابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ای نربز نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد [21].

بنابراین اگر تغییر مکان در جهت x و y را به ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نربز (وصله[6]) را (با توجه با خاصیت بازه تاثیر توابع نربز) به صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون‌یابی کرد [21].:

$$\mathbf{u}\approx\bar{\mathbf{u}}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mathbf{R}_{i,j}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{x\,i,j}\\ \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j}\mathbf{R}_{k,l}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{v\,k,l}\end{Bmatrix} \tag{۳}$$

$$\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{R}.\mathbf{P} \tag{۴}$$

که در آن ξ,η مولفه‌های مختصات نرمال در بازه $0\le\xi,\eta\le 1$ و $P_{y\,i,j},P_{x\,i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه های مختصات نقاط کنترلی و $\mathbf{R}_{i,j}$ و $\mathbf{R}_{k,l}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز هستند [21].

با توجه به رابطه (۳) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح تغییر مکان در جهت x و y، بردار $\boldsymbol{P}$ است. همچنین از عواملی که بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز را مشخص می‌کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در فضای تاثیر هر المان نربز در تحلیل ایزوژئومتریک است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی حاکم بر مسائل دو بعدی را می‌توان به صورت رابطه (۵) تعریف نمود.

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0 && in\ \ \Omega\\ &\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}=\mathbf{t} && on\ \ \Gamma_t\\ &\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}} && on\ \ \Gamma_u\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن L عملگر مشتق و به صورت زیر تعریف می‌شود:

1. Isogeometrice Analysis method
2. Knot spans
3. Control point
4. B-Spline
5. Non-Uniform Rational
6. Patch

[DOI: 10.22034/23.2.6]

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \qquad (۶)$$

و $\boldsymbol{\sigma}$، $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{b}$ به ترتیب بردارهای تنش، جابه‌جایی و نیروهای حجمی می‌باشند. t نیروهای سطحی از پیش تعیین شده روی مرز طبیعی Γ_t و $\hat{u}$ جابه‌جایی از پیش تعیین شده روی مرز ضروری Γ_u و $\boldsymbol{n}$ بردار یکه عمود بر هر نقطه از مرز طبیعی و به سمت خارج سطح است (شکل ۱) [21].

شکل ۱ شرایط مرزی یک مسئله الاستیسیته دو بعدی [21].

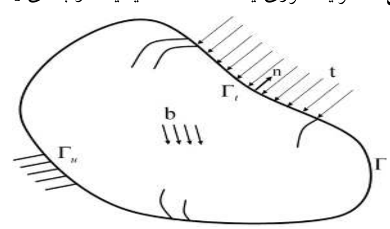

Fig. 1. Boundary conditions of a two-dimensional problem [21].

رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌های غیرخطی به صـــورت رابطه (۷) زیر محاسبه می‌شود [24]:

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}_{ep}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0\right)+\boldsymbol{\sigma}_0 \qquad (۷)$$

که در رابطه بالا ماتریس $\boldsymbol{D_{ep}}$ ماتریس ویژگی‌های مصـــالح الاستوپلاستیک است و داریم: [24].

$$\mathbf{D}_{ep}=\left[\mathbf{D}-\frac{\mathbf{d}_D.\mathbf{d}_D{}^T}{\mathbf{H}'+\mathbf{d}_D{}^T.\mathbf{a}}\right];\ \mathbf{d}_D=\mathbf{D}\mathbf{a} \qquad (۸)$$

در رابطه بالا ماتریس $\mathbf{a}$، بردار جریان و $\mathbf{H}'$، مدول سخت شوندگی است که بر اساس مرجع [24] برای شرایط کاملا پلاستیک (و در این پژوهش) صفر در نظر گرفته شده است.
با جایگذاری معادله (۴ و ۸) در (۵) و با استفاده از روش تغییر مکان مجازی و یا روش کمتر کردن تابع پتانسیل فرم ضعیف معادله (۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید [21] :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}_{ep}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{P}}\,d\Omega-\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}_{ep}\boldsymbol{\varepsilon_0}\,d\Omega+\\&\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 \boldsymbol{d}\Omega-\int_\Omega \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_\Gamma \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\,d\Gamma_t=0\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در آن $\boldsymbol{B}$ ماتریس مشتقات توابع شکل نربز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}=\mathbf{LR}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 & \cdots\\ 0 & \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \cdots\\ \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & \cdots\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

برای حل مسائل غیرخطی با بکارگیری روش نیوتن– رافسون داریم [25]:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}^{i-1}=\boldsymbol{F}^{ext}-\int_V \boldsymbol{B}^T.\,\boldsymbol{\sigma}^{i-1}\ .dV,\\&\delta\boldsymbol{U}=\left[\boldsymbol{K}_{ep}\left(\boldsymbol{U}^{i-1}\right)\right]^{-1}.\ \boldsymbol{R}^{i-1}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$$\boldsymbol{U}^i=\boldsymbol{U}^{i-1}+\delta\boldsymbol{U} \qquad (۱۴)$$

که مقدار $\boldsymbol{R}^{i-1}$: نیروهای نامتعادل کننده[1] وارد شده بر زیر دامنه در تکرار $i-1$ ام، $\boldsymbol{F}^{ext}$: نیروهای خارجی وارد بر دامنه، $\boldsymbol{\sigma}^{i-1}$تنش‌های ایجاد شده در دامنه در تکرار $i-1$ ام، $\delta\boldsymbol{U}$: جابه‌جایی ایجاد شده ناشی از نیروی‌های نامتعادل کننده، $\boldsymbol{K}_{ep}$: سختی مماسی در تکرار $i-1$ ام ، $\boldsymbol{U}^{i-1}$: جابه‌جایی‌ها در شروع تکرار i ام $\boldsymbol{U}^i$: جابه‌جایی نهایی در تکرار i ام هستند.
همچنین بر اساس روابط (۱۱ و ۱۴) در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه داریم:

$$\boldsymbol{K}_T^i.\Delta\boldsymbol{P}^i=\boldsymbol{F}_e{}^{i-1} \qquad (۱۵)$$

همچنین $\boldsymbol{K}_T^i$ماتریس ســـختی مماســـی در تکرار i ام، $\Delta\boldsymbol{P}^i$ مجهولات مســـئله (تغییرات جابه‌جایی به عنوان مولفه ســـوم

[1] Unbalanced forces

[DOI: 10.22034/23.2.6]

مختصات در فضای نربز) در تکرار i ام و $\boldsymbol{F}_e^{i-1}$ بردار نیروهای باقیمانده وارد شده بر زیر دامنه در تکرار $i-1$ ام هستند، که به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_T = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}_{ep} \boldsymbol{B}\, d\Omega \tag{۱۶}$$

با حل معادله (۱۶) و مشخص شدن بردار $\boldsymbol{P}$ مولفه‌های کرنش و تنش را به صورت روابط زیر بدست آمده است:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{BP} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep}.\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۱۷}$$

در روش ایزوژئومتریک هندسه مسئله بر اساس رابطه (۳) تعریف می‌شود [21] و در این روش برای حل عددی انتگرال ماتریس سختی از روش انتگرال‌گیری گوس استفاده شده است. بدین منظور با المان‌بندی دامنه مسئله در هر دهانه گره‌ای نربز $[\xi_i,\xi_{i+1}]\times[\eta_i,\eta_{i+1}]$ با توجه به شکل (۲) به صورت است و مطابق رابطه (۱۸) ماتریس سختی هر زیر دامنه به صورت زیر ارائه شده است:

$$\boldsymbol{K}_{T\,patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \boldsymbol{B}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{D}_{ep}\boldsymbol{B}(\xi,\eta)\, d\Omega \tag{۱۸}$$

که در آن $\boldsymbol{B}(\xi,\eta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{R}} \tag{۱۹}$$

شکل ۲. المان‌های ساخته شده به وسیله دهانه‌های گره‌ای نربز و نگاشت انتقال از مختصات دستگاه (r,s) به دستگاه مختصات نرمال [4].

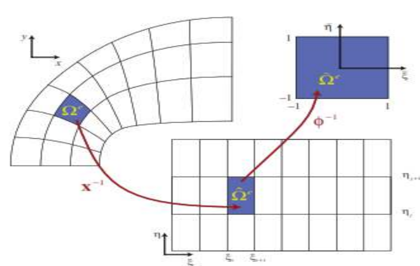

Fig. 2. Elements made by NURBS-shaped nodes and transfer mapping from (r,s) coordinate system to normal coordinate system [4].

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی به مشتقات $\boldsymbol{R}$ نسبت به جهات x و y در دستگاه مختصات کلی نیاز داریم؛ که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نربز، ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم [21]:

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

بنابراین داریم[21]:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{۲۱}$$

که در آن $\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}$ و $\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه‌ای نربز هستند. بنابراین می‌توان رابطه (۱۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{K}_{T\,patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \boldsymbol{B}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{D}_{ep}\boldsymbol{B}(\xi,\eta)\det \boldsymbol{J}_1 d\xi d\eta \tag{۲۲}$$

برای محاسبه انتگرال محاسبه سختی رابطه (۲۲) از روش گاوس استفاده شده است در این روش با توجه به مرجع [21] از یک نگاشت استفاده شده است به گونه‌ای که این نگاشت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه (r,s) المان i اُم را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نربز (ξ,η) منتقل می‌کند [21]:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left[(\xi_{i+1}-\xi_i)r + (\xi_{i+1}+\xi_i)\right] \\ \eta &= \frac{1}{2}\left[(\eta_{i+1}-\eta_i)s + (\eta_{i+1}+\eta_i)\right] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبین به صورت زیر است [21]:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial s} & \dfrac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \;,\quad d\xi d\eta = \det \mathbf{J}_2 dr ds \tag{۲۴}$$

که در آن

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right)\quad,\quad\frac{\partial\eta}{\partial r}=0$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial s}=0\quad,\quad\frac{\partial\eta}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)\qquad(۲۵)$$

بنابراین رابطه ماتریس سـختی در حالت غیر خطی را به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات (r,s) المان‌ها بازنویس شده است:

$$\mathbf{K}_{T(patch)}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T(r,s)\mathbf{D}_{ep}\mathbf{B}(r,s)r\det\mathbf{J}_1\det\mathbf{J}_2drds\qquad(۲۶)$$

و در نهایت انتگرال ماتریس سختی به روش گاوس به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\boldsymbol{K}_{T(patch)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}^T(r,s)\boldsymbol{D}_{ep}\boldsymbol{B}(r,s)\det J_1\det J_2w_iw_j\qquad(۲۷)$$

۲-۲- بهبود تنش در روش تحلیل ایزوژئومتر یک غیر خطی

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی درنظر گرفته شده است. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابه‌جایی) استفاده شده‌اند، بدست آمده است. با توجه به توابع شکل نربز می‌توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت رابطه (۲۸) بیان کرد [22]:

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{R}_{i,j}(u,v).\mathbf{P}_{i,j}\qquad(۲۹)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، $\mathbf{R}$ توابع شکل نربز و $\mathbf{P}$ مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش است. و داریم [22]:

$$F(\mathbf{P})=\sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\boldsymbol{\sigma}^*_{i,j}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i,j})^2\qquad(۳۰)$$

که $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ در آن تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهات x و y موجود در هر ناحیه است.

در نهایت با مشتق‌گیری از تابع $F(\boldsymbol{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته مطابق رابطه (۳۱) بدست می‌آید [22].

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}}=0\quad\Rightarrow\mathbf{AP}=\mathbf{B}\;\Rightarrow\;\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\qquad(۳۱)$$

$$\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\mathbf{R}_i^T\qquad;\qquad\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i\qquad(۳۲)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید. برای داشتن دقت بهتر در حل مسائل غیرخطی، در انتهای هر مرحله افزایش بار، تنش مربوطه در انتهای مرحله n ام، با استفاده از روش فوق الذکر بهبود داده می‌شود و همچنین می‌توان این تنش بهبود یافته را برای همگرایی سریعتر حل مسئله در مرحله بعدی افزایش بار نیز استفاده کرد که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بهبود یافته و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی برای هر المان، به صورت تقریبی به معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا می‌کنیم.

۲-۳- رابطه‌سازی تئوری رفتار مصالح الاستوپلاستیک تغییر شکل‌پذیر

در این پژوهش رابطه سازی تئوری رفتار مصالح الاستوپلاستیک شکل‌پذیر بر اساس، التزام استفاده از قانون هوک [1] و معیار تسلیم وون میزز [2] است. همچنین برای پایان دادن به مراحل تکرار از

1.Hook law

2.The Von-Misses criterion

[DOI: 10.22034/23.2.6]

معیار همگرایی نیرویی رابطه (۳۳)، [24] ، استفاده شده است [28].

$$\mathbf{R}=\frac{\left|\left[\sum_{i=1}^{n_{dof}}\left(\Psi^{r}{}_{i}\right)^{2}\right]^{1/2}\right|}{\left|\left[\sum_{i=1}^{n_{dof}}(\mathbf{F}_{i})^{2}\right]^{1/2}\right|}<TOLER \qquad (۳۳)$$

$\mathbf{F}_i$ و $\Psi^{r}{}_{i}$ در روابط بالا، به ترتیب نیروهای وارد شده بر هر گره و نیروهای باقیمانده در هر گره و در درجه آزادی i است. و n_{dof} تعداد کل درجات آزادی سیستم و $TOLER$ مقدار خطا قابل قبول همگرایی است که در این مقاله ۰/۰۰۱ تعیین شده است.

۲-۴-استفاده از نرم خطای انرژی در روش ایزوژئومتریک غیرخطی

طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان در حالت غیرخطی، به صورت رابطه (۳۴) بیان می‌شود [28]:

$$\|e\|=\left[\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\,\mathbf{D}_{ep}{}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۴)$$

که در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی، $\mathbf{D}_{ep}$ ماتریس ویژگی‌های مصالح و Ω دامنه المان است. با توجه به اینکه جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل پلاستیسیته موجود است، حل دقیق مسئله در دسترس نیست، پس به جای استفاده از میزان دقیق تنش، از میزان بهبود یافته آن برای محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در نهایت نرم خطای انرژی با استفاده ازروش انتگرال‌گیری گوس برای هر المان در حالت غیرخطی و در انتهای هر مرحله افزایش بار به صورت رابطه (۳۵) محاسبه شده است [28]:

$$\|e^{*}\|= \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\sigma}^{*}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\mathbf{D}_{ep}{}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{*}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})\left|J_{1}\right|.\left|J_{2}\right|\,w_{i}.w_{j}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۵)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بهبود یافته و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی است. n و m به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهات y وx در هر المان و w وزن نقاط گوسی است. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

۲-۵- شاخص تأثیر $\boldsymbol{\theta}$

برای بررسی کارایی محاسبه‌گر خطا در این پژوهش از شاخص تاثیر استفاده شده است که نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی را بیان می‌کند. که به صورت رابطه (۳۶) است [22].

$$\theta^{*}=\frac{\|\mathbf{e}^{*}\|}{\|\mathbf{e}\|} \qquad (۳۶)$$

در رابطه بالا $\mathbf{e}^*$ خطای تقریبی و $\mathbf{e}$ خطای دقیق است.

۳- ارائه مسئله‌ها

در این قسمت برای نمایش کارایی روش بازیافت تنش و کاربرد نقاط فوق همگرا در تولید سطح تنش بهبود یافته با استفاده از مفاهیم تحلیل غیرخطی به روش ایزوژئومتریک با ارائه دو مسئله نمونه به بیان نتایج پرداخته شده است.

۳-۱- مسئله اول، تیر یک‌سرگیردار تحت اثر بار متمرکز

در شکل (۳) مشخصات هندسی تیر یک‌سرگیردار مسئله اول نشان داده شده است:

[DOI: 10.22034/23.2.6]

شکل ۳. شرایط هندسی و مرزی تیر یک‌سرگیردار[31].

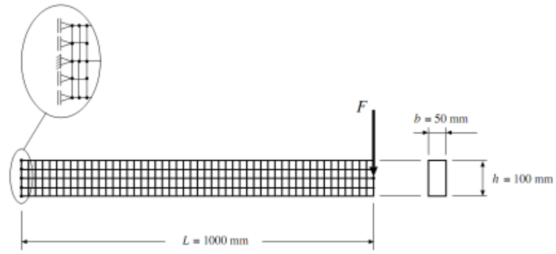

Fig. 3. The geometrical and boundary conditions of cantilever beam [31].

در جدول (۱) مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

جدول ۱. مشخصات هندسی و خواص مصالح تیر یک‌سرگیردار.

Geometric Properties	Properties of materials
Beam length L=1000 mm	Modulus of elasticity E=210 GPa
Dimensions of beam cross section h=100 mm b=50 mm	Poisson coefficient ν=0.3
The total number of control points ntcpt=255	Yield stress Y=0.24 GPa
Number of patches npatches=1	Centralized force P=30 KN

Table 1. Geometric properties and properties of cantilever beam materials.

اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل الاستوپلاستیک در جدول (۲) آمده است:

جدول ۲. روش تحلیل الاستوپلاستیک.

Von Mises	Yield criteria
30	Number of load increases
force	Convergence criterion
1×10^{-3}	Allowable erorr
Tangential Stiffness *KT*	Method of solution
Load change control	Incremental loading method

Table 2. Elasto plastic analysis

الف-حل تحلیلی کلاسیک :

براساس حل تحلیلی کلاسیک داریم:

پلاستیسته زمانی آغاز می‌شود که $F = F_E = \frac{2\sigma_Y bc^2}{3L}$ باشد.

الف-۱- برای هسته پلاستیک:

$$y=\pm y^*_{(x)} \Rightarrow \begin{cases} \sigma=\sigma_y & -c\le y\le -y^*_{(x)} \\ \sigma=-\sigma_y & y^*_{(x)}\le y\le c \end{cases} \tag{۲۷}$$

$$y=\pm y^*_{(x)} \Rightarrow \begin{cases} \tau=0 & -c\le y\le -y^*_{(x)} \\ \tau=0 & y^*_{(x)}\le y\le c \end{cases} \tag{۳۸}$$

که در آن c: ارتفاع تار خنثی و $y^*_{(x)}$: مرز الاستوپلاستیک است.

الف-۲- برای هسته الاستیک:

برای $-y^*_{(x)} \le y \le y^*_{(x)}$ توزیع تنش σ به صورت توزیع خطی از تنش تسلیم رابطه (۲۷) و توزیع تنش τ نیز به صورت رابطه (۳۹) است:

$$\sigma=-\sigma_y\left(\frac{y}{y^*_{(x)}}\right) \tag{۳۹}$$

$$\tau = \frac{3F}{4by^*_{(x)}} \tag{۴۰}$$

در روابط بالا مقدار مرز الاستوپلاستیک $y^*_{(x)}$ به صورت رابطه (۴۱) محاسبه شده است:

$$y^*_{(x)}=\sqrt{3\left[c^2-\frac{F(L-x)}{b\times\sigma_y}\right]}=c\sqrt{3-\frac{2(L-x)}{\xi}} \tag{۴۱}$$

که در آن ξ طول گستره ناحیه الاستیک و از رابطه $\xi=\frac{2\sigma_y bc^2}{3F}$ قابل محاسبه است.

شکل ۴. نواحی پلاستیک و الاستیک در تیر تیر یک‌سرگیردار[29].

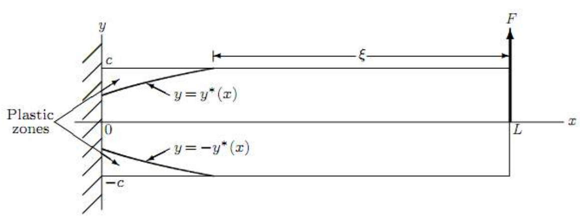

Fig. 4. Plastic and elastic zone of the cantilever beam [29].

مقدار بار نهایی (خرابی) برابر است با: $F=F_U=\sigma_y\frac{bc^2}{L}$

که این مقدار ۱/۵ برابر بار تسلیم (F_E)است. برای اطلاعات

بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص مسئله اول، به منابع [29-31] مراجعه شود.

در شکل (۵) کرنش مؤثر پلاستیک با هدف نشان دادن کفایت حد بارگذاری ورود به ناحیه پلاستیک بر اساس معیارهای جدول ۱ (حد ورود به کرنش پلاستیک به مقدار $\varepsilon = 0.00114$) نشان داده شده است. و همان‌گونه در اشکال (۶ تا ۸) مشاهده می‌شود، در σ_{XY} نتایج تنش بهبود یافته نسبت به صفحه تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی دارای تغییرات کمتری است و شباهت توزیع رنگ در کانتورهای تنش بهبود یافته نسبت به نتایج حل دقیق، نشان دهنده کارایی مناسب محاسبه‌گر خطا است.

شکل ۵. کرنش مؤثر پلاستیک تیر یک‌سرگیردار

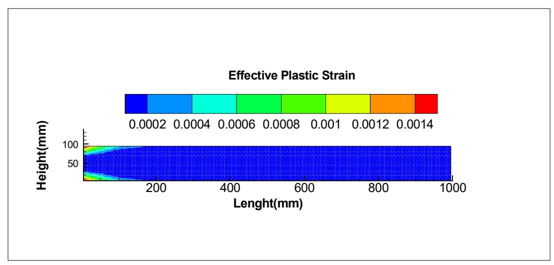

Fig. 5. σ_{XY} cantilever beam Effective Plastic Strain.

شکل ۶. σ_{XY} تیر یک‌سرگیردار ناشی از تحلیل دقیق

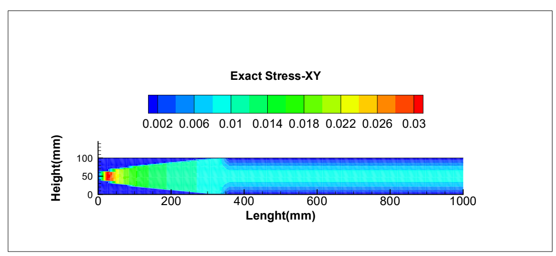

Fig.6. σ_{XY} cantilever beam induced by exact analysis.

شکل ۷. σ_{XY} تیر یک‌سرگیردارناشی از تحلیل ایزوژئومتریک

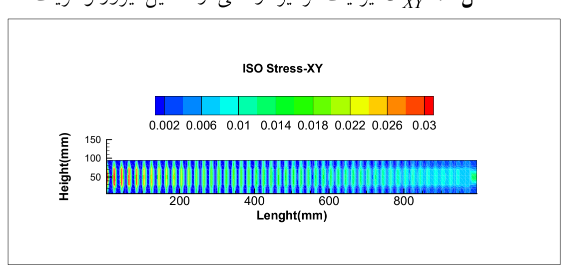

Fig. 7. σ_{XY} cantilever beam induced by isogeometric analysis.

شکل ۸. σ_{XY} تیر یک سرگیردار ناشی از تحلیل بهبود یافته

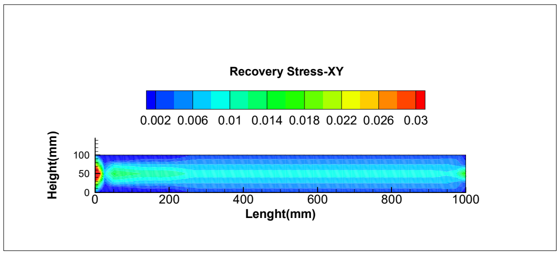

Fig. 8. σ_{XY} cantilever beam induced by recovered analysis.

همچنین که در اشکال (۹ و ۱۰)، هماهنگی تنش‌های دقیق، بهبود یافته σ_{XX} و σ_{XY} را نشان می‌دهد.

شکل ۹. مقایسه تطابق تنش‌های σ_{XX} دقیق و بهبود یافته در تیر یک‌سرگیردار.

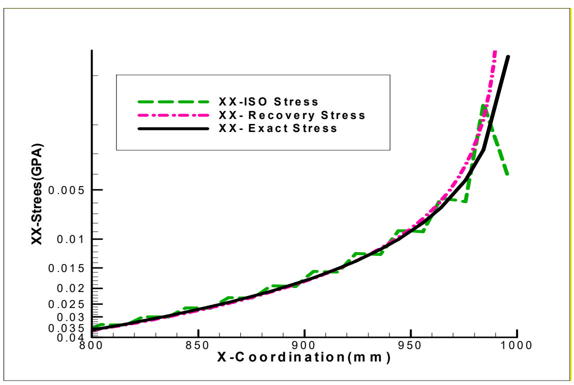

Fig. 9. Comparison of the matching exact and recovered σ_{XX} stresses in cantilever beam.

شکل ۱۰. مقایسه تطابق تنش‌های σ_{XY} دقیق، بهبود یافته و ایزوژئومتریک در تیر یک‌سرگیردار.

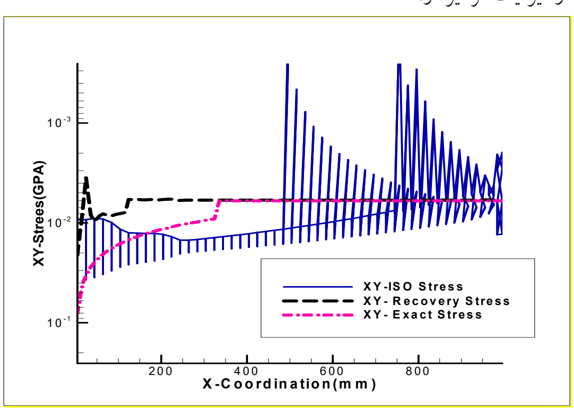

Fig. 10. Comparison of the matching exact, recovered and isogeometric σ_{XY} stresses in cantilever beam.

در اشکال (۱۱ و ۱۲) چگونگی توزیع نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی نشان داده شده است، که تشابه در آهنگ تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطا است.

شکل ۱۱. توزیع دو بعدی نرم خطای دقیق در تیر یک‌سرگیردار به ازای توابع شکل درجه یک.

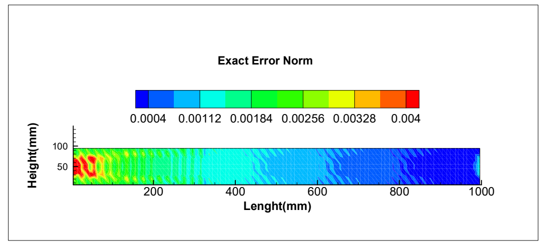

Fig. 11. Two-dimensional distribution of exact error norm in cantilever beam for first-order form functions.

شکل ۱۲. توزیع دو بعدی نرم خطای تقریبی در تیر یک‌سرگیردار به ازای توابع شکل درجه یک.

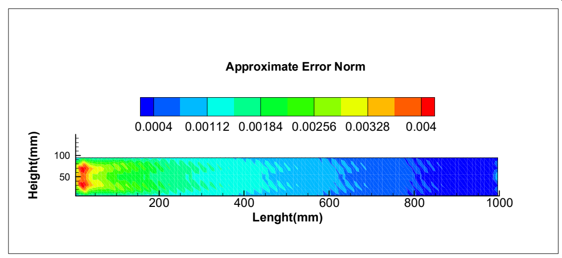

Fig. 12. Two-dimensional distribution of approximate error norm in cantilever beam for first-order form functions.

۲-۳- مسئله دوم، تحلیل الاستوپلاستیک استوانه جدار ضخیم فولادی تحت اثر فشار داخلی

در شکل (۱۳) مشخصات هندسی استوانه جدارضخیم مسئله دوم نشان داده شده است:

شکل ۱۳. استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی [34].

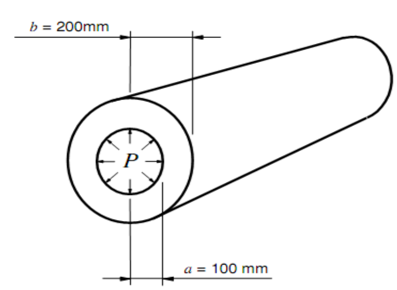

Fig. 13. Thick-walled cylinder under internal pressure [34].

برای کاهش حجم محاسبات و به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است. در جدول (۳) مشخصات هندسی و خواص مصالح مسئله دوم ارائه شده است:

جدول ۳. مشخصات هندسی و خواص مصالح استوانه جدار ضخیم

Geometric Properties	Properties of materials
Internal radius r_a=100 mm	Modulus of elasticity E=210 GPa
External radius r_b=200 mm	Poisson coefficient ν=0.3
The total number of control points ntcpt=399	Yield stress Y=0.24 GPa
Number of patches npatches=1	Force applied pressure P=0.18 GPa

Table 3. Geometric properties and properties of thick-walled cylindrical materials.

برای تحلیل الاستوپلاستیک از اطلاعات جدول (۲) با تعداد افزایش بار ۶، استفاده می‌شود. براساس حل تحلیلی کلاسیک فشار P، که بر سطح داخلی وارد می‌شود، به صورت تدریجی افزایش داده شده است تا به حد فشار نهایی (خرابی) برسد. برای استوانه جدار ضخیم، سطح تسلیم از سطح داخلی (زمانی که مختصات $r = a$ باشد) شروع و به صورت تدریجی با افزایش فشار داخلی، به شعاعی معادل $r = c$ می‌رسد. خرابی[1]، زمانی رخ می‌دهد که مقدار فشار داخلی به حد نهایی آن برسد که در این حالت مقدار شعاع $c = b$ است. در این صورت کل استوانه به حالت پلاستیک رسیده است.

شکل ۱۴. نواحی پلاستیک و الاستیک در مسئله دوم [35].

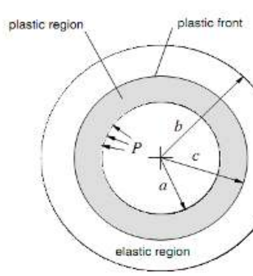

Fig. 14. The plastic and elastic areas in Problem 2 [35].

[1] Collapse

[DOI: 10.22034/23.2.6]

در حالت پلاســتیک زمانی که $a \leq r \leq c$ باشــد برای معیار ون میزز، داریم:

$$\sigma_r = -K\left[1 - N_2 + \ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \qquad (۴۲)$$

$$\sigma_\theta = K\left[1 + N_2 - \ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \qquad (۴۳)$$

$$\sigma_z = 2\nu K\left[N_2 - \ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \qquad (۴۴)$$

$$U_r = r\left((1-\nu)\frac{Kc^2}{Gr^2} + (1-2\nu)\frac{\sigma_r}{2G}\right) \qquad (۴۵)$$

و زمانی که $c \leq r \leq b$ باشد، داریم:

$$\sigma_r = -KN_2\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) \qquad (۴۶)$$

$$\sigma_\theta = KN_2\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right) \qquad (۴۷)$$

$$\sigma_z = 2\nu KN_2 \qquad (۴۸)$$

$$U_r = \frac{KN_2}{2G}\left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right) \qquad (۴۹)$$

که در این روابط P: فشار داخلی σ_r: تنش شعاعی σ_θ: تنش حلقوی σ_z: تنش محوری U_r: تغییرمکان شعاعی r: شعاع نقطه a : شعاع داخلی b: شعاع خارجی. برای اطلاعات بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص این مسئله، به منابع [32-35] مراجعه شود. در شکل (۱۵) کرنش مؤثر پلاستیک با هدف نشان دادن کفایت حد بارگذاری ورود به ناحیه پلاستیک بر اساس معیار های جدول (۳) (حد ورود به کرنش پلاستیک به مقدار $\varepsilon = 0.00114$)نشان داده شده است. همان‌گونه که در اشکال (۱۶ تا ۱۸) مشاهده می‌شود، σ_θ در حالت بهبود یافته دقت بیشتری را بر اساس شباهت توزیع رنگ در کانتورهای تنش، نسبت به نتایج تحلیل ایزوژئومتریک نمایش می‌دهد.

شکل ۱۵. نمایش کرنش مؤثر پلاستیک استوانه جدار ضخیم

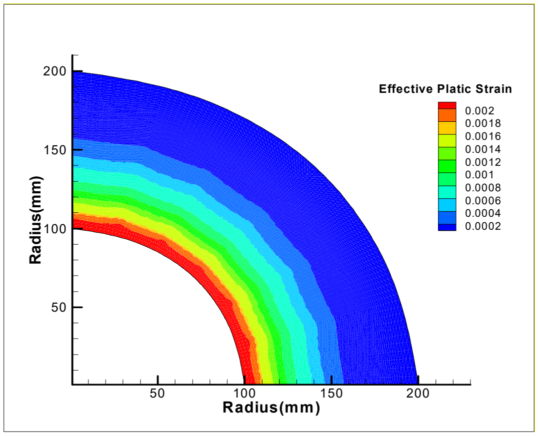

Fig. 15. Display thick cylinder wall Effective Plastic Strain.

شکل ۱۶. نمایش σ_θ استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی.(تحلیل دقیق)

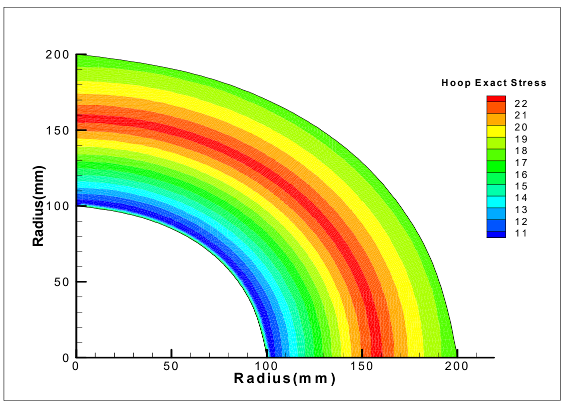

Fig. 16. Display σ_θ of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Exact analysis)

شکل ۱۷. نمایش σ_θ استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی. (تحلیل به روش ایزوژئومتریک)

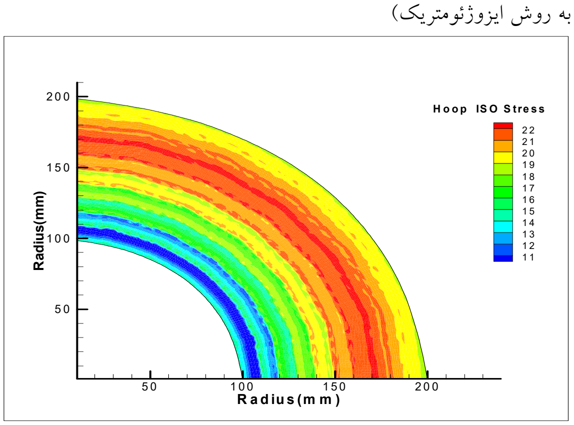

Fig. 17. Display σ_θ of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Analysis by isogeometric method)

[DOI: 10.22034/23.2.6]

شکل ۱۸. نمایش σ_{θ} استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی.(تحلیل بهبود یافته)

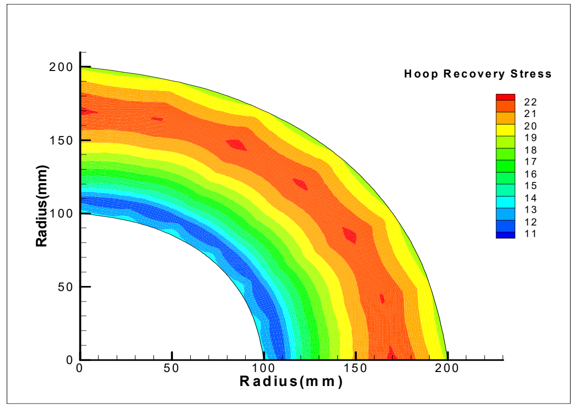

Fig. 18. Display σ_{θ} of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Recovered analysis)

همان‌گونه که در اشکال (۱۹ تا ۲۱) مشاهده می‌شود، در σ_r برای حالت بهبود یافته می‌توان عملکرد مطلوب محاسبه گر خطا و بهبود قابل توجه تنش‌ها در کلیه لایه‌های کانتور تنش را دید. و شکل(۲۲) هماهنگی تنش σ_r را در حالت بهبود یافته نسبت به تنش حاصل از تحلیل دقیق، به خوبی نمایش می‌دهد.

شکل ۱۹. نمایش σ_r استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی.(تحلیل دقیق)

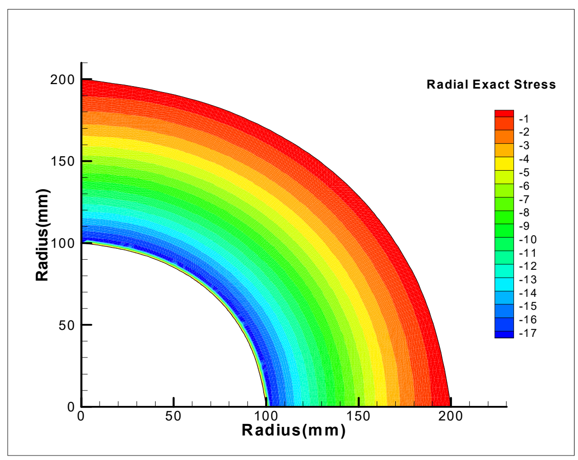

Fig. 19. Display σ_r of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Exact analysis)

شکل ۲۰. نمایش σ_r استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی. (تحلیل به روش ایزوژئومتریک)

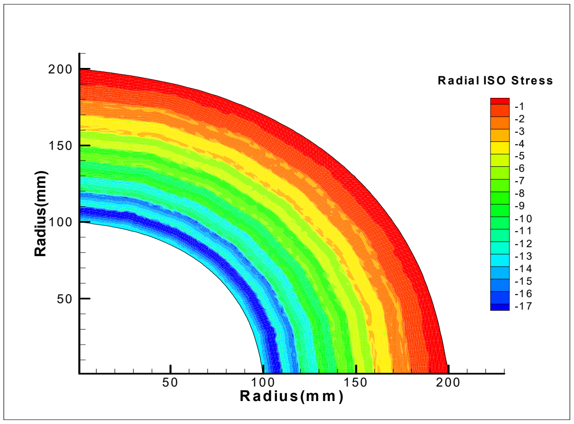

Fig. 20. Display σ_r of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Analysis by isogeometric method)

شکل ۲۱. نمایش σ_r استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی.(تحلیل بهبود یافته)

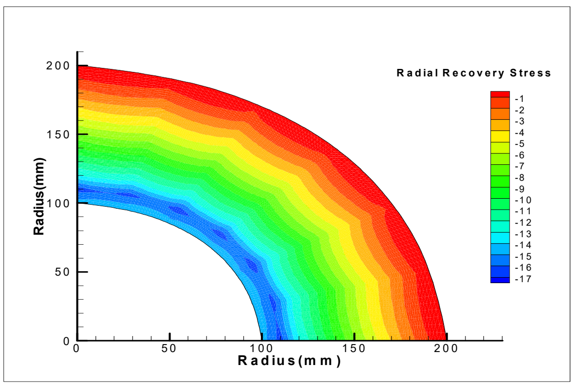

Fig. 21. Display σ_r of thick cylinder wall under the effect of internal pressure. (Recovered analysis)

شکل ۲۲. مقایسه تطابق تنش‌های شعاعی (σ_r) دقیق، بهبود یافته و ایزوژئومتریک در استوانه جدار ضخیم.

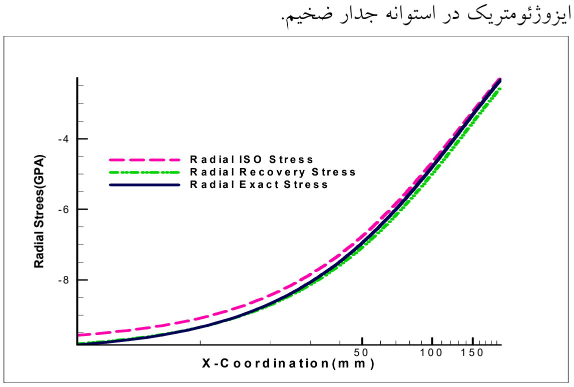

Fig. 22. Comparison of the matching exact, recovered and isogeometric radial (σ_r) stresses in thick-walled cylinder.

[DOI: 10.22034/23.2.6]

در اشکال (۲۳ و ۲۴) چگونگی توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق نشان داده شده است، که تشابه در آهنگ تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطا است.

شکل ۲۳. توزیع دوبعدی نرم خطای دقیق در استوانه جدارضخیم

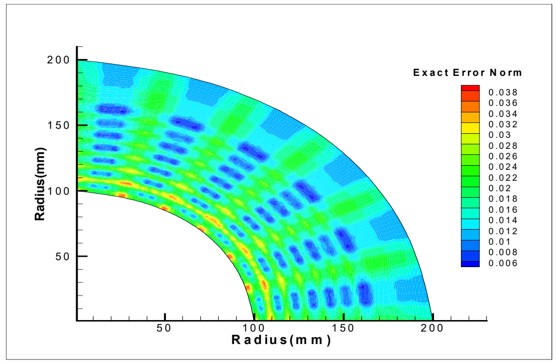

Fig. 23. Two-dimensional norm distribution of exact error in thick-walled cylinder.

شکل ۲۴. توزیع دوبعدی نرم خطای تقریبی در استوانه جدارضخیم.

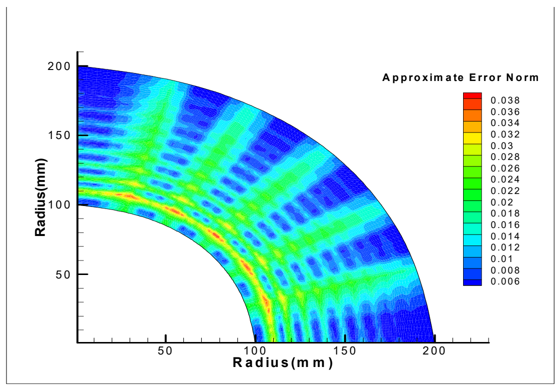

Fig. 24. Two-dimensional norm approximate error distribution in thick-walled cylinder.

۴- نتیجه‌گیری

با به کارگیری برآورد کننده خطا بر اساس روش تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی در نقاط فوق همگرا نتایج زیر حاصل شده است:

- در کانتورهای ترسیم شده برای هر دو مسئله، تشابه عددی و توزیعی قابل قبولی از تنش در نتایج مشاهده شده است؛ پس می‌توان بیان کرد تحلیل الاستوپلاستیک صورت گرفته توسط برنامه از کارایی مناسبی برای تحلیل غیرخطی مسائل مشابه، برخوردار است.
- شاخص تأثیر کل در مسئله تیر یک‌سر گیردار، ۰/۹۳ است. در این مسئله علاوه بر هماهنگی و تشابه قابل قبول تنش در نمودارهای مقایسه‌ای ترسیم شده، روند مشابهی نیز در هماهنگی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق وجود دارد. پس می‌توان بیان نمود که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی برای برآورد خطای تحلیل غیرخطی به روش ایزوژئومتریک برخوردار است.
- کانتورها و نمودارهای ترسیم شده برای مسئله استوانه جدار ضخیم روند نزدیکی را نسبت به حل کلاسیک نشان داده است. تنش‌های بهبود یافته، حاکی از دقت بالاتر روند تخمین‌گر خطا نسبت به تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی را به وضوح نشان می‌دهد. همچنین شاخص تأثیر کل در این مسئله ۰/۹۴ است و توزیع نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق درستی تطابق تنش‌های دقیق و بهبود یافته را به خوبی نشان می‌دهد.

در نهایت با توجه به آنچه اشاره شد، از روش تخمین کننده خطای به کار گرفته شده در حل مسائل غیرخطی، می‌توان به عنوان راه‌حلی ساده و مهندسی برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش نام برد.

۵- مراجع

1- Kagan, P., Fischer, A., & Bar-Yoseph, P. Z. J. I. J. f. N. M. i. E. (1998). New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. *41*(3), 435-458.

2- Höllig, K., Reif, U., & Wipper, J. J. S. J. o. N. A. (2001). Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. *39*(2), 442-462.

3- Kagan, P., Fischer, A., & Bar-Yoseph, P. Z. J. I. J. f. N. M. i. E. (2003). Mechanically based models: Adaptive refinement for B-spline finite element. *57*(8), 1145-1175.

4- Hughes, T. J., Cottrell, J. A., Bazilevs, Y. J. C. m. i. a. m., & engineering. (2005). Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *194*(39-41), 4135-4195.analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *194*(39-41), 4135-4195.

[DOI: 10.22034/23.2.6]

5- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., & Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *journal of the Aeronautical Sciences, 23*(9), 805-823.
6- Argyris, J. H. J. N. Y., MACMILLAN CO., OXFORD, PERGAMON PRESS, LTD., . 187 P. (1964). Recent advances in matrix methods of structural analysis(Matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers).
7- Argyris, J. (1965). Continua and Discontinua, opening address to the 1-st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics. In: Wright--Patterson AFB, Dayton, Ohio.
8- Oden, J. T. J. J. o. t. S. D. (1967). Numerical Formulations of Nonlinear Elasticity Problems. *93*(3), 235-356.
9- Mallett, R. H., & Marcal, P. V. J. J. o. t. s. d. (1968). Finite element analysis of nonlinear structures. *94*(9), 2081-2106.
10- Oden, J. (1969). *Finite element applications in nonlinear structural analysis.* Paper presented at the Proceedings of the ASCE Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering.
11- Haisler, W. E., Stricklin, J. A., & Stebbins, F. J. J. A. J. (1972). Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis. *10*(3), 264-272.
12- Zinckiewicz, O. (1971). The finite element in engeneering science. In: Mc Graw-Hill, London.
13- Brebbia, C., & Connor, J. J. J. o. t. E. M. D. (1969). Geometrically nonlinear finite-element analysis. *95*(2), 463-486.
14- Hassani, B., Tavakkoli, S. M., & Ardiani, M. (2015). Solution of Nonlinear Incompressible Hyperelastic Problems by Isogeometric Analysis Method %J Journal of Solid and Fluid Mechanics. *5*(2), 29-41. doi:10.22044/jsfm.2015.429
15- Richardson, L. F. (1911). IX. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 210*(459-470), 307-357.
16-Babuška, I., & Rheinboldt, W. C. J. I. J. f. N. M. i. E. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *12*(10), 1597-1615.
17-Babuška, I., Rheinboldt, W. J. C. M. i. A. M., & Engineering. (1979). Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. *17*, 519-540.
18-Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C. J. C. M. i. A. M., & Engineering. (1994). A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. *114*(3-4), 307-378.
19-Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C., Gangaraj, S., & Copps, K. J. I. j. f. n. m. i. e. (1994). Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *37*(7), 1073-1123.
20-Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z. J. I. J. f. N. M. i. E. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *33*(7), 1331-1364.
21- Hassani, B., Ganjali, A., & Hojatpanh Montazary, A. (2012). Analysis and Shape Optimization of Axsymmetric Structures by Isogeometric Analysis Method. *Journal of Solid and Fluid Mechanics, 1*(1), 1-13.
22- Hassani, B., Ganjali, A., & Tavakkoli, M. (2012). An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. *European Journal of Mechanics-A/Solids, 31*(1), 101-109.
23-Piegl, L., & Tiller, W. (2012). *The NURBS book*: Springer Science & Business Media.
24- Owen, D. R. J. (1980). Finite elements in plasticity, theory and practice.
25- Sheng, D., Sloan, S. W., & Abbo, A. J. (2002). An automatic Newton–Raphson scheme. *The International Journal Geomechanics, 2*(4), 471-502.
26- Nayak, G. C., & Zienkiewicz, O. C. (1972). Convenient form of stress invariants for plasticity. *Journal of the Structural Division, 98*(4), 949-954.
27-Boroomand, B., & Zienkiewicz, O. (1999). Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer methods in applied mechanics and engineering, 176*(1-4), 127-146.
28- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The finite element method: its basis and fundamentals*: Elsevier.
29- Lubliner, J. 1990, Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, New York, pp.239-244.
30- Chakrabarty, J. „1987, Theory of Plasticity. In: McGraw Hill, New York, NY, pp.164-171.
31- de Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2011). *Computational methods for plasticity: theory and applications*: John Wiley & Sons, pp. 387-388.
32- Hill, R. (1950). The mathematical theory of plasticity, Clarendon. *Oxford, 613*, 614, pp.98-110.

[DOI: 10.22034/23.2.6]

33- Lubliner, J. 1990, Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, New York, pp.216-228.
34- Chakrabarty, J. ,,1987, Theory of Plasticity. In: McGraw Hill, New York, NY, pp.323-333.
35- de Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2011). *Computational methods for plasticity: theory and applications*: John Wiley & Sons, pp. 244- 247.

[DOI: 10.22034/23.2.6]

Error estimation and stress improvement in nonlinear analysis of materials by isogeometric method

Shahini [1], A. Ganjali [2*], A. Mirzakhani [3]

1- Ph.D Student, Department Of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.
2&3- Assistant Professor, Department Of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

[*]Ahmad.ganjali@yahoo.com

Abstract:
Along with the growth of science and technology and with the problems becoming more complex and the need to solve them faster and more accurately, researchers always tried to develop numerical methods in addition to developing the basics of science. In this direction, several methods have been invented by researchers, among the most important of which, we can mention the nonlinear isogeometric method based on non-uniform relative B-splines. In the nonlinear isogeometric method, while using the properties of the spline and NURBS basis functions in the precise definition of curves and surfaces, they are also used for interpolation and approximation. The use of all the capacity of the structure in bearing the load causes the nonlinear behavior of the structure, which is caused by the inappropriate performance of the structure's geometry, the weakness of the structure's materials, and the failure caused by the combination of the two previous situations. And in this research, the nonlinearity caused by the weakness of the materials has been taken into consideration. Also, in solving the nonlinear equilibrium equations, an incremental and repetitive load process has been used until the maximum convergence is achieved. Also, due to the existence of errors in the numerical analyzes and researchers' concerns about the reliability of the results, in this research, compared to the error estimation based on the stress recovery method based on the points where the order of convergence of the gradient of a function is one order of the value obtained from the approximation of the shape function related to The expected approximate solution is higher (superconvergent points) are discussed. In this way, taking into account the difference between the recovered stress level and the stress level obtained from nonlinear isogeometric analysis for each element, a standard has been approximately determined to determine the amount of error in that element. All the correlations of the research and the linearization of the equations have been done using a numerical algorithm with the help of programming in the Fortran software environment, and the results of the analysis have been compared with its classical solution for validation. The results have shown an acceptable numerical and distribution similarity; Therefore, it can be said that the analysis performed by the program has a suitable efficiency for nonlinear analysis of problems. Also, the used error estimation method can be called a simple and engineering solution to estimate the error and improve the stress field obtained from the elastoplastic analysis of problems using the isogeometric method.

Keywords: Nonlinear Isogeometric Method, Error Estimation, Stress Recovery Method, Superconvergent Points, Improve The Stress Field.

[DOI: 10.22034/23.2.6]