مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره بیست و دوم، شماره۵، سال ۱۴۰۱

تحلیل ارتعاش آزاد تیر رایلی با میرایی ویسکوالاستیک غیرمحلی به روش گالرکین، فضای پوچ ماتریس و بسط سری نیومن

پریسا الیاسی[۱]، بهرام نوائی‌نیا[۲]*، علی رحمانی فیروزجائی[۳]

۱-دانشجوی دکتری مهندسی سازه دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
۲-استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
۳-دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

navayi@nit.ac.ir

تاریخ دریافت ۱۴۰۰/۰۸/۰۳ تاریخ پذیرش ۱۴۰۰/۱۲/۰۳

چکیده

میرایی غیرمحلی در مدل‌سازی نیروهای تماسی بستر ویسکوالاستیک و نیروهای پیرامونی میراگرهای شبکه‌ای متصل به یکدیگر در سیستم‌های بزرگ مقیاس کارآمد است. دقت نتایج عددی نیز با در نظر گرفتن میرایی غیرمحلی در تیرهایی که به صورت یک‌بعدی تحلیل می‌شوند، بهبود می‌یابد. در تحقیقات بسیاری، از میرایی ویسکوز برای مدل‌سازی میرایی، استفاده می‌شود در حالی‌که مدل‌های متاثر از چند پارامتر هماهنگی بهتری با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند. در مقاله حاضر، میرایی خارجی تیر رایلی با در نظرگرفتن وابستگی نیروی استهلاکی به تاریخچه زمانی حرکت و اثرپذیری از اندرکنش‌های نقاط پیرامونی، به صورت انتگرال‌های همگشت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور، معادله حاکم بر ارتعاش آزاد محیط پیوسته پس از اعمال تبدیل لاپلاس، با اتکا بر روش گالرکین به یک سیستم گسسته تبدیل می‌شود. پس از آن، شکل مود سازه نامیرای متناظر به دلیل اقناع شرایط مرزی نیرویی و هندسی به عنوان بهترین تابع قیاسی در بسط پاسخ آزمایشی معادله دیفرانسیل انتگرالی حرکت به‌کار می‌رود. به منظور متناهی شدن انتگرال مانده وزنی و برقراری شرط پیوستگی C_{m-1}، معادله حاکم به شکل ضعیف نوشته می‌شود. با معرفی ماتریس‌های سختی، جرم، جرم دورانی و میرایی خارجی نسبت به مختصات تعیم‌یافته که همان مجهولات پاسخ آزمایشی هستند و برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی، مقدارهای ویژه به‌صورت مختلط و حقیقی به‌دست می‌آیند که به‌ترتیب نشان‌دهنده مودهای الاستیک و مودهای غیرویسکوز در سیستم‌های پایدار هستند. برای تعیین بردارهای ویژه نیز ابتدا روش حذفی گوس و فضای پوچ ماتریس معرفی می‌شود. در ادامه، روش بسط سری نیومن برای سیستم‌های متاثر از اینرسی دورانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان، پاسخ تیر رایلی به‌صورت عددی با نتایج تحلیل تیر اویلر-برنولی مقایسه شده است که در تیرهای بسیار نازک هماهنگی خوبی دارد، اما با تغییر ضخامت و افزایش اثر اینرسی دورانی، اختلاف پاسخ‌ها نمایان می‌شود.

واژگان کلیدی: میرایی ویسکوالاستیک غیرمحلی، بسط سری نیومن، روش گالرکین، معادله دیفرانسیل انتگرالی، فضای پوچ ماتریس

۱-مقدمه

تعیین محدوده بهینه پوشش ویسکوالاستیک در یک سیستم، یکی از روش‌های کنترل مقدارهای ویژه در تیرها محسوب می شود. به‌دست آوردن یک پاسخ بهینه در مدل‌های میرایی محلی متداول، غیرممکن به نظر می‌رسد، از این‌رو بررسی مدل‌های میرایی غیرمحلی در سیستم‌های مرتعش رایج شده است[1]. در

[DOI: 10.22034/22.5.63]

مدل میرایی غیرمحلی، به جای استفاده از میراگرهای مجزا، از چند میراگر متصل به یکدیگر استفاده می‌شود. در چنین وضعیتی، اثر اندرکنش نقاط مجاور با در نظر گرفتن سرعت نسبی و یا میانگین وزنی میدان سرعت در حوزه مکان به شکل انتگرالی، در معادلات حرکت و یا شرایط مرزی وارد می شود[2 ,3]. تئوری غیرمحلی، بیشتر به عنوان مبانی علم کوانتوم شناخته می‌شود و در مدل‌سازی سازه‌های نانو و میکرو به‌کار می‌رود[4]. شاید استفاده از چنین مفاهیمی در بررسی سازه‌های بزرگ مقیاس کمی غیرملموس به نظر آید؛ اما در دو دهه اخیر، مدل‌سازی میرایی و بستر به صورت غیرمحلی در محیط‌های پیوسته متداول شده است [5]. ادهیکاری و همکاران[1] در سال ۲۰۰۵، برای تیر اویلر- برنولی مدل میرایی غیرمحلی و غیرویسکوزی پیشنهاد دادند که وابسته به تاریخچه زمانی سرعت در نقاط گوناگون محیط مورد بررسی بود [6]. میرایی ویسکوز، تنها مدل میرایی در حوزه تحلیل خطی نیست و هر مدل علّی که تابعی اتلاف انرژی را غیرمنفی سازد، یک گزینه محتمل در مدل‌سازی استهلاک سازه به‌حساب می‌آید. مدل‌های میرایی غیرویسکوز، در حالت کلی هماهنگی بهتری با نتایج آزمایشگاهی دارند [7]. مدل‌سازی میرایی در تیرها به صورت ویسکوالاستیک یا غیرویسکوز غیرمحلی در توصیف رفتار لایه میرای ویسکوالاستیک، اتصال چسب در سیستم‌های کامپوزیت و سازه روی بستر ویسکوالاستیک به کار می‌رود. فلوگ[2] در سال ۱۹۷۵، ادعا کرد که واکنش بستر در یک نقطه مشخص، وابسته به پاسخ نقاط مجاور با اثر کاهشی نسبت به فاصله است [8]. بر مبنای تئوری فلوگ، فریزول و همکاران[3] با استفاده از روش اجزای محدود و مفاهیم اولیه بستر یک پارامتری، معادله تیر اویلر-برنولی بر بستر ویسکوالاستیک را بازنگری کردند [9]. لی و همکاران[4]، در تعیین مقدارهای ویژه تیر اویلر-برنولی و صفحه کیرشهوف با شرایط مرزی ساده و مدل میرایی غیرمحلی، از روش تقریبی بهره گرفتند [10]. لوپز و سائز[5] با کمک تبدیل لاپلاس و روش گالرکین به بررسی تیر اویلر- برنولی با میرایی غیرمحلی ویسکوالاستیک از جنس مصالح آگزتیک[6] پرداختند [11]. فیودوروف و همکاران[7]، تاثیر میرایی داخلی غیرمحلی را بر مدل‌سازی سیستم‌های خطی و غیرخطی تحت اثر بارگذاری‌های تصادفی مطالعه کردند [12]. شپیتکو و سیدوروف[8] پاسخ‌های یک تیر اویلر-برنولی مرکب با میرایی داخلی غیرمحلی را تحت اثر بارگذاری گسترده دینامیکی تعیین کردند. نتایج نهایی نشان داد که با زیاد شدن ویژگیهای غیرمحلی در مصالح، دامنه تغییرمکان‌ها افزایش می-یابد [13]. ژائو و همکاران[9]، رفتار بلندمدت نوعی از تیر تعمیم یافته را با در نظر گرفتن میرایی ویسکوز غیرمحلی در معادله حرکت بررسی کردند [14]. شن و همکاران[10] به منظور بررسی ارتعاش سیستم‌های گسسته با میرایی غیرویسکوز، شکل ضعیف معادله را بر مبنای روش گالرکین ارائه کردند. این روش انتگرال‌گیری عمومی، برای تمامی توابع کرنل علّی بسط داده شده‌است و پاسخ تغییرمکانی را با کمک تابع درون‌یابی پایه لاگرانژ تخمین می‌زند و در مقایسه با سایر روش‌های عددی در تحلیل سیستم‌های بزرگ مقیاس با میرایی غیرویسکوز، بهینه‌تر ارزیابی شده است [15]. جی و همکاران[11] نیز، به منظور تعیین پاسخ‌های سازه‌ای سیستم میراگر غیرویسکوز تحت اثر طیف تحریک زلزله کانای-تاجیمی، روشی تحلیلی پیشنهاد دادند که زمان محاسباتی را به یک سوم زمان موردنیاز سایر روش‌های مشابه کاهش می‌دهد [16]. مطالعه منابع گوناگون نشان می‌دهد که بررسی میرایی ویسکوالاستیک غیرمحلی در معادلات حرکت، تنها محدود به میله، تیر اویلر- برنولی و صفحه کیرشهوف بوده و اثر اینرسی دورانی بر پاسخ سازه مورد توجه قرار نگرفته است. علاوه بر این، تعداد انگشت‌شماری از پژوهشگران بردارهای ویژه سیستم‌های پیوسته را به‌دست آورده‌اند و تنها به تعیین مقدارهای ویژه بسنده کردند. در مقاله

1. Adhikari et al.
2. Flügge
3. Friswell et al.
4. Lei et al.
5. Lopez & Saez
6. Auxetic materials
7. Fyodorov et al.
8. Shepitko & Sidorov
9. Zhao et al.
10. Shen et al.
11. Ge et al.

[DOI: 10.22034/22.5.63]

حاضر، ارتعاش آزاد تیر رایلی تحت اثر میرایی خارجی ویسکوالاستیک غیرمحلی با در نظر گرفتن توابع کرنل نمایی کاهشی و GHM[1] در تابع میرایی غیرویسکوز غیرمحلی به روش گالرکین بررسی می‌شود. با قرار دادن پاسخ آزمایشی در معادله دیفرانسیل انتگرالی و اعمال تبدیل لاپلاس، علاوه بر اقناع شرایط اولیه، محیط پیوسته به یک سیستم گسسته تبدیل می‌شود. مقدارهای ویژه تیر رایلی از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی به‌دست می‌آیند. سپس بردارهای ویژه با محاسبه فضای پوچ ماتریس از طریق روش گوس به صورت دقیق تعیین می‌شوند. در ادامه، روش بسط سری نیومن از مرجع [17] نیز بازنگری می‌شود و با اعمال تغییراتی در روابط و گام‌های الگوریتم، بردارهای ویژه سیستم‌های پیوسته متاثر از اینرسی دورانی با کمک آن به‌دست می‌آیند.

۲-معادلات حاکم، توابع کرنل، شرایط مرزی و اولیه

در مدل میرایی غیرمحلی به عنوان تعمیمی از میرایی ویسکوز، نیروی میرایی در هر نقطه از محیط پیوسته، وابسته به سرعت ذرات مجاور در یک محدوده مشخص خواهد بود. میرایی در سیستم‌های یک‌بعدی پیوسته به‌صورت رابطه (۱) ارائه می‌شود.

$$\mathcal{L}_1\dot{u}(r,t)=\int_{\mathcal{D}}\int_{-\infty}^{t} C_1(r,\xi,t-\tau)\dot{u}(\xi,\tau)\,d\tau\, d\xi \qquad (۱)$$

که در آن، $\mathcal{L}_1$، r، $\mathcal{D}$، t، $u(r,t)$ و $\dot{u}(r,t)$ به‌ترتیب اپراتور میرایی، بردار فضایی مکان، حوزه مورد مطالعه، زمان، متغیر تغییرمکان و سرعت بوده و $C_1(r,\xi,t-\tau)$ تابع کرنل میرایی خارجی است که باید نرخ اتلاف انرژی، $\mathcal{F}(t)$ را در رابطه (۲) غیرمنفی سازد [6].

$$\mathcal{F}(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\left\{\int_{\mathcal{D}}\int_{-\infty}^{t} C_1(r,\xi,t-\tau)\dot{u}(\xi,\tau)\,d\tau\, d\xi\right\}\dot{u}(r,t)\,dr \qquad (۲)$$

تابع کرنل میرایی مانند رابطه (۳)، نسبت به مکان و زمان جدایی‌پذیر فرض می‌شود.

$$C_1(r,\xi,t-\tau)=H(r)c(r-\xi)g(t-\tau) \qquad (۳)$$

در این رابطه $g(t-\tau)$ و $c(r-\xi)$ به ترتیب توابع کرنل زمان و مکان و $H(r)$، در حالت کلی تابعی است برای نشان دادن محدوده میرایی غیرمحلی که به صورت رابطه (۴)، معرفی می‌شود که در آن H_0 یک پارامتر ثابت است [11].

$$H(r)=\begin{cases} H_0 \ ; \ r\in\mathcal{D} \\ 0 \ ; \ \text{در سایر نقاط} \end{cases} \qquad (۴)$$

توابع کرنل زمان در مسائل ویسکوالاستیک با نامهای توابع ارثی یا آسایش[2] شناخته می‌شوند [10]. در حالت خاص، با انتخاب تابع کرنل میرایی به صورت رابطه (۵)، میرایی ویسکوز محلی به‌دست می‌آید که در آن δ تابع دلتای دیراک است.

$$C_1(r,\xi,t-\tau)=H(r)\delta(r-\xi)\delta(t-\tau) \qquad (۵)$$

مطابق رابطه (۶) کرنل مکان از نوع نمایی کاهشی و کرنل زمان از نوع نمایی کاهشی و GHM انتخاب می‌شود.

$$c(r-\xi)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|r-\xi|}$$
$$g(t-\tau)=\begin{cases} \mu e^{-\mu t} \ ; (\mu,t\geq 0) \\ \frac{1}{2}(\mu_i e^{-\mu_i t}) \ ; (\mu_i,t\geq 0) \\ i=1,2 \end{cases} \qquad (۶)$$

که در آن، α پارامتر مشخصه میرایی و μ و μ_i ثابت‌های آسایش را نشان می‌دهند. در حقیقت، α پارامتری است که فاصله موثر در مدل میرایی غیرمحلی را توصیف می‌کند. فاصله موثر α، اندازه و شدت ویژگی‌های غیرمحلی در مصالح را نشان می‌دهد و هر چه مقدار کمتری داشته باشد، رفتار غیرمحلی بارزتر است [18]. اثر اینرسی دورانی در تیر رایلی در نظر گرفته می‌شود و حرکت محوری نقاط واقع بر هر مقطعی همراه با حرکت دورانی خواهد بود[19]. در تیر رایلی با میرایی خارجی غیرویسکوز غیرمحلی معادله ارتعاش آزاد مطابق رابطه (۷) بیان می‌شود.

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\rho I\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2\partial x^2}+\int_{x_1}^{x_2}\int_{-\infty}^{\tau} C_e(x,\xi,t-\tau)\dot{w}(\xi,\tau)\,d\tau\, d\xi=0 \qquad (۷)$$

که در آن ρ جرم واحد حجم، A سطح مقطع تیر، E مدول الاستیسیته، I ممان اینرسی مقطع و w تغییرمکان عرضی است.

1 Golla & Hughes model

2 relaxation functions

[DOI: 10.22034/22.5.63]

در رابطه اخیر $\dot{w}(x,t)=\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$ و $x_1 \le x \le x_2$ مطابق شکل (۱) محدوده‌ای از تیر رایلی به طول L با میرایی غیرویسکوز غیرمحلی است.

شکل ۱. تیر رایلی با میرایی غیرویسکوز غیرمحلی

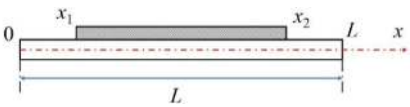

Fig. 1. Rayleigh beam with non-local damping patch

شرایط مرزی و اولیه موردنظر نیز در رابطه (۸) بیان شده است [20].

$$\begin{cases} w(x,0)=\dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=w(0,t)=0 \\ \dfrac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}=w(L,t)=0 \end{cases} \tag{۸}$$

۳-تعیین مقدارها و بردارهای ویژه

در مقاله حاضر، از روش گالرکین برای تحلیل تیر رایلی میرا استفاده می‌شود. در این روش، حل مساله مقدار ویژه، مانند رابطه (۹)، به صورت مجموعه‌ای از n تابع قیاسی فرض می‌شود که باید تمام شرایط مرزی را اقناع کند.

$$\bar{\phi}^n(x)=\sum_{i=1}^{n} q_i \phi_i(x) \tag{۹}$$

که در آن $\phi_i(x)$ توابع قیاسی و q_i ضرایب مجهول هستند [19]. شکل مود سازه نامیرای یکی از بهترین توابع قیاسی موجود برای حل مساله حاضر به روش گالرکین است. پیش از قرار دادن پاسخ آزمایشی در معادله ارتعاش، باید بر معادله (۷) تبدیل لاپلاس اعمال کرد که نتیجه آن در رابطه (۱۰)، ارائه شده است.

$$EI\frac{d^4 w(x,s)}{dx^4}+s^2\rho A w(x,s) - \rho I s^2 \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} + sG(s)H_0\int_{x_1}^{x_2} c(x-\xi) w(\xi,s)\,d\xi=0 \tag{۱۰}$$

در این رابطه، s متغیر لاپلاس و $G(s)=\int_0^{\infty} g(t)\,e^{-st}dt$ تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ به صورت رابطه (۱۱) است.

$$G(s)=\begin{cases} \dfrac{\mu}{\mu+s} & \text{نمایی} \\ \dfrac{\mu_1\mu_2+{(\mu_1+\mu_2)s}/{2}}{\mu_1\mu_2+(\mu_1+\mu_2)s+s^2} & GHM \end{cases} \tag{۱۱}$$

راه‌حل آزمایشی به صورت رابطه (۱۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$w_{trial}(x,s)=\sum_{j=1}^{n} q_j(s)\phi_j(x) \tag{۱۲}$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۲) در معاله (۱۰)، مانده R به‌دست می‌آید. در روش گالرکین، مبنای انتخاب ضرایب مجهول تابع آزمایشی، کوچک شدن مقدار مانده R است. به بیان دقیق‌تر، باید انتگرال حاصل‌ضرب مانده در توابع قیاسی را مطابق رابطه (۱۳)، برابر با صفر قرار داد.

$$\begin{aligned} \int_0^L R\,\phi_k(x)dx &= EI\sum_{j=1}^{n} q_j(s)\int_0^L \frac{d^4\phi_j(x)}{dx^4}\phi_k(x)dx \\ &+ s^2\rho A\sum_{j=1}^{n} q_j(s)\int_0^L \phi_j(x)\phi_k(x)dx \\ &- s^2\rho I\sum_{j=1}^{n} q_j(s)\int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\phi_k(x)dx \\ &+ sG(s)H_0\sum_{j=1}^{n} q_j(s)\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} c(x-\xi)\phi_j(\xi)\phi_k(x)\,d\xi dx=0 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

بنابراین المان‌های ماتریس‌های سختی، میرایی، جرم و جرم دورانی به صورت رابطه (۱۴) معرفی می‌شوند.

$$\begin{aligned} K_{kj} &= EI\int_0^L \frac{d^4\phi_j(x)}{dx^4}\phi_k(x)dx \\ C_{kj} &= H_0\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} c(x-\xi)\phi_j(\xi)\phi_k(x)\,d\xi dx \\ M_{kj} &= \rho A\int_0^L \phi_j(x)\phi_k(x)dx \end{aligned} \tag{۱۴}$$

[DOI: 10.22034/22.5.63]

$$M_{\theta_{kj}} = -\rho I \int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\phi_k(x)dx$$

انتخاب توابع وزنی باید به گونه‌ای باشد که انتگرال مانده وزنی متناهی شود [21]. بدین منظور، بنا بر رابطه (۱۴)، شکل ضعیف انتگرال ماتریس سختی به‌صورت رابطه (۱۵) ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} K_{kj} &= EI\left(-\int_0^L \frac{d^3\phi_j(x)}{dx^3}\frac{d\phi_k(x)}{dx}dx + \left[\frac{d^3\phi_j(x)}{dx^3}\phi_k(x)\right]\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix}\right) \\ &= EI\left(-(-\int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\frac{d^2\phi_k(x)}{dx^2}dx + \left[\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right]\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix}) + \left[\frac{d^3\phi_j(x)}{dx^3}\phi_k(x)\right]\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix}\right) \\ &= EI\int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\frac{d^2\phi_k(x)}{dx^2}dx + \grave{K}_{kj} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

مقدار $\grave{K}_{kj}$ که در رابطه (۱۶) ارائه شده‌است، با توجه به شرایط مرزی حاکم به دست می‌آید.

$$\grave{K}_{kj} = EI\left[\frac{d^3\phi_j(x)}{dx^3}\phi_k(x) - \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\frac{d\phi_k(x)}{dx}\right]\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix} \quad (۱۶)$$

با توجه به رابطه‌های (۸ و ۱۲) مقدار $\grave{K}_{kj}$ برای تیر دو سر مفصل مانند رابطه (۱۷) تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} \phi_k(0) = \phi_k(L) = 0 \\ \phi_j(0) = \phi_j(L) = 0 \\ \dfrac{d^2\phi_k(0)}{dx^2} = \dfrac{d^2\phi_k(L)}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^2\phi_j(0)}{dx^2} = \dfrac{d^2\phi_j(L)}{dx^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \grave{K}_{kj} = 0 \quad (۱۷)$$

بنابراین در نهایت درایه‌های ماتریس سختی از انتگرال رابطه (۱۸)، به دست می‌آیند.

$$K_{kj} = EI\int_0^L \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\frac{d^2\phi_k(x)}{dx^2}dx \quad (۱۸)$$

شکل ضعیف ماتریس $M_{\theta_{kj}}$ نیز مانند رابطه (۱۹)، بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{\theta_{kj}} &= -\rho I\left\{-\int_0^L \frac{d\phi_j(x)}{dx}\frac{d\phi_k(x)}{dx}dx + \left[\frac{d\phi_j(x)}{dx}\phi_k(x)\right]\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix}\right\} \\ &= \rho I\int_0^L \frac{d\phi_j(x)}{dx}\frac{d\phi_k(x)}{dx}dx \end{aligned} \quad (۱۹)$$

بنابراین معادله (۱۳)، با توجه به معرفی ماتریس‌های سختی، جرم، جرم دورانی و میرایی مانند رابطه (۲۰)، بیان می‌شود.

$$(s^2\{[M] + [M_\theta]\} + sG(s)[C] + [K])\{q\} = 0 \;\rightarrow D(s_j)q_j = 0\,; j = 1, 2, \ldots \quad (۲۰)$$

که در آن، $[M]$، $[M_\theta]$، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، جرم دورانی، میرایی و سختی نسبت به مختصات تعمیم‌یافته $\{q\}$ است. $D(s_j)$ نیز ماتریس سختی دینامیکی نامیده می‌شود. در رابطه اخیر اگر مقدار ثابت آسایش به سمت بی‌نهایت میل کند، معادله حاکم بر سیستم میرای ویسکوز نتیجه می‌شود. پاسخ ارتعاش آزاد تیر به صورت رابطه (۲۱) به دست می‌آید. در آن $\acute{a}$ ضریب ثابت و ω_l فرکانس نوسان است [19].

$$\psi_l(x)Q_l(t) = \acute{a}\sin\frac{l\pi x}{L}\cos\omega_l t \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \quad (۲۱)$$

پاسخ آزمایشی در حل مساله تیر رایلی با استفاده از تابع قیاسی $\acute{a}\sin\frac{l\pi x}{L}$ مطابق رابطه (۲۲) بیان می‌شود. ضریب $\acute{a}$ برای نرمال‌سازی مودها نسبت به ماتریس جرم برابر $\sqrt{2/\rho AL}$ انتخاب می‌شود [22].

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= \sqrt{2/\rho AL}\,\sin\frac{k\pi x}{L} \;\; ; k = 1, \ldots, n \\ \phi_j(x) &= \sqrt{2/\rho AL}\,\sin\frac{j\pi x}{L} \;\; ; j = 1, \ldots, n \\ w_{trial}(x,s) &= \sum_{j=1}^{n} q_j(s)\sqrt{2/\rho AL}\,\sin\frac{j\pi x}{L} \end{aligned} \quad (۲۲)$$

با توجه به رابطه‌های (۱۴، ۱۸، ۱۹ و ۲۲)، درایه‌های ماتریس‌های سختی، میرایی، جرم و جرم دورانی به صورت رابطه (۲۳)، ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K_{kj}} = \frac{\boldsymbol{2(jk)^2\pi^4 EI}}{\boldsymbol{\rho AL^5}}\int_0^L \boldsymbol{sin\frac{j\pi x}{L} sin\frac{k\pi x}{L} dx}\\
&C_{kj} = \frac{\alpha H_0}{\rho AL}\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{x_1}^{x} e^{-\alpha(x-\xi)} sin\frac{j\pi\xi}{L} sin\frac{k\pi x}{L} d\xi + \int_{x}^{x_2} e^{\alpha(x-\xi)} sin\frac{j\pi\xi}{L} sin\frac{k\pi x}{L} d\xi\right] dx\\
&M_{kj} = \frac{2}{L}\int_0^L sin\frac{k\pi x}{L} sin\frac{j\pi x}{L} dx\\
&M_{\theta_{kj}} = -\frac{2I\pi^2(kj)}{AL^3}\int_0^L cos\frac{k\pi x}{L} cos\frac{j\pi x}{L} dx
\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

مقدارهای ویژه تیر رایلی میرا برابر با ریشه‌های معادله مشخصه (۲۴) است.

$$\boldsymbol{det(s^2\{[M]+[M_\theta]\} + sG(s)[C] + [K]) = 0} \qquad (۲۴)$$

مرتبه معادله مشخصه ($m = 2n + p\,; p \geq 0$) از دو برابر تعداد جملات پاسخ آزمایشی ($2n$) بیشتر است. از میان m ریشه معادله مشخصه، $2n$ مقدار ویژه به صورت زوج مختلط مزدوج و p مقدار ویژه به‌صورت اعداد حقیقی به‌دست می‌آیند. n بردار ویژه متناظر با مقدارهای ویژه مختلط، مود الاستیک نامیده می‌شوند. بردارهای ویژه متناظر با مقدارهای ویژه حقیقی از اثر غیرویسکوز سازوکار میرایی ناشی می‌شوند [7]. ریشه‌های معادله (۲۴) مانند رابطه (۲۵) مرتب شوند.

$$\boldsymbol{s_1, s_2, \dots, s_n, s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*, s_{2n+1}, \dots, s_m} \qquad (۲۵)$$

با قرار دادن هر یک از مقدارهای ویژه رابطه (۲۵) در رابطه (۲۰) و تعیین فضای پوچ ماتریس $D(s_j)$ با کمک روش حذفی گوس، ضرایب مجهول به‌دست می‌آیند [23].

۴-روش بسط سری نیومن برای تعیین بردارهای ویژه

برای تعیین مقدارهای ویژه به روش بسط سری نیومن، باید مجموعه کاملی از بردارهای ویژه نامیرا، $x_l\,; \forall l = 1, \dots, N$، تعیین شود. در این‌صورت می‌توان بردار ضرایب مجهول را به‌ازای هر مقدار ویژه s_j، به‌صورت رابطه (۲۶) بسط داد.

$$\boldsymbol{q_j = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l^{(j)} x_l} \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۶) در معادله (۲۰) و پیش‌ضرب طرفین تساوی در x_k^T، رابطه (۲۷) به‌دست می‌آید، که در آن $\tilde{C}$ برابر $G(s)[C]$ است.

$$\boldsymbol{\sum_{l=1}^{N} s_j^2 \alpha_l^{(j)} x_k^T[M]x_l + s_j^2\alpha_l^{(j)} x_k^T[M_\theta]x_l + s_j\alpha_l^{(j)} x_k^T\tilde{C}x_l + \alpha_l^{(j)} x_k^T[K]x_l = 0} \qquad (۲۷)$$

با توجه رابطه اخیر، شرط تعامد بردارهای ویژه نامیرا برای یادآوری در رابطه (۲۸)، ارائه می‌شود. از آن‌جا که ماتریس $[M_\theta]$ نیز، قطری است، پس از پیش‌ضرب آن در x_k^T عبارتی هم برای جایگزینی درایه‌های قطری معادل آن در نظر گرفته می‌شود.

$$\boldsymbol{\begin{cases} x_k^T[K]x_l = \omega_k^2\delta_{kl}\\ x_k^T[M_\theta]x_l = \delta_{kl}\\ x_k^T[M_\theta]x_l = \eta_k\delta_{kl}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_l^{(j)}\omega_k^2\delta_{kl} = \omega_k^2\alpha_k^{(j)}\\ \alpha_l^{(j)}\delta_{kl} = \alpha_k^{(j)}\\ \alpha_l^{(j)}\eta_k\delta_{kl} = \eta_k\alpha_k^{(j)}\end{cases}} \qquad (۲۸)$$

که در آن δ_{kl} تابع دلتای کرونکر و ω_k فرکانس طبیعی نوسان سازه نامیرا است. به منظور نرمال‌سازی بردار ضرایب مجهول می‌توان فرض کرد که $\alpha_j^{(j)}$ برابر ۱ باشد. در این‌صورت با درنظر داشتن $C'_{kl} = x_k^T\tilde{C}x_l$، معادله jام این مجموعه با حذف پاسخ بدیهی (به‌ازای $k = j$) مانند رابطه (۲۹) بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{(1+\eta_k)\alpha_k^{(j)} s_j^2 + s_j\left\{C'_{kj}(s_j) + \alpha_k^{(j)} C'_{kk}(s_j) + \sum_{l\neq k\neq j}^{N}\alpha_l^{(j)} C'_{kl}(s_j)\right\} + \omega_k^2\alpha_k^{(j)} = 0\,; k = 1,2,3,\dots,N \neq j} \qquad (۲۹)$$

معادله اخیر به‌شکل رابطه (۳۰)، بازنویسی می‌شود:

$$\boldsymbol{\frac{(1+\eta_k)s_j^2 + \omega_k^2 + C'_{kk}(s_j)s_j}{-s_j}\alpha_k^{(j)} -} \qquad (۳۰)$$

[DOI: 10.22034/22.5.63]

$\sum_{l\neq k\neq j}^{N} \alpha_l^{(j)} C'_{kl}(s_j) = C'_{kj}(s_j)\ ; k = 1,\dots,N \neq j$

در این‌صورت، شکل ماتریسی معادله (۳۰) مطابق رابطه (۳۱)، ارائه می‌شود.

$$[P^{(j)} - Q^{(j)}]_{(N-1)(N-1)}\hat{\alpha}^{(j)}_{(N-1)} = c_u^{(j)}{}_{(N-1)} \tag{۳۱}$$

که ماتریس‌ها و بردارهای رابطه اخیر در رابطه‌های (۳۲ تا ۳۴) ارائه شده است (در ماتریس‌ها سطر و ستون jام و در بردارها عبارت jام حذف می‌شوند).

$$P^{(j)} = diag[\frac{(1+\eta_1)s_j^2+\omega_1^2+C'_{11}(s_j)s_j}{-s_j},\dots] \tag{۳۲}$$

$$Q^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & C'_{12}(s_j) & \dots & C'_{1N}(s_j) \\ C'_{21}(s_j) & 0 & \vdots & C'_{2N}(s_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C'_{N1}(s_j) & C'_{N2}(s_j) & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$c_u^{(j)} = \left\{C'_{1j}(s_j),\dots,C'_{Nj}(s_j)\right\}^T \qquad \hat{\alpha}^{(j)} = \left\{\hat{\alpha}_1^{(j)},\hat{\alpha}_2^{(j)},\dots,\hat{\alpha}_N^{(j)}\right\}^T \tag{۳۴}$$

برای تعیین بردار $\hat{\alpha}^{(j)}$ ابتدا ${P^{(j)}}^{-1}$ در طرفین رابطه (۳۱) پیش‌ضرب و سپاس ماتریس موردنظر مانند رابطه (۳۵) معکوس می‌شود.

$$\hat{\alpha}^{(j)} = [I_{(N-1)} - {P^{(j)}}^{-1}Q^{(j)}]^{-1}[{P^{(j)}}^{-1}c_u^{(j)}] \tag{۳۵}$$

رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\hat{\alpha}^{(j)} = [I_{(N-1)} - R_u^{(j)}]^{-1}a_0^{(j)} \qquad a_0^{(j)} = {P^{(j)}}^{-1}c_u^{(j)} \qquad R_u^{(j)} = {P^{(j)}}^{-1}Q^{(j)} \tag{۳۶}$$

بسط سری نیومن برای معکوس ماتریسی به شکل $k_0 + \Delta k_0$ مطابق رابطه (۳۷)، ارائه می‌شود [24].

$$[k_0+\Delta k_0]^{-1} = k_0^{-1} - k_0^{-1}\Delta k_0 k_0^{-1} + (k_0^{-1}\Delta k_0)^2 k_0^{-1} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty}(k_0^{-1}\Delta k_0)^m k_0^{-1} \tag{۳۷}$$

بنابراین با انتخاب $k_0 = I_{(N-1)}$ و $\Delta k_0 = -R_u^{(j)}$ رابطه (۳۶) به صورت رابطه (۳۸) خواهد بود.

$$\hat{\alpha}^{(j)} = \left[{R_u^{(j)}}^0 + {R_u^{(j)}}^1 + {R_u^{(j)}}^2 + \cdots\right]a_0^{(j)} = \left[I_{(N-1)} + {R_u^{(j)}}^1 + {R_u^{(j)}}^2 + \cdots\right]a_0^{(j)} \tag{۳۸}$$

برای تعیین ماتریس ${P^{(j)}}^{-1}$، کافی‌است عناصر قطر اصلی ماتریس $P^{(j)}$ مطابق رابطه (۳۹)، به‌دست آید.

$${P^{(j)}}^{-1} = diag[\frac{-s_j}{(1+\eta_1)s_j^2+\omega_1^2+C'_{11}(s_j)s_j},\dots] \tag{۳۹}$$

بنابراین ماتریس $R_u^{(j)}$ و بردار $a_0^{(j)}$ همانند رابطه (۴۰)، به‌دست می‌آیند.

$$a_{0_l}^{(j)} = \frac{-s_j C'_{lj}(s_j)}{(1+\eta_l)s_j^2+\omega_l^2+C'_{ll}(s_j)s_j}; l\neq j \qquad R_{u_{kl}}^{(j)} = \frac{-s_j C'_{kl}(s_j)(1-\delta_{kl})}{(1+\eta_k)s_j^2+\omega_k^2+C'_{kk}(s_j)s_j}\quad l\neq k\neq j \tag{۴۰}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۳۸ و ۴۰)، می‌توان $\hat{\alpha}^{(j)}$ را به صورت رابطه (۴۱)، به‌دست آورد.

$$\hat{\alpha}^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} {R_u^{(j)}}^m a_0^{(j)} \tag{۴۱}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۶) و با دانستن $\alpha_k^{(j)}$ می‌توان بردار ضرایب مجهول را به صورت رابطه (۴۲) به‌دست آورد.

$$q_j = \alpha_l^{(j)}x_l + \sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{N}\alpha_l^{(j)}x_l \tag{۴۲}$$

با توجه به رابطه‌های (۲۲ و ۴۲)، می‌توان شکل مود سیستم‌های پیوسته را ترسیم کرد. اما پیش از آن باید شرط همگرایی سری مطابق رابطه (۴۳) مورد بررسی قرار گیرد.

$$\left|R_u^{(j)}\right| < 1 \rightarrow \sum_{\substack{l=1\\l\neq k\neq j}}^{N}\left|C'_{kl}(s_j)\right| < \left|C'_{kk}(s_j)\right| \quad k\neq j \tag{۴۳}$$

۵-نتایج عددی و درستی آزمایی

به منظور ارائه نتایج عددی، ویژگی‌های تیر رایلی همگن و ایزتروپ به صورت جدول (۱) در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱. مشخصات تیر رایلی

$\rho(kg/m^3)$	$E(GPa)$	$L(m)$	$b(m)$	$h(m)$	H_0
2700	70	2	0.005	0.005	2
α	μ	$x_1(m)$	$x_2(m)$	μ_1	μ_2
5	20	0.5	1.5	1	3

Table. 1. Characteristics of Rayleigh beam

[DOI: 10.22034/22.5.63]

برای تعیین تعداد جملات مناسب راه‌حل آزمایشی طبق رابطه (۱۲)، ابتدا کرنل زمان و مکان به‌صورت تابع نمایی کاهشی فرض می‌شود. سپس اولین مقدار ویژه تیر رایلی به‌ازای راه‌حل آزمایشی با ۶ تا ۹ جمله به‌دست می‌آید و با پاسخ ۵ جمله‌ای مقایسه می‌شود. اختلاف نرمال‌شده آن‌ها در شکل (۲) ارائه شده‌است. در این نمودار مقدارμ در محدوده [۱۰-۱] تغییر می‌کند. پاسخ‌های به‌دست آمده از سری با ۵ و ۶ جمله منطبق بر یکدیگرند.

شکل ۲. تغییرات مقدار ویژه اول

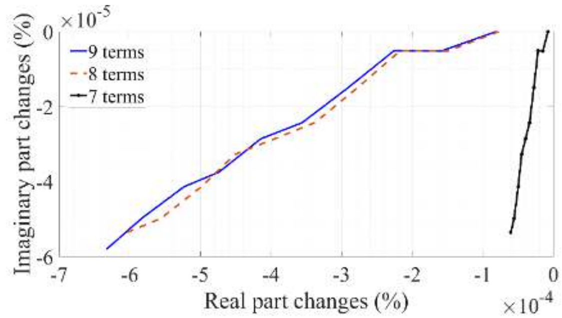

Fig. 2. The root locus of first eigenvalue normalized changes based on variation of trial solution as μ increases

در شکل (۲) بهبود دقت نتایج با افزایش تعداد جملات راه‌حل آزمایشی مشهود است اما باید به مساله هزینه محاسباتی هم توجه نمود. مدت زمان اجرای برنامه برای تعیین پاسخ تیر با فرض راه‌حل آزمایشی با بیش از ۷ جمله تا ۸ برابر افزایش می‌یابد (مدت زمان اجرای برنامه برای راه حل آزمایشی با ۹ جمله نسبت به راه حل آزمایشی با ۷ جمله از ۵۱۶٫۵۰ ثانیه به ۴۱۳۳٫۱۵ ثانیه می‌رسد) و در برابر افزایش دقت بسیار ناچیزی که در پاسخ‌ها ایجاد می‌شود، صرفه اقتصادی ندارد. بنابراین نتایج با در نظر گرفتن ۷ جمله در راه‌حل آزمایشی تعیین می‌شوند. در این مرحله، با توجه به مشخصات جدول (۱)، مقدارهای ویژه برای تیر رایلی و تیر اویلر برنولی با کرنل زمان و مکان نمایی کاهشی در جدول (۲) ارائه و به منظور درستی آزمایی با پاسخ‌های تیر اویلر- برنولی در مرجع [10] قیاس می‌شوند که هماهنگی بسیار خوبی نشان می‌دهد. در مرجع [10]، اینرسی دورانی در مدل‌سازی تیرها مورد توجه نبوده‌است، اما در مقاله حاضر به‌دلیل اهمیت آن بر پاسخ نهایی، مورد بررسی قرار گرفته‌است.

جدول ۲. مقدارهای ویژه تیر رایلی و اویلر- برنولی و مقایسه با مرجع [10]

	تیر رایلی	تیر اویلر برنولی	مرجع [10]
مقادیر ویژه الاستیک	$-4.731616 \pm 24.564342\,i$	$-4.731621 \pm 24.564417\,i$	$\mathbf{-4.7317 \pm 24.564\,i}$
	$-0.260099 \pm 73.497287\,i$	$-0.260100 \pm 73.498044\,i$	$\mathbf{-0.2601 \pm 73.498\,i}$
	$-0.045816 \pm 163.57117\,i$	$-0.045816 \pm 163.57495\,i$	$\mathbf{-0.04581 \pm 163.57\,i}$
	$-0.016914 \pm 290.37244\,i$	$-0.016914 \pm 290.38438\,i$	$\mathbf{-0.01691 \pm 290.38\,i}$
	$-0.005028 \pm 453.42722\,i$	$-0.005028 \pm 453.45636\,i$	$\mathbf{-0.00502 \pm 453.46\,i}$
	$-0.001390 \pm 652.79797\,i$	$-0.001390 \pm 652.85837\,i$	---
	$-0.000670 \pm 888.46888\,i$	$-0.000670 \pm 888.58077\,i$	---
مقادیر ویژه غیرویسکوز	-10.479443	-10.479435	---
	-19.449104	-19.449104	---
	-19.955332	-19.955332	---
	-19.994127	-19.994127	---
	-19.998965	-19.998965	---
	-19.999958	-19.999958	---
	-19.999995	-19.999995	---

Table. 2. Eigenvalues of Rayleigh and Euler Bernoulli beams and their verification compared to reference [10]

در جدول (۲)، مقدار ویژه الاستیک تیر اویلر برنولی بر پاسخ‌های مرجع [10] منطبق است و پاسخ‌های ارتعاش تیر رایلی با ضخامت کم، اختلاف ناچیزی با تیر اویلر برنولی دارد. در شکل‌های (۳) تا (۵)، مقدارهای ویژه اول تا سوم تیر رایلی با تغییرات ضخامت مقطع از ۰٫۰۰۵ تا ۰٫۰۸ متر ترسیم شده‌است.

شکل ۳. مقدار ویژه اول با توجه به تغییرات ضخامت

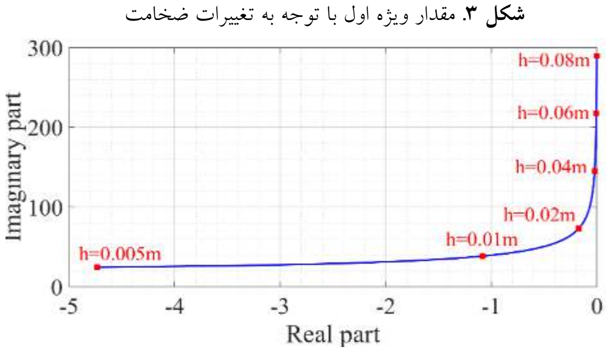

Fig. 3. The root locus of first eigenvalue as h increases

شکل ۴. مقدار ویژه دوم با توجه به تغییرات ضخامت

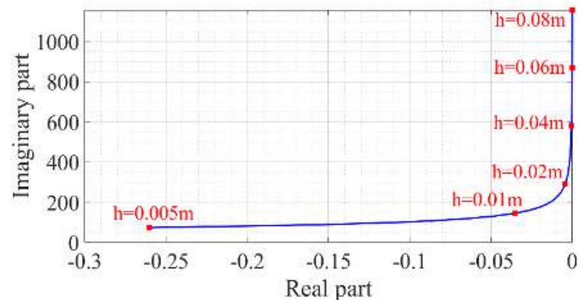

Fig. 4. The root locus of second eigenvalue as h increases

شکل ۵. مقدار ویژه سوم با توجه به تغییرات ضخامت

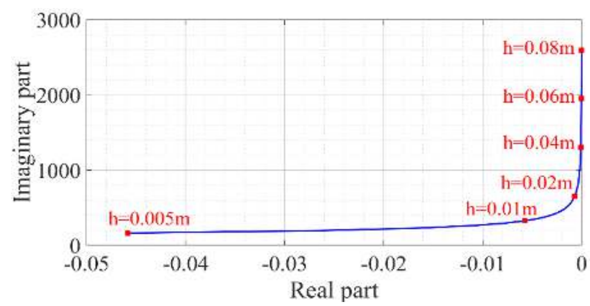

Fig. 5. The root locus of third eigenvalue as h increases

از این نمودارها می‌توان دریافت که با افزایش ضخامت مقطع، بخش موهومی مقدارهای ویژه و به تبع آن فرکانس طبیعی نوسان تیر میرا افزایش می‌یابد(در مود اول بخش موهومی مقدار ویژه ۱۱٫۸۰ برابر و فرکانس طبیعی نوسان ۱۱٫۶۱ برابر می‌شود). در شکل‌های (۶ تا ۸)، اختلاف نرمال‌شده مقدارهای ویژه اول تا سوم تیر اویلر برنولی و رایلی بر حسب درصد ارائه شده‌است.

شکل ۶. اختلاف نرمال‌شده مقدار ویژه اول تیر اویلر برنولی و رایلی بر حسب درصد

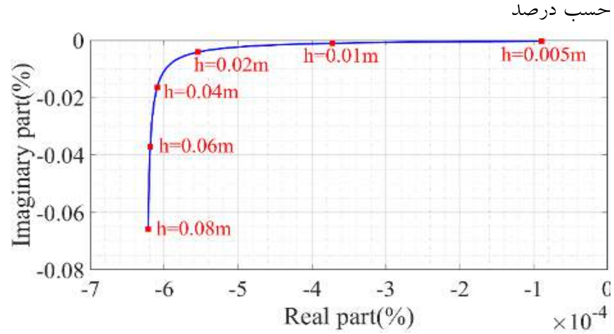

Fig. 6. The root locus of first eigenvalue normalized difference as h increases

از این نمودارها می‌توان نتیجه گرفت که در ابتدا افزایش اختلاف بخش حقیقی مقدار ویژه در دو تیر مشهود است اما با ازدیاد ضخامت مقطع تیرها، اختلاف بخش موهومی مقدارهای ویژه تغییر چشم‌گیری دارد و افزایش اختلاف بخش حقیقی به‌کندی ادامه می‌یابد. جدول (۳) نیز این تغییرات را برای مقدارهای ویژه چهارم تا هفتم نشان می‌دهد. از نتایج این نمودارها و جدول می‌توان نتیجه گرفت که مودهای بالاتر نسبت به افزایش ضخامت حساس‌تر هستند، به شکلی که در ضخامت ۰٫۰۸ میلی‌متر، اختلاف نرمال‌شده بخش موهومی اولین مقدار ویژه تنها ۰٫۰۶۵۷ درصد است، اما این مقدار در مود هفتم به ۳٫۰۷۶۰۸ درصد می‌رسد. در مرجع [10] به تغییرات ضخامت که باعث افزایش تاثیر اینرسی دورانی در پاسخ تیر می‌شود توجه نشده‌است.

شکل ۷. اختلاف نرمال‌شده مقدار ویژه دوم تیر اویلر برنولی و رایلی بر حسب درصد

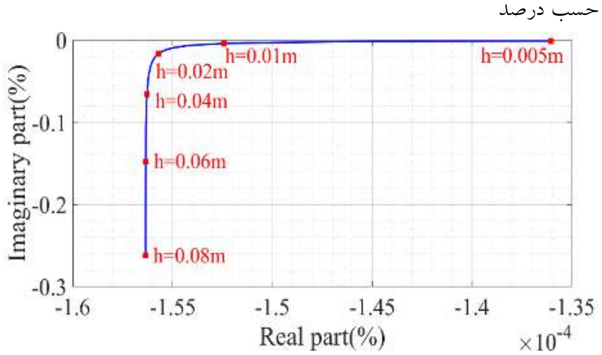

Fig. 7. The root locus of second eigenvalue normalized difference as h increases

شکل ۸. اختلاف نرمال‌شده مقدار ویژه سوم تیر اویلر برنولی و رایلی بر حسب درصد

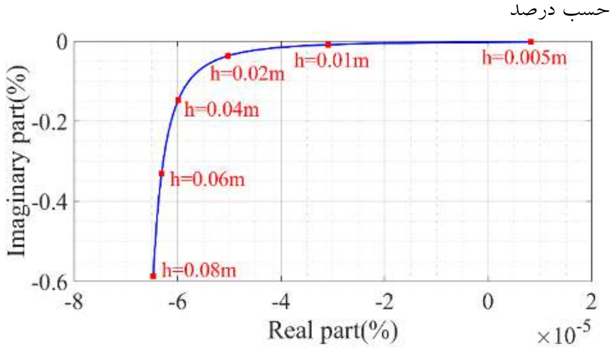

Fig. 8. The root locus of second eigenvalue normalized difference as h increases

[DOI: 10.22034/22.5.63]

جدول ۳. اختلاف نرمال‌شده مقدارهای ویژه چهارم تا هفتم تیر اویلر برنولی و رایلی بر حسب درصد در برابر تغییر ضخامت مقطع

	$h(m)$	0.005	0.01	0.04	0.08
بخش حقیقی	4	-1.65E-05	-2.78E-05	-3.62E-05	-3.76E-05
	5	-2.13E-05	-2.31E-05	-2.45E-05	-2.47E-05
	6	-1.42E-05	-1.58E-05	-1.69E-05	-1.71E-05
	7	-6.37E-06	-9.56E-06	-1.19E-05	-1.23E-05
بخش موهومی	4	-0.004112	-0.016445	-0.262154	-1.036419
	5	-0.006424	-0.025692	-0.408714	-1.605428
	6	-0.009251	-0.036990	-0.586967	-2.287734
	7	-0.012591	-0.050338	-0.796401	-3.076082

Table. 3. Normalized differences of eigenvalues as thickness varies

در شکل (۹) مقدار ویژه اول تیر رایلی در برابر افزایش ثابت آسایش μ نمایش داده شده‌است. مقدار μ در این نمودار در محدوده ۱ تا ۲۰۰ تغییر می‌کند. با میل کردن ثابت آسایش به سمت بی‌نهایت، رفتار استهلاکی سیستم به میرایی ویسکوز نزدیک‌تر می‌شود. مقدارهای ویژه تیر رایلی در بی‌نهایت نیز در جدول (۴) ارائه شده‌است. در این جدول، اثری از ۷ مود غیرویسکوز مشاهده نمی‌شود.

شکل ۹. مقدار ویژه اول تیر رایلی در برابر افزایش μ

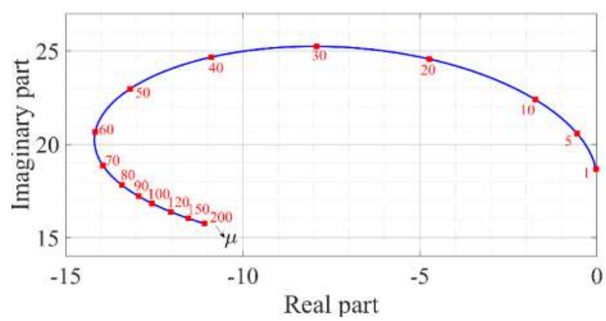

Fig. 9. The root locus of first eigenvalue as μ increases

جدول ۴. مقدارهای ویژه تیر رایلی در $\mu \to \infty$

$-9.960097 - 15.184037\,i$
$-3.779742 - 72.457856\,i$
$-3.026195 - 162.946148\,i$
$-3.568188 - 290.018385\,i$
$-2.589078 - 453.297009\,i$
$-1.482627 - 652.745217\,i$
$-1.323196 - 888.428539\,i$

Table. 4. Eigenvalues of Rayleigh beam as μ tends to infinity

پاسخ سازه در برابر بارهای دینامیکی تا حد زیادی وابسته به چند فرکانس طبیعی پایین‌تر سیستم مرتعش است. زمانی که فرکانس بار دینامیکی نزدیک به یکی از فرکانس‌های طبیعی باشد، پدیده تشدید رخ می‌دهد. با جابه‌جایی میراکننده‌ها می‌توان تغییراتی در فرکانس‌های طبیعی ایجاد کرد. در شکل (۱۰) نمونه‌ای از این نمودارها ارائه شده‌است که در آن فرکانس طبیعی مودهای اول و دوم با توجه به طول لایه میراکننده $(x_2 - x_1)$ تغییر می‌کند. دو تیپ نمودار در نظر گرفته شده است، در تیپ ۱، طول لایه میراکننده متقارن کاهش می‌یابد، یعنی $(x_1(m), x_2(m))$ از (۰،۲) تا (۰،۹۵،۱،۰۵) متغیر است. در تیپ ۲، یک سر لایه میراکننده ثابت است و طول آن از انتهای سمت چپ کاهش پیدا می‌کند، به طوری که از (۰،۲) به (۱،۹،۲) می‌رسد.

شکل ۱۰. تغییرات فرکانس طبیعی نوسان در برابر جابه‌جایی لایه میراکننده

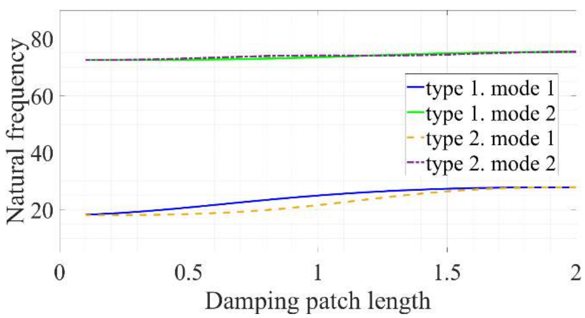

Fig. 10. Natural frequency variation as damping patch length declines

از شکل اخیر می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات فرکانس طبیعی نوسان مود اول در برابر جابه‌جایی لایه میراکننده در تیپ ۱ برابر با ۳۴،۵۱ درصد و در تیپ ۲، برابر با ۳۳،۶۴ درصد است. در شکل (۱۱)، اثر افزایش ضریب H_0 بر مقدار ویژه اول مشاهده می‌شود. مقدار H_0 از ۰ تا ۱۰ تغییر می‌کند، مشخصا در $H_0 = 0$ میرایی در تیر رایلی برابر صفر است. در مدل‌سازی تیر اویلر برنولی و رایلی هرچه ضریب α بزرگ‌تر باشد، رفتار محلی نمود بیشتری پیدا می‌کند. در جدول (۵)، مقدار ویژه اول تیر رایلی با در نظر گرفتن کرنل زمان نمایی کاهشی و GHM در برابر تغییر ضریب α ارائه شده‌است. در شکل‌های (۱۲ تا ۱۵)، بخش‌های حقیقی و موهومی شکل مودهای اول و سوم تیر رایلی برای نمونه به روش حذفی گوس ارائه شده‌است.

[DOI: 10.22034/22.5.63]

شکل ۱۱. مقدار ویژه اول در برابر تغییر در ضریب H_0

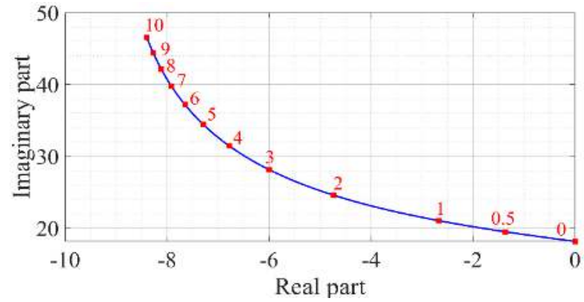

Fig. 11. The root locus of first eigenvalue as H_0 increases

جدول ۵. مقدار ویژه اول تیر رایلی در برابر تغییرات α

α	GHM	نمایی کاهشی
۲	-0.09567 $\pm 18.872537\, i$	$\mathbf{-3.607633}$ $\mathbf{\pm 22.403071\, i}$
۲۰	-0.1528 $\pm 19.358988\, i$	$\mathbf{-5.256133}$ $\mathbf{\pm 25.846683\, i}$
۱۰۰	-0.156951 $\pm 19.395758\, i$	$\mathbf{-5.355163}$ $\mathbf{\pm 26.10967\, i}$
۲۰۰	-0.157401 $\pm 19.399754\, i$	$\mathbf{-5.365851}$ $\mathbf{\pm 26.138278\, i}$

Table. 5. Variation of first eigenvalue as α increases

شکل ۱۲. بخش حقیقی شکل مود اول

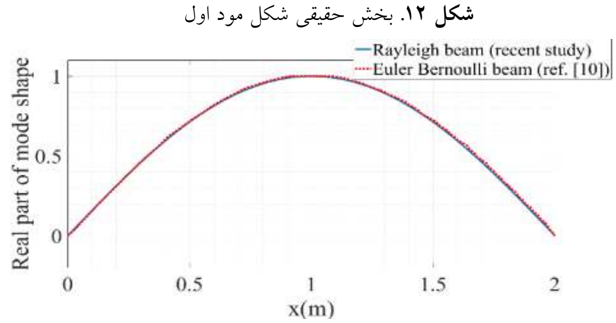

Fig. 12. Real part of the first mode shape

شکل ۱۳. بخش موهومی شکل مود اول

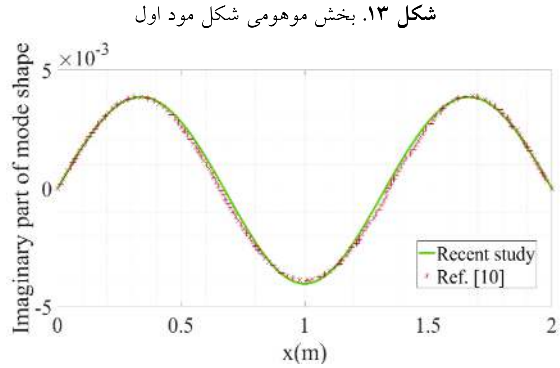

Fig. 13. Imaginary part of the first mode shape

شکل ۱۴. بخش حقیقی شکل مود سوم

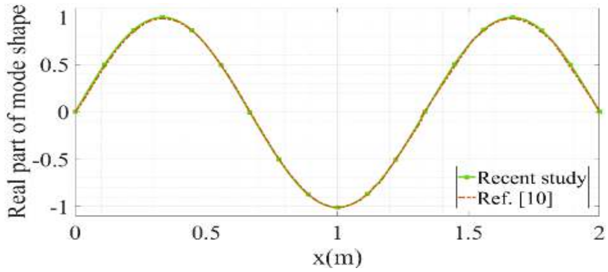

Fig. 14. Real part of the third mode shape

شکل ۱۵. بخش موهومی شکل مود سوم

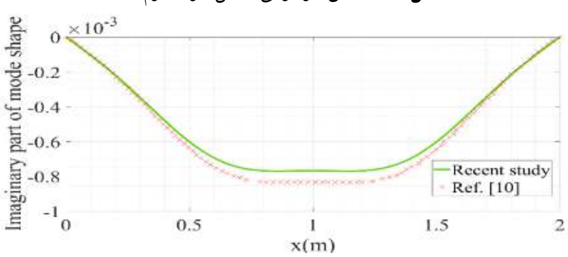

Fig. 15. Imaginary part of the third mode shape

پاسخ تیر رایلی در نمودارهای اخیر با نتایج تیر اویلر برنولی در مرجع [۱۰] قیاس شده‌است، که با توجه به ضخامت کم تیر رایلی هماهنگی خوبی نشان می‌دهد. در مرجع [10]، تیر اویلر برنولی با روش گالرکین مورد بررسی قرار گرفته اما در مقاله حاضر با توجه به اهمیت اثر اینرسی دورانی، تیر رایلی با استفاده از روش گالرکین و روش حذفی گوس مطالعه شده که نسبت به تعیین معکوس ماتریس مناسب‌تر است. در مثال نمونه، شرط همگرایی سری نیومن مطابق رابطه (۴۳) برای ماتریس $R_u^{(j)}$ برقرار نیست و امکان قیاس روش دقیق و روش بسط سری نیومن برای آن وجود ندارد. با توجه به محدودیت ارائه مطالب، تنها به ذکر این نکته بسنده می‌شود که روابط مقاله حاضر با حذف ماتریس جرم دورانی از معادله (۲۷) (اگر عبارت $s_j^2 \alpha_l^{(j)} x_k^T [M_\theta] x_l$ برابر صفر شود) و پارامتر η از روابط (۲۸) تا (۴۳) حذف شود، بر نتایج مرجع [17] منطبق است.

۶-نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه متناظر تیر رایلی با میرایی غیرمحلی و غیرویسکوز، با استفاده از روش تقریبی گالرکین به‌دست آمدند. با اعمال تبدیل لاپلاس و حل

معادله مشخصه جبری حاصل از دترمینان ماتریس سختی دینامیکی، مقدارهای ویژه الاستیک و غیرویسکوز تعیین شدند. پس از آن، ضرایب مجهول پاسخ آزمایشی نیز از روش حذفی گوس به دست آمدند. در پایان، روش بسط سری نیومن نیز برای تعیین بردارهای ویژه سیستم‌های تحت اثر اینرسی دورانی مورد بازنگری قرار گرفت. نتایج تحلیل تیر رایلی با میرایی غیرویسکوز غیرمحلی را می‌توان در چند بند به‌صورت خلاصه بیان کرد:

- افزایش تعداد جملات پاسخ آزمایشی در بهبود دقت نتایج اثرگذار است؛ اما انتخاب بیش از ۷ جمله برای پاسخ آزمایشی به صرفه نخواهد بود.
- پاسخ‌های تیر رایلی با ضخامت ناچیز با دقت خوبی بر پاسخ تیر اویلر برنولی منطبق است؛ اما با افزایش ضخامت، اختلاف پاسخ‌ها زیاد می‌شود. به طوری که اختلاف نرمال‌شده بخش موهومی مقدارهای ویژه مود هفتم به ۳٫۱۷ درصد می‌رسد.
- فرکانس طبیعی نوسان تیر رایلی میرا نیز متاثر از ضخامت مقطع است. به طوری که فرکانس طبیعی مود اول با افزایش ۱۶ برابری ضخامت مقطع عرضی، یازده برابر می‌شود.
- با افزایش ثابت آسایش، بخش حقیقی و موهومی مقدارهای ویژه، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
- محل قرارگیری لایه میراکننده در فرکانس طبیعی نوسان تیر رایلی موثر است و با کاهش طول آن، فرکانس کاهش می‌یابد. این تغییرات، در تیپ ۱، ۰٫۸۷ درصد بیشتر از تیپ ۲ است.
- با افزایش مقدار پارامتر مشخصه α نیز فرکانس طبیعی نوسان افزایش می‌یابد. نرخ رشد فرکانس در ابتدا زیاد است و سپس کم می‌شود.
- از روابط بخش **"روش بسط سری نیومن برای تعیین بردارهای ویژه"**، می‌توان در بررسی سیستم‌های پیوسته و گسسته متاثر از اینرسی دورانی استفاده کرد.

۷-مراجع

[1] Munteanu L., Chiroiu V., Dumitriu D., Baldovin D. & Chiroiu C. 2009 On the Eigenfrequency Optimization of Euler-Bernoulli Beams with Nonlocal Damping Patches. *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Série de Mécanique Appliquée*, 50, 53-66.

[2] Yüksel S. & Dalli U. 2005 Longitudinally Vibrating Elastic Rods with Locally and Non-Locally Reacting Viscous Damper. *Shock & Vibration: IOS Press*, 12, 109-118.

[3] Adhikari S., Friswell M. I. & Lei Y. 2007 Modal Analysis of Non-viscously Damped Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 74, 1026-1030.

[4] Karličić D., Murmu T., Adhikari S. & McCarthy M. 2016 Non-local Structural Mechanics. *John Wiley & Sons: Mechanical engineering and solid mechanics series*, Hoboken.

[5] Zhang P. D., Lei Y. J. & Shen Z. B. 2018 Semi-Analytical Solution for Vibration of Nonlocal Piezoelectric Kirchhoff Plates Resting on Viscoelastic Foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(3), 202-215.

[6] Adhikari S., Lei Y. & Friswell M. I. 2005 Dynamics of Non-Viscously Damped Distributed Parameter Systems. *Structural Dynamics and Materials Conference*, Austin, Texas.

[7] Adhikari S. 2000 Damping Models for Structural Vibration. *A Dissertation Submitted to the University of Cambridge*, Trinity College.

[8] Flügge W. 1975 Viscoelasticity. *Springer,* Second edition, Berlin.

[9] Friswell M. I., Adhikari S. & Lei Y. 2007 Vibration Analysis of Beams with Non-local Foundations Using Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, 71, 1365-1386.

[10] Lei Y., Friswell M. I. & Adhikari S. 2006 A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 3381-3400.

[11] Gonzalez-Lopez S. & Fernandez-Saez J. 2012 Vibrations in Euler-Bernoulli Beams Treated with Non-Local Damping Patches. *Computers and Structures*, 108-109, 125-134.

[12] Fyodorov V. S., Sidorov V. N. & Shepitko E. S. 2018 Nonlocal damping consideration for

[DOI: 10.22034/22.5.63]

[18] Fyodorov V. S., Sidorov V. N. & Shepitko E. S. 2020 Computer simulation of composite beams dynamic behavior. *Materials Science Forum, 974*, 687-692.

[19] Rao S. S. 2007 Vibration of Continuous Systems. *John Wiley & Sons*, New Jersey, USA.

[20] Nguyen Y. R. 2018 Comparative Spectral Analysis of Flexible Structure Models: The Euler-Bernoulli Beam Model, The Rayleigh Beam Model and the Timoshenko Beam Model. *Master's Theses and Capstone,* University of New Hampshire, Durham.

[21] Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. 2000 The Finite Element Method. Butter Worth-Heinemann, Fifth edition, Vol. 1, Woburn, Massachusetts, United States of America.

[22] Chopra A. k. 2012 Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. *Pearson Education*, Fourth edition, Bergen County, New Jersey, United States of America.

[23] Strang G. 1988 Linear Algebra and Its Applications. *Thomson Learning*. Third edition, United States of America.

[24] Choi S. K., Grandhi R. & Canfield R. A. 2006 Reliability-based Structural Design. *Springer*. First edition, United States of America.

the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 456, 1-8.

[13] Shepitko E. S. & Sidorov V. N. 2019 Defining of Nonlocal Damping Model Parameters Based on Composite Beam Dynamic Behavior Numerical Simulation Results. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 675, 1-8

[14] Zhao C., Zhao C. & Zhong C. 2020 the Global Attractor for a Class of Extensible Beams with Nonlocal Weak Damping. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B,* 25(3), 935-955.

[15] Shen R., Qian X., Zhou J. & Lee C.L. 2021 A Time Integration Method Based on the Weak Form Galerkin Method for Non-viscous Damping Systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 151, 1-18.

[16] Ge X., Gong J., Zhao Ch., Azim I., Yang X. & Li Ch. 2022 Structural Dynamic Response of Building Structures with Non-viscous Dampers under Kanai-Tajimi Spectrum Excitation. Journal of Sound and Vibration, 517, 1-15.

[17] Lázaro M, 2018 Eigensolution of Nonviscously Damped Systems Based on the Fixed-Point Iteration. *Journal of Sound and Vibration*, 418, 100-121.

[DOI: 10.22034/22.5.63]

Free vibration analysis of viscoelastic non-locally damped Rayleigh beam using Galerkin method, null space of the matrix & Neumann series expansion

Parisa Elyasi[1], Bahram Navayi Neya[2*] & Ali Rahmani Firoozjaee[3]

1 Ph. D. Candidate, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Iran,
2* Corresponding Author, Professor, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Iran,
3 Associate Professor, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Iran.

Abstract

While studying large-scale systems, non-local damping definition can beneficially model contact shear and long-range forces resulting from adjacent and non-adjacent elements in the set of interconnected dampers, damping patches and foundations which are modeled as non-local domains. If two- or three-dimensional systems are considered one dimensional (e.g. analyzing three dimensional beams based on Euler-Bernoulli, Rayleigh or Timoshenko Theories which simplifies the behavior of structures), the concept of non-local damping models arises to improve the accuracy of numerical results. Even though defining dissipative forces which are dependent on more parameters and quantities helpfully boost the validity of results compared to experimental cases in labs and three-dimensional numerical analysis done by software, many researchers have widely employed viscous damping model to demonstrate damped behavior of the structures in the sake of simplicity. Actually, viscous damping does not model accurately the dissipative behavior of real systems and practical structures often demonstrate some kind of viscoelasticity while vibration. In the recent study, external damping force at any point in the domain is influenced by the past history of velocity and long-range interactions through convolution integral over proper kernel functions. As a consequence of applying Laplace transformation and using Galerkin method, the integro-partial differential equation of Rayleigh beam as a distributed parameter system turns to an ordinary differential equation governing a discrete system with finite degrees of freedom. Galerkin method is established based on error minimization of assumed mode method and despite Rayleigh and Rayleigh-Ritz methods can suitably analyze nonconservative systems including damped beams. Corresponding undamped mode shapes of Rayleigh beam which satisfy essential boundary conditions are chosen as the best admissible functions to expand the trial response of equation of motion. In order to get C_{m-1} continuous functions and finite weighted residual integral, the equation is presented in the weak form. Afterwards stiffness, damping and two types of mass matrices are determined with respect to generalized coordinates. To get scaled mode shapes the mass change method is considered to evaluate scaling factor, then the results are mass normalized. By equating dynamic stiffness matrix to zero and solving the resulting algebraic equation, complex and real eigenvalues are obtained which are respectively elastic and non-viscous modes in stable systems. It's noteworthy to announce that contrasted with the viscously damped systems the degree of algebraic equation in the case of viscoelastic non-locally damped Rayleigh beam would generally be more than 2N (which N stands for total degrees of freedom). Accordingly, eigenvectors are found based on Gaussian elimination method and null space of the dynamic stiffness matrix. Additionally, Neumann series expansion is developed to determine eigenvectors of vibrating systems effected by inertia. Finally, numerical results of Rayleigh and Euler-Bernoulli beams are compared. Very thin Rayleigh beams are verified and show great accuracy but when the thickness increases and inertial effect becomes bold, results of Rayleigh and Euler-Bernoulli beams are not matched anymore. Furthermore, it's understood from the graphs and tables that when the characteristic parameter of nonlocality and relaxation constant increase and tend to infinity, the nonlocal and non-viscous effects decline.

Keywords: Nonlocal viscoelastic damping, Neumann series expansion, Galerkin method, Integro-partial differential equation, Null space of the matrix

[DOI: 10.22034/22.5.63]