

مجله علمی – پژوهشی

مهندسی عمران مدرس

دوره بیست و دوم، شماره 6، سال1400

بررسي عدم قطعيت نتايج آزمايش­هاي ارتعاش محيطي در روش­هاي زيرفضاي تصادفي

مهران پورقلی\*1، محسن محمدزاده2، مهین قنادی3

1. استادیار گروه مهندسی عمران، واحد سراب، دانشگاه آزاد اسلامی، سراب، ایران

2. استادیار گروه مهندسی برق، واحد سراب، دانشگاه آزاد اسلامی، سراب، ایران

3. استادیار گروه مهندسی عمران، واحد سراب، دانشگاه آزاد اسلامی، سراب، ایران

**Pourgholi@iausa.ac.ir****\***

تاریخ دریافت: 07/10/99 تاریخ پذیرش: 07/04/1400

**چکیده**

در روش­هاي زيرفضاي تصادفي مهترين عامل تاثيرگذار بر مشخصات ديناميكي مستخرج، ابعاد ماتريس هانكل بوده كه شامل تعداد سطرها و ستون­هاي آن است. استفاده از ابعاد كوچك ماتريس احتمال عدم شناسائي قطب­هاي پايدار را داشته و انتخاب ابعاد بسيار بزرگ علاوه برآنكه احتمال بوجود آمدن قطب­هاي مجازي و باياس را افزايش داده، باعث افزايش هزينه محاسباتي نيز مي­شود. از اينرو در اين پژوهش قصد براين است كه تعداد سطر­هاي بلوكي و ستون‌هاي مطلوب ماتريس هانكل در روش زيرفضاي تصادفي متعادل طوري محاسبه شود كه ضمن پوشش قطب­هاي موجود، هزينه محاسباتي حداقلي نيز داشته باشد. براي اين منظور از معيار عدد شرطي ماتريس هانكل و انديكاتور انرژي استفاده خواهد شد. مراحل كار بدين طريق است كه با استفاده از انديكاتور انرژي، حداكثر مرتبه موثر سيستم براي سطرهاي بلوكي مختلف ماتريس هانكل استخراج شده و سپس نمودار ماكزيمم عدد شرطي براي آن­ها رسم مي­شود. تعداد سطرهاي بلوكي مطلوب ماتريس هانكل از همگرائي معيار عدد شرطي با توجه به تعريف اين معيار استخراج مي­شود. به منظور درستی‌آزمایی روش پيشنهادي، از نتايج آزمايش ارتعاش محيطي پل روگذر شهر نمين كه توسط پژوهشگران اين مقاله انجام گرفته، استفاده شده است. نتايج اين پژوهش نشان دهنده اين است كه از بُعد 352، نمودار عدد شرطي نسبت به تغيير سطرها بلوكي حساسيت خود را از دست داده كه بعنوان بعد مطلوب انتخاب شده است. همچنين در بعد بهينه با استفاده از تغييرات انحناي نمودار انديكاتور انرژي مرتبه 66 به عنوان مرز بد شرطي‌دگي ماتريس سيستم، محاسبه شده كه پيدايش مودهاي باياس و محاسباتي در نمودار پايداري، مويد مرتبه محاسبه شده است.

**واژگان کلیدی:** شناسائي سيستم، ماتريس هانكل، بعد سيستم مطلوب، نمودار پايداري،عدد شرطي

1. مقدمه

روش­های زیرفضاي تصادفي در حوزه زمانی از قدرتمندترين روش­هاي شناسائي سيستم هستند. قابليت این روش­ها تا آنجاست که قادر است مشخصات مودال سازه­های ارتجاعي با مود­های نزدیک را به راحتی استخراج نماید. علاوه براين در عمل، اين روش­ها قادر به شناسائی سیستم حتی در سیگنال­هايی

 با طول دیتای کم نیز هستند [[1](#_ENREF_1)]. روش­های زیرفضای تصادفی با خروجی تنها از آنجائی که نیازی به اندازه­گیری تحريك­هاي ورودي ندارند، مناسب برای سازه­های عمرانی همچون پل­ها و ساختمان­ها و سد­ها هستند كه منبع مهم تحریک آنها شامل باد، ترافیک و...است. لازم به ذكرا ست كه اندازه­گیری اين تحريك­ها غیرممکن نبوده اما سخت است. اگرچه عدم نیاز به اندازه­گيري ورودی در این روش­ها برای مقاصد پایش سلامت سازه به ویژه در سازه­های عظیم بسیار کاربردی است اما همین عدم اندازه‌گیری ورودی­ها محدودیت­هایی نیز اعمال کرده است. در روش‌های مبتني برخروجی-تنها علاوه بر نویزهای محیطی و اندازه­گیری، عدم اعمال ورودی­های سیستم از مهمترین عوامل ايجاد عدم قطعيت در نتايج بدست آمده است [2]. از معمول‌ترین اقداماتی که پیشتر برای كاهش عدم قطعيت­ها انجام شده است می‌توان به ارائه ماتريس­هاي وزن برای ماتریس تصویر و همچنین روش­هاي مختلف برای رسم نمودار پایداری همچون روش کلاسیک و کلاستربندی و غيره اشاره کرد [[3](#_ENREF_3), [4](#_ENREF_4)]. در سال 1994 كارلو راينيري و همكاران [[5](#_ENREF_5)] تاثير مرتبه سيستم و تعداد سطرهاي ماتريس هانكل را روي پارامترهاي مودال مستخرج از روش زيرفضا-داده[[1]](#footnote-1) و به ویژه ضريب ميرائي كه به رفتار غير خطي و نويزها زياد حساس بوده، با استفاده از عدد شرطي[[2]](#footnote-2) ماتريس هانكل بررسي كرده­اند. پريوري و همكاران [[6](#_ENREF_6)] با انتخاب تعداد سطرها و ستون­هاي ماتريس هانكل و همچنين سطرهاي ماتريس گذشته و آينده بعنوان متغيير در روش­زيرفضا-داده با تاكيد بر عدم تقارن ابعاد ماتريس گذشته و آينده و معرفي آن به عنوان مسئله نامعين به پژوهش تاثير اين پارامترها بر نتايج حاصل پرداخته­اند. در پژوهش ديگري شائو لي و همكاران [[7](#_ENREF_7)] به مطالعه پارامتريك الگوريتم‌هاي زيرفضا‌ كواريانس[[3]](#footnote-3) و تاثير اين پارامترها روي نمودار پايداري و همچنين مشخصات ديناميكي استخراج شده براي سازه سدها پرداخته‌اند. در تحقيقات اين پژوهشگران اشاره شده كه استفاده از ابعاد متقارن براي ماتريس­هاي گذشته و آينده منجر به نتايج بهتري شده است.در بين مشخصات ديناميكي شناسائي شده از آزمايش‌هاي ارتعاش محيطي در سازه­هاي عمراني، درصد ميرائي‌هاي مودي با توجه به ماهيت غيرخطي آنها در مقايسه با فركانس­هاي مودي بسيار وابسته به ابعاد ماتريس هانكل انتخاب است.بر همين اساس نبويان و همكاران [[8](#_ENREF_8)]با انجام تحليل حساسيت روي درصد ميرائي­هاي شناسائي شده از نتايج آزمايش مودال يك سازه شبكه­اي دولايه با اتصالات توپي، مرتبه موثر سيستم را محاسبه كرده­اند.لازم به يادآوري است در اين پژوهش از چندين روش شناسائي سيستم خروجي-تنها در حوزه فركانسي و زماني استفاده شده است.

همان­طور كه پيشتر اشاره شد، تشخيص مودهاي واقعي از مودهاي محاسباتي و غير فيزيكي يا به زبان ديگر استخراج مرتبه واقعي مدل و كاهش عدم قطعيت نتايج حاصل از روش­هاي شناسائي سيستم با خروجي تنها از مهترين چالش­ها در ارتباط با اين روش­ها است. در اين پژوهش دو گام اساسي براي كاهش عدم قطعيت نتايج روش زيرفضاي تصادفي متعادل[[4]](#footnote-4) كه پيشتر توسط پژوهشگران اين مقاله ارائه شده [[9](#_ENREF_9), [10](#_ENREF_10)]، با استفاده از معيارهاي عدد شرطي و انديكاتور انرژي[[5]](#footnote-5) ماتريس سيستم مدنظر است:

الف) مشخص كردن حداقل سطرهاي بلوكي ماتريس هانكل با توجه به مشخصات سازه مورد نظر($β$*)* و انجام مطالعه پارامتريك روي تعداد سطرهاي بلوكي آن (*i*) در سيكل­هاي $i=β,2β,…,i\_{max}$ به­منظور يافتن حداكثرمرتبه موثر سيستم در هر سيكل ($N\_{max}^{i}$) با استفاده از معيار انديكاتور انرژي.

ب) يافتن تعداد سطرهاي بلوكي مطلوب ماتريس هانكل ($i\_{opt}$) با استفاده از معيار عدد شرطي حداكثر مرتبه­ها($k\_{i}^{N\_{max}^{i}}$) به منظور جلوگيري از اتلاف انرژي و همچنين كاهش هزينه محاسبات و كاهش عدم قطعيت نتايج

در ادامه براي بررسي ميزان كارائي روش پيشنهادي در كارهاي عملي، نتايج آزمايش ارتعاش محيطي پل روگذر ورودی شهر نمین كه توسط پژوهشگران اين مقاله انجام شده باروش پيشنهادي آناليز شده و نتايج آن ارائه خواهد.

1. روش زيرفضاي تصادفي متعادل

معادله ارتعاش سيستم حاصل از آزمايش­هاي ارتعاش محيطي با خروجي- تنها مطابق رابطه 1، در فضای حالت مدل مي­شود.

$x\_{k+1}=Ax\_{k}+ω\_{k}$ (1-الف)

$y\_{k}=Cx\_{k}+ϑ\_{k}$ (1-ب) که در آن $x\in R^{n}$بردار حالت تصادفی گسسته كه در بازه‌هاي $∆$t، $y\in R^{m}$ بردار داده­های اندازه­گیری­شده یا خروجی، $A\in R^{n×n}$و$C\in R^{m×n}$ ماتریس­های سیستم ،$ω\_{k}\in R^{n}$$ω\in R^{n}$ و $ϑ\_{k}\in R^{m}$$ν\in R^{n}$ به ترتيب بردارهاي نویز سفيد محیطی و اندازه­گیری هستند [[11](#_ENREF_11), [12](#_ENREF_12)].

 اگر $y(t)\in R^{m×s}$ داده­های اندازه­گیری­شده در آزمایش ارتعاش محیطی باشند، فضای داده­ها به شکل ماتریس هانکل ذيل بيان مي­شود.

$$Y= \left[\frac{\begin{matrix}y\left(0\right) &y\left(1\right) &…&y\left(N-1\right) \\y\left(1\right) &y\left(2\right) &…&y\left(N\right) \\\vdots &\vdots &\ddots &\vdots \\y\left(k-1\right) &y\left(k\right) &…&y\left(k+N-1\right)\end{matrix}}{\begin{matrix}y\left(k\right) &y\left(k+1\right)&…&y\left(k+N\right) \\y\left(k+1\right)&y\left(k\right) &…&y\left(k+N+1\right)\\\vdots &\vdots &\ddots &\vdots \\y\left(2k-1\right)&y\left(2k\right)&…&y\left(N+2k-2\right)\end{matrix}}\right] $$

$= \left(\frac{Y\_{P}\in R^{m.k×N}}{Y\_{F}\in R^{m.k×N}}\right)\in R^{m.i×N} $ (2)

در رابطه فوق *m* تعداد سنسورها و *i* تعداد سطرهاي بلوكي (m تايي) و *N*تعداد ستون­هاي ماتريس هانكل است.

اگر $\overbar{f}=b^{T}f\in Y\_{F}$ و $\overbar{p}=a^{T}p\in Y\_{P}$ دو بردار دلخواه در فضاهای گذشته و آینده باشند، مي­توان نشان داد كه حداكثر همبستگي بين اين دوبردار در فضاي ماتريس هانكل نرماليزه (رابطه 3 ) قرار داشته كه با تجزيه مقادير تكين آن مي‌توان به بردار پايه كانوني فضاي گذشته رسيد (رابطه 4).

|  |  |
| --- | --- |
| (3) | $$H=L^{-1}HM^{-T}=UΣV^{T}$$ |
| (4) | $$\overbar{p}=V^{T}M^{-1}p$$ |

در این روابط$T\_{+}=LL^{T}$ $T\_{-}=LL^{T}$ و $T\_{+}=MM^{T}$$T\_{-}=MM^{T}$ به ترتيب تجزیه چولسکی كواريانس زير ماتريس­هاي گذشته و آينده بوده،

 همچنين$U\in R^{n×n}$ و $V\in R^{n×n}$ماتریس­های متعامد و $Σ\in R^{n×n}$ ماتریس قطری مقادیر ویژه ماکزیمم یا همان مقادیر حداکثر همبستگي است.

با استفاده از میانگین شرطی فضاي آینده بر گذشته طبق رابطه 5 مي­توان نشان داد که بردار استاندارد گذشته($\overbar{p}$)، یکی از بردارهای پایه فضای پیش­بینی ($P$) است [[14](#_ENREF_14), [15](#_ENREF_15)].

$$P=\hat{E}\left\{Y\_{F}|Y\_{P}\right\}= \left(LUΣ\right)\left(V^{T}M^{-1}p\right) $$

$= LUΣ\overbar{p}$ (5)

براساس فیلتر کالمن، ماتريس**P**مطابق رابطه 6 قابل تجزیه به ماتریس مشاهده­پذیری ($O\_{k}$) و بردار حالت ($\hat{x}\_{k}$) است [[16](#_ENREF_16)].

$P=\left[\begin{matrix}C\\CA\\\vdots \\CA^{k-1}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\hat{x}\_{k}&\hat{x}\_{k+1}&…&\hat{x}\_{k+N-1}\end{matrix}\right]= O\_{k}\hat{x}\_{k}$ (6)

براي اين منظور با استفاده از تجزيه مقادير تكين ماتريس$P$ داريم:

$P=UΣV^{T}≈\hat{U}\hat{Σ}\hat{V}^{T}$ (7)

 كه در آن $U\in R^{m.k×m.k}$ و $V\in R^{m.k×m.k}$ ماتریس‌های متعامد *(*$UU^{T}=I\_{m.k}$ *)، (*$VV^{T}=I\_{m.k}$ *)و* $Σ\in R^{m.k×m.k}$ماتریس قطری مقادیر ویژه بوده و $\hat{Σ}\in R^{n×n}$ *با صرف‌نظر كردن از مقادير كوچك* $Σ$ بدست مي­آيد به شکلی كه بعد سيستم (*n*) معادل مرتبه $\hat{Σ}$ *است*. در نهايت با مقايسه روابط 6 و 7 مي­توان به بردار حالت رسيد:

$O\_{k}=\hat{U}\hat{Σ}^{1/2}$ (8)

$\hat{x}\_{k}=\hat{Σ}^{1/2}\hat{V}^{T}$ (9)

ماتريس سيستم**A** با استفاده از رابطه 6 و با حذف بلوك اول سمت چپ و بلوك آخر سمت راست به طريق ذيل محاسبه مي‌شود:

$O\_{k}\left(2:k\right)A=O\_{k}\left(1:k-1\right)$ (10)

ماتريس مشاهدات **C** نيز همان‌طور كه در رابطه 6 ملاحظه مي­شود بلوك اول ماتريس مشاهده پذيري است:

$C=O\_{k}\left(1:1\right)$ (11)

1. آنالیز مودال

آنالیز مودال با تجزیه مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم به شکل مجموعه روابط 12 و 13 آغاز می­شود [[17](#_ENREF_17)].

$A=ψΛψ^{-1}=ψ[μ\_{i}]ψ^{-1}$ (12)

$λ\_{i}^{c}=\frac{ln⁡(μ\_{i})}{Δt}$ (13)

كه در آن $ψ\in R^{2n×2n}$ **ماتريس بردار مقادير ويژه تكين،** $Λ\in R^{2n×2n}$ **ماتريس قطري حاوي قطب­هاي زمان گسسته (**$μ\_{i}$**) و**$λ\_{i}^{c}$ **قطب­هاي زمان پيوسته سيستم است.**طبق رابطه 14 می­توان اثبات کرد که قطب­های پیوسته($λ\_{i}^{c}$) و مزدوج آن ($λ\_{i}^{c\*}$) حاوی فرکانس و درصد ميرائي­ مود *i* ام هستند.

$λ\_{i}^{c},λ\_{i}^{c\*}=-ξ\_{i}ω\_{i}\pm jω\_{i}\sqrt{1-ξ\_{i}^{2}}$ (14)

كه در آن $ω\_{i} $ و $ξ\_{i}$ به ترتيب فركانس مودي و درصد ميرائي در مود *i* ام است. در نهايت مشخصات مودال به طريق ذيل استخراج مي­شود.

$ω\_{i}=\sqrt{\left(Re\left(λ\_{i}^{c}\right)\right)^{2}+\left(Im\left(λ\_{i}^{c}\right)\right)^{2}}$ (15-الف)

$ξ\_{i}=\frac{Re(λ\_{i}^{c})}{ω\_{i}}$ (15-ب)

$Φ=CΨ$ (15-ج)

در رابطه فوق$ Φ\in R^{m×2n}$*ماتريس حاوي بردارهاي مودي* *مختلط در محل نصب سنسورها است.همچنين* $Re\left(\right)$ و $Im\left(\right)$ به ترتيب اشاره به قسمت­هاي موهومي و حقيقي قطب­هاي سيستم دارد.

1. انتخاب ابعاد ماتريس هانكل

پارامترهاي موثر ماتريس هانكل شامل تعداد سطرهاي بلوكي ماتريس هانكل ($i$) و ستون­هاي (*N*) آن بوده كه انتخاب آن توسط كاربر مي­تواند انجام شود. ولي بايد توجه داشت كه اين داده­ها مستقل از هم نبوده و باتوجه به رابطه 16 به تعداد داده‌ها (s) وابسته هستند [[16](#_ENREF_16)].

$N+i\leq s+1$ (16)

براساس تئوري كيلي هميلتون[[6]](#footnote-6)، تعداد سطرهاي زيرماتريس‌هاي آينده و گذشته (*m.k*) بايد حداقل هم ُبعد سيستم باشند [[18](#_ENREF_18)] كه با توجه به تقارن اين دو زيرماتريس (*i=2k* ) داريم:

$i\geq 2\frac{n}{m}$ (17)

كه در آن *n* مرتبه سيستم و *m* تعداد سنسور­هاي داده­برداري است.

اما در عمل انتخاب *i* بستگي به پارامترهاي زيادي همچون نوع سازه، ميزان شكل­پذيري سازه، حداقل فرکانس سیستم ($f\_{o}$) يا تخميني از آن، نرخ داده­برداری($f\_{s}$) و مشخصات ميرائي سازه دارد[[19](#_ENREF_19)]. حال اگر $β$ طبق رابطه 18 نسبت نرخ داده­برداري در آزمايش به حداقل فرکانس سیستم باشد:

$β=\frac{f\_{s}}{f\_{o}}$ (18)

براي اينكه در طول *i* از سيگنال حداقل يك چرخه از فركانس حداقلي سيستم ($β$) قابل مشاهده باشد، بايد رابطه (19) برقرار باشد كه از آن به يك شرط حداقلي *i*  مي­رسيم [[20](#_ENREF_20), [21](#_ENREF_21)]:

$\frac{i}{f\_{o}}f\_{s}\geq 1 ⇒ i\geq β$ (19)

 اما در مورد محدوديت تعداد ستون­هاي ماتريس هانكل (N) مي­توان گفت از آنجائي كه در آزمايش­هاي ارتعاش محيطي بر خلاف تئوري­هاي زيرفضا طول داده­ها محدود بوده و شرط مانا بودن داده­ها برقرار نیست، براي تخمين ماتریس هانکل از تجزیه QR [[22](#_ENREF_22)] يا LQ [[15](#_ENREF_15)] استفاده می­شود. در نتيجه اين تخمين، حداقل تعداد ستون­هاي ماتريس هانكل طبق رابطه 20 بايد به اندازه سطرهاي آن باشد:

$N\geq m.i$ (20)

از مقايسه روابط 20 و 16 مي­توان حداكثر تعداد سطرهاي بلوكي ماتريس هانكل در آزمايش­هاي ارتعاش محيطي با طول داده­هاي محدود (*s*) را بدست آورد:

$i\leq \frac{s+1}{m+1}$ (21)

كه در آن *s* تعداد داده­هاي سيگنال و *m* تعدادسنسور‌هاي اندازه‌گيري است.

1. نمودار پايداري

نمودار پايداري فرايندي ساده اما كاربردي در شناسائي قطب‌هاي حقيقي ماتريس حالت سيستم (A) از مودهاي فيزيكي و محاسباتي دارد. دراين نمودار اساس کار بر این اصل استوار است که قطب­های واقعی با توجه به اینکه از مشخصات ذاتی سیستم هستند؛ مشخصه­هاي اين قطب‌ها كه شامل فركانس($f$)، درصد ميرائي ($ξ$) هستند، مستقل از افزايش مرتبه سيستم در هرگام (*n*) با حداقل اختلاف از گام قبلي (*n-1*)، رویت می‌شوند. میزان این اختلاف به زبان ریاضی به شکل رابطه 22 بیان می‌شوند [[23](#_ENREF_23)].

(22) $\frac{f\_{j}^{n}-f\_{j}^{n-1}}{f\_{j}^{n-1}}<0.01 , \frac{ξ\_{j}^{n}-ξ\_{j}^{n-1}}{ξ\_{j}^{n-1}}<0.05$

در رسم نمودار پايداري يافتن حداکثر مرتبه موثر ($N\_{max}$) از كليدي­ترين نكات براي كاهش عدم قطعيت نتايج آزمايش‌ها و همچنين كاهش هزينه‌هاي محاسباتي است. برای اين منظور در اين پژوهش از اندیس انرژی استفاده طبق رابطه 23 استفاده شده است.

|  |  |
| --- | --- |
| (23)  | $$I\_{n}=\frac{\sum\_{j=1}^{j=n}s\_{j}^{2}}{\sum\_{j=1}^{j=k.m}s\_{j}^{2}}$$ |

که در آن $s\_{j}^{2}$مجذور مقادر تکین ماتريس تصوير (**P**) بوده و$n$ متناظر با $I\_{n}>e$ *،* ماكزيمم مرتبه موثر ($N\_{max}^{i}$) در بُعد (*i*) را بدست می­دهد. مفهوم گپ *(e*) این است که $N\_{max}^{i}$ تا فاکتور غیرقابل مشاهده برای توصیف*e* درصد از واریانس داده‌های سنسور شده لازم است.

در روش­های زيرفضايي که در آن­ها تابع وزنی به ماتریس تصویر اعمال نمی­شود همچون [[7]](#footnote-7)UPC و زیر فضا-کواریانس می‌توان $e$ را بین 99 تا 95 درصد در نظر گرفت و اولين مرتبه‌اي كه شرط فوق را رعايت كرده به عنوان ماكزيمم مرتبه موثر انتخاب كرد. ولي با بررسي‌هايي كه پژوهشگران اين مقاله انجام داده­اند مشاهده شده است كه در سایر روش‌های زیرفضا كه با اعمال توابع وزن در ماتريس تصوير ايجاد مي‌شوند، مقدار مطلوب اين گپ بنا به روش متفاوت بوده و به سادگي مشخص نمي‌شود. به همين منظور برای تعيين حداكثر مرتبه موثر نمودار پايداري، نمودار انديكاتور انرژي را براي سيستم در ابعاد $i= 2β,..,i\_{max}$ نسبت به تعداد مقادير تكين كه به صورت درصدي همپايه شده­اند را در مقياس لگاريتمي رسم کرده، سپس بازه­ای که در آن نمودارهاي انديكاتور انرژي حساسيت خود به افزايش تعداد مقادير تكين را از دست مي­دهند، به عنوان ناحيه با كيفيت معرفي مي­شود. منظور از ناحيه باكيفيت بازه­اي از نمودار پايداري است كه در آن ناحيه نسبت به مرتبه‌هاي بعد از آن، نتايج عدم قطعيت كمتري داشته و به عبارت ديگر مشخصات مودال اين ناحيه قابل اعتمادتر هستند.

 مشخصه اين ناحيه افزايش تغييرات در شيب منحني‌هاي انديكاتور انرژي به سمت محور افقي بوده كه با توجه به روابط رياضي مي­توان گفت كه انحناي نمودارهاي انديكاتور انرژي در اين ناحيه زياد مي‌شود. با رسم نمودارهاي انديكاتور انرژي به صورت همزمان براي كليه سيكل‌ها به راحتي اين ناحيه مشخص مي‌شود. البته در اين پژوهش حدود ناحيه مورد نظرسپس با استفاده از تعريف رياضي انحناي نمودار به صورت دقيق براي هر سيكل محاسبه شده است. نقطه­اي كه در آن انحناي نمودار صفر يا نزديك به صفر شده به عنوان گپ (*e(%)*) معرفي مي‌شود. در نهايت ماكزيمم مرتبه موثر در بُعد مربوطه ($i=2k$) با توجه به شماره سيكل ($n\_{s}$) و تعداد سنسورها (*s*) از رابطه 24 محاسبه مي­شود.

(24) $N\_{max}^{i}=\frac{e×n\_{s}×β×s}{2}$

1. تعداد سطرهاي بلوكي مطلوب ماتريس سيستم

بررسي تعداد سطرهاي بلوكي ماتريس هانكل (*i=2k*) از ديگر نكاتي است كه مي­تواند در كاهش عدم قطعيت نتايج آزمايش­هاي مودال موثر باشد. براي اين منظور از عدد شرطي ماتريس هانكل يا همان ماتريس تصوير (*P*) مطابق رابطه (25) استفاده خواهد شد.

|  |  |
| --- | --- |
| (25)  | $$k\_{i}^{n}=\frac{s\_{1}}{s\_{n}}$$ |

که در آن $s\_{1}$ و $s\_{n}$ به ترتيب اولین و*n* امین مقدار تکین ماتریس تصوير سيستم(**P**) با بعد *i* است.

 به لحاظ تئوري با میل کردن$k\_{i}^{n}$ به سمت بی نهایت ماتریس از خوش-حالت[[8]](#footnote-8) به بدشرطيده[[9]](#footnote-9) تبديل مي­شود، با استفاده از اين مشخصه، عدد شرطي را براي ماكزيمم مرتبه­هاي بدست آمده ($k\_{i}^{N\_{max}}$) براي ابعاد $i= 2β,..,i\_{max}$ محاسبه و نسبت به بُعد سيستم در مقياس لگاريتمي رسم كرده و اولين سيكلي كه در آن تغييرات عدد شرطي نسبت به تغييرات بُعد سيستم حساسيت خود را از دست مي­دهد، به عنوان مرز خوب شرطيدگي ماتريس هانكل معرفي كرده و از آن به بُعد مطلوب نام برده مي­شود. مشابه بخش قبل براي پيدا كردن دقيق تغيير حالت ماتريس، از معادله انحناي نمودار $k\_{i}^{N\_{max}}$ استفاده مي‌شود.

1. بررسي عدم قطعيت نتايج آناليز مودال

براي بررسي عدم قطعيت قطب­هاي شناسائي شده در مرحله قبل و تخمین مرتبه سیستم دو ابزار ذيل بكار گرفته مي­شود:

الف)معیار واریانس تخمین سیستم[[10]](#footnote-10) (VAF)

اين رابطه خطاي بين داده­هاي تخميني ($\hat{y}\_{n}$) و اندازه­گيري شده ($y\_{n}$ $y\_{k}$)را مي­سنجد. هر­چه مقدار این معیار به عدد 100 نزدیک­تر باشد، خطای پیش­بینی مدل کمتر در نتیجه مدل دقیق‌تری حاصل می­شود. اولين مرتبه شروع همگرائي اين معيار تخميني از تعداد قطب­هاي واقعي سيستم را ارائه مي­دهد [[22](#_ENREF_22)].

|  |  |
| --- | --- |
| (26) | $$VAF=1-\frac{\frac{1}{N}\sum\_{k=1}^{N}(y\_{k}-\hat{y}\_{n})^{2}}{\frac{1}{N}\sum\_{k=1}^{N}(y\_{k})^{2}}$$ |

ب) معيار پيچيدگي مودي[[11]](#footnote-11) (MCF)

تخمین پارامترهای مودال ضعیف و داده­های ناهمسان از مهمترين دلايل بوجود آمدن اشکال مودی با مولفه موهومي است. در اين قسمت از اين خاصيت براي بررسي ميزان عدم قطعيت مرتبه­هاي شناسائي شده در نمودار پايداري استفاده خواهد شد. برای سنجش ميزان حقيقي بودن اشکال مودی از معیار پيچيدگي مودي طبق رابطه (27) استفاده مي­شود [[24](#_ENREF_24)].

|  |  |
| --- | --- |
| (27) | $$MCF\_{r}=1-\frac{\left(S\_{xx}-S\_{yy}\right)^{2}+4S\_{y}^{2}}{\left(S\_{xx}+S\_{yy}\right)^{2}}$$$$S\_{xx}=Re\left\{Ψ\_{r}\right\}^{T}Re\left\{Ψ\_{r}\right\};$$$$ S\_{yy}=Im\left\{Ψ\_{r}\right\}^{T}Im\left\{Ψ\_{r}\right\}; $$$$S\_{xy}=Re\left\{Ψ\_{r}\right\}^{T}Im\left\{Ψ\_{r}\right\}$$ |

كه در آن $Re\left\{Ψ\_{r}\right\}$ و $Im\left\{Ψ\_{r}\right\}$ *به ترتيب قسمت واقعي و موهومي بردار مودي است.مقدار اين رابطه بين صفر (مود حقيقي) تا %100 (مود موهومي) مغيير است.*

1. آزمایش ارتعاش محیطی پل روگذر شهر نمین

این پل در ورودی شهر نمین در 25 کیلومتری مرکز استان

اردبیل واقع بوده که مطابق شکل (1) شامل دو دهانه 10/27 متری با عرشه بتنی است. عرشه پل روی شاه­تیرهایی با مقاطع I به ابعاد *75x180 cm* که در فواصل 5/2 متری از هم بوده و کل مجموعه روی فنداسیون و شمع­هائی به قطر 120سانتی متر واقع شده است. از آنجایی که پل مذكور تنها ورودی این شهر بوده و در معرض انواع بارهای ترافیکی است، لزوم کنترل مشخصات دینامیکی پل شامل فرکانس­های مودی و درصد میرائی به منظور بررسی عملکرد و اطمینان از سلامت سازه پل ضروری به نظر می­رسيد. از میان آزمایش­های دینامیکی، آزمایش ارتعاش محیطی با توجه به عدم وقفه در کارکرد پل مناسب تشخیص داده شد. فرايند انجام آزمايش در هفتم فرودين 1398در يك روز نسبتاً بادي بين ساعت9 صبح تا 1بعد ازظهر انجام گرفت. دليل انتخاب بازه زماني نسبتاً بلند، به منظور داده­برداري در شرايط ترافيكي متغيير بود. به طوري كه با توجه به تعطيلات نوروزي در بازه­اي 5 دقيقه­اي بين ساعت 10 تا 11 صبح پل خالي از ترافيك بود. اما هرچه به ساعات ظهر نزديك مي­شد با توجه به توريستي بودن شهر بر بار ترافيكي جاده افزوده مي­شد. براي طراحي جزئيات آزمايش و چگونگی چيدمان سنسورها از نتايج آزمايش پل بابلرود كه توسط جواد يادگاري و همكاران [[25](#_ENREF_25)] و همچنين آزمايش پل قوسي بتني كه توسط محمد صادق معرفت و همكاران [[26](#_ENREF_26)] انجام گرفته، استفاده شده است. در عمليات برداشت اين آزمايش از تجهیزات داده­برداری شرکت لرزه نگار پارسیان استفاده شده كه به صورت يكپارچه، سنسور و ثبات لرزه­اي را در خود جاي داده است. لرزه­سنج استفاده شده فركانس طبيعي2 هرتز را داشته و حساست آن 60 ميلي آمپر بوده است. اين لرزه­سنج سه مولفه شمالي- جنوبي، شرقي- غربي و يك مولفه عمودي دارد كه از معمول­ترين لرزه­سنج­هاي امروزي است. آزمايش طبق شكل (2) با

|  |
| --- |
| **شكل1.** پل روگذر ورودي شهر نمین |
| E:\2-thesis\3-azarbonyad\4-Azarbonyad-Vahdani-Namin\aks\IMG_20190110_124123_647.jpg |
| **Fig. 1** Over Pass Bridge of Namin City |

چهار لرزه­سنج كه با s3، s4،- s5 و s12 نشان داده شده در چهار آرايش مختلف انجام گرفته است. لازم به يادآوري است كه با توجه به یکسانی مشخصات دهانه­ها، سنسورها در دهانه اول به سمت شهر نصب شدند. در جدول (1) مشخصات برداشت­ها و همچنين بازه شتاب­هاي ثبت شده در هر آرايش ارائه شده است. باتوجه به مشخصات سازه­اي پل مورد نظر كه به صورت مجموعه­اي از تير‌هاي I شكل دوسر ساده طراحي شده، از داده‌هاي چيدمان A1 كه تقريبا روي شاه­تير بوده استفاده شده است. لازم به ذكر است كه بيشترين ارتعاش محيطي پل هم در همين چيدمان ثبت شده است. با پايش ترافيك عبوري از روي پل، مشخص شد كه در حالت ارتعاش آزاد، شتاب­هاي ثبت شده در بازه $0.003g$ تا $0.008g$ قرار داشته و عبور وسایل نقلیه سنگین چون اتوبوس، تریلر 18 چرخ، ترافیک سنگین همزمان هر دو باعث ايجاد شتاب بزرگتر از $0.01g$ در سيستم پل مي­شود. با توجه به متوسط شتاب در ارتعاش محيطي پل و همچنين طول پل و سرعت مجاز عبور وسايل از روي پل، 16 دقيقه برداشت چيدمان اول، به بازه­هاي يك دقيقه­اي دسته‌بندي شدند كه با صرف نظر كردن از يك دقيقه اول سيگنال كه در آن ايستگاه s1 دچار اختلال بود،11 سیگنال در ناحيه ارتعاش محيطي و 4 سیگنال در دسته ارتعاش قوي (اجباري) جای گرفتند. در اين تحقيق با توجه به بررسي نتايج ارتعاش محيطي، نتايج 11 سيگنال ارتعاش محيطي مورد بررسي قرار گرفته است. در شكل (3) سيگنال كانال *S3*ارائه شده است.

براي شروع فرآيند شناسائي سيسم، طبق رابطه (19) حداقل فركانس سيستم يا تخميني از آن لازم بوده كه براي اين منظور از مدل المان محدود سيستم پل كه توسط طراح پل به صورت مجموعه مجزاي تير، دال بتني و مجموعه شمع و فنداسيون در نرم‌افزار SAP2000طراحي شده، استفاده شده است. در شکل (4) مدل المان محدود مجموعه شمع و پی نشان داده شده است. حداقل مرتبه سیستم از رابطه (19)، با توجه به نتايج المان محدود كه حداقل فركانس مجموعه 66/4 هرتز بوده، $β≈44$ محاسبه مي­شود. ماکزیمم مرتبه سیستم از رابطه 21 باتوجه به طول يك دقيقه­اي سيگنال ($s=12000$) و تعداد سنسورها، $i\_{max}=55β$ بدست می­آید. با انجام كدنويسي در محيط نرم‌افزار Matlab نمودار­هاي انديكاتور انرژي براي 18 سيكل اول رسم شده و مطابق شكل (5) ماكزيمم مرتبه با استفاده از انحناي نمودار انرژي محاسبه مي­شود. با توجه به شكل (5) براي تمامي سيكل­ها مقدار انحناي نمودار در بازه 5 درصدي مقادير تكين هر سيكل به زير % 01/0 رسيده است. البته در اين پژوهش براي حساسيت‌سنجي ميزان انحناي مرزي در كيفيت مشخصات مودال استخراجي، ناحيه 5 تا 12 درصدي (ناحيه آبي رنگ) كه در آن ميزان انحنا به كمتر از %001/0 رسيده، نيز در نمودار پايداري بررسي خواهد شد.

براي يافتن سيستم با بُعد مطلوب، نمودار عدد شرطي را براي ماكزيمم مرتبه­هاي استخراج شده ( $k\_{i}^{N\_{max}^{i}}$ ) در سيكل­هاي $i=β,2β,..,18β$ رسم كرده و براي بررسي دقيق حساسيت عدد شرطي نسبت به *i* از نمودار تغييرات انحنا استفاده شده است. با توجه به شكل (6) براي $7β>i>5β$ انحنا تغيير جهت داده (ناحيه قرمز رنگ ) اما همانطور كه در نمودار انديكاتور انرژي مشاهده مي­شود، براي $i\geq 8β$ (ناحيه زرد رنگ) علاوه بر صفر شدن انحنا شيب نمودار نيز ثابت شده است. به منظور بررسي دقيق­تر محدوده مطلوب سيستم برای تعيين مرتبه بهينه، نمودار پايداري براي سيكل­هاي ششم ($i=256$) و هشتم ($i=352$) تا مرتبه 110 به ترتيب در شكل­هاي(7 و 8) رسم شده است. با رسم نمودار ميانگين VAFبراي چهار سيگنال چيدمان A1 در سيكل پنجم و هشتم، مشاهده مي­شود كه از مرتبه 12 ام، مقادير VAF در هر دو سيكل به بیش از 82 درصد همگرا شده كه نشان دهنده وجود 6 قطب احتمالي پايدار در اين داده­ها است. با رسم نمودار انديكاتور انرژي، بازه مرتبه حداكثري براي سيكل پنجم و سيكل هشتم به ترتيب $N\_{max}^{256}=$

|  |
| --- |
| جدول 1. مشخصات سيگانال­هاي ثبت شده در آزمايش ارتعاش محيطي |
| ArrangementNumber | Starttime | Endtime | Data collection rate(second) | Dominant excitation | Acceleration (0.001g) |
| A1 | 10:28 | 10:44 | 200 | Wind-traffic | [0.3 1] |
| A2 | 10:59 | 11:21 | 200 | bunker crossing | [0.5 1.77] |
| A3 | 11:28 | 11:42 | 200 | Passing a car in the opposite lane | [0.3 1.22] |
| A4 | 11:50 | 12:40 | 200 | 18-wheel cement truck | [.1 2.33] |
| Table.1 Specification of recorded Signals in the modal experiment |

|  |  |
| --- | --- |
| **شکل2.** پلان چیدمان­سنسورها | ***شکل 3.*** *رکورد شتاب­های قائم ثبت شده در آرایش اول برایs3*  |
|  |  |
| **Fig. 2**. The Sensors layout plan | **Fig. 3.** The vertical acceleration Records for the station S3 of arrangement A1 |

|  |
| --- |
| **شکل4.** مدل المان محدود شاه­تير و مجموعه فنداسیون پل |
|  |
| *Description: BRIDGE-GENERAL* |
| **Fig 4.** Finite element model of grider beam and Foundation set of bridge |

|  |
| --- |
| **شکل 5.** نمودار انديكاتور انرژي براي $i=44,88,..,792$ |
|  |
| **Fig. 5.** Energy indicator and curvature v.s. n |
|  |
| شكل 6. نمودار ماكزيمم عدد شرطي براي $i=44,88,..,792$ |
|  |
| **Fig. 6.** Conditional number v.s. i for $i=44,88,..,792$ |

$[28 62]$ و $N\_{max}^{352}=[38 72]$ محاسبه شده كه در نمودارهاي پايداري 7 و 8 اين بازه با رنگ زرد نمايش داده شده است. همانگونه كه در هر نمودار پايداري ملاحظه مي­شود فركانس­هاي مودي 48/4 هرتز و 45/15هرتز در حد اول ماكزيمم مرتبه هر دو سيكل ($N\_{max}^{220}<28$ و $N\_{max}^{352}<38 $) شناسائي شده كه با مراجعه به مدل المان محدود جدول (2) و باتوجه به محل نصب سنسورها در چيدمان اول كه تقريبا روي شاه­تير هستند مي­توان نتيجه­گيري كرد كه اين دوفركانس مودي مربوط به مود اول و دوم شاه­تير I هستند (شكل 4). حال اگر مرتبه­هاي ناحيه زرد رنگ($66>N\_{max}^{220}>28$ و $ 72>N\_{max}^{352}>38$) كه در آن تغييرات انديكاتور انرژي اندك ولي شيب نمودار متغيير بوده، بررسي شود مي­توان مشاهده كرد فركانس مود­ي (25/7 هرتز) و (62/10 هرتز) نيز در اطراف مود اول شاه­تير ظاهر شده كه با توجه به *MCF<1%* و همچنين همبستگي 98% شكل مودي آنها با مود اول مي­توان با ساخت مدل المان محدود يك­پارچه سيستم پي و مجموعه سازه پل به بررسي آن­ها پرداخت. فرکانس مودي 56/23هرتز با توجه به *MCF>76%* براي هر دو سيكل نويز تشخيص داده شده، اما فركانس­هاي مودي 26/25 و 48/30 هرتز که در نمودار پایداری ظاهر شده­اند *MCF* كمتر از 11 درصد دارند اما در اشكال مودي حاصل بجز نقاط ثابت گره­اي دو انتهاي تير، محور تير به صورت خطي تغيير شكل داده و در نتیجه جزو اشکال مودی خمشی عرشه پل دسته بندی نشده­اند. بر اساس مدل المان محدود شاه­تير، فركانس مودي 83/33 هرتز سومين فركانس مودي اين سازه بوده كه اين فركانس برخلاف نمودار پايداري سيكل ششم كه به سختي در آن قابل مشاهده است، در سيكل هشتم به وضوح اين فركانش شناسائي شده است. دو فركانس مودي بعد از 83/33 هرتز با توجه به %*MCF > 75* نويزي تشخيص داده شدند. در آخرين گام براي بررسي مشخصات مودي استخراج­شده در مرز ناحيه مطلوب($i=352$)، نمودار پايداري مطابق شكل (10) براي سيكل پانزدهم( $i=660$) نيز رسم شد همان­گونه كه ملاحظه مي­شود نمودار پايداري و مشخصات مودي شناسائي شده در اين سيكل تفاوت چنداني با سيكل هشتم نداشته و افزايش ابعاد ماتريس سيستم براي $i\geq 352$ نتيجه­اي جز افزايش هزينه محاسباتي و همچنين پيدايش مودهاي محاسباتي و نويزي بيشتر ندارد. در جدول (2) علاوه بر ارائه نتايج شناسائي سيستم به روش B-SSI، نتایج تحلیل عددی و همچنین کار قبلی پژوهشگران اين مقاله در حوزه فرکانس با روش تجزيه حوزه فركانسي (FDD) برای مقایسه مشخصات استخراج شده نيز ارائه شده است. در نهايت اشكال مودي استخراج شده براي $i=352$ و همچنين براي مدل المان محدود در شكل (11) ارائه شده است.

همان­طوري كه ملاحظه شد با افزايش مرتبه نمودار­هاي پايداري و وارد شدن به ناحيه مرزي بد-شرطيدگي ماتريس سيستم (ناحيه زرد رنگ) تعداد قطب­هاي شناسائي­شده افزايش يافته ولي عدم قطعيت نتايج به شدت افزايش يافته است. به طوري كه در ناحيه اول (آبي­رنگ) دو مود شناسائي­شده در هردو سيكل جز قطب­هاي اصلي سيستم بوده­اند ولي از چهار قطب پايدار شناسائي شده در ناحيه دوم يك قطب متعلق به جزء سازه­اي مورد بررسي بوده است. اهميت حداكثر مرتبه موثر زماني بهتر مشخص مي‌شود كه با عبور از مرتبه­هاي متناظر به وضوح نمايان شدن قطب­هاي باياس و محاسباتي در نمودارهاي پايداري مشخص مي­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| **شکل 7.** نمودار پايداري پل روگذر نمين($i=256$) | **شکل 8.** نمودار پايداري پل روگذر نمين ($i=352$) |
|  |  |
| **Fig. 7.** Stability diagram of Namin overpass bridge ($i=256$)  | **Fig. 8.** 10 Stability diagram of Namin overpass bridge ($i=352$) |

|  |  |
| --- | --- |
| **شکل 9.** نمودار ميانگين VAFبراي آرايش اول | **شکل 10.** نمودار پايداري پل روگذر نمين) $i=660$ ( |
|  |  |
| **Fig. 9.** Mean of Variance Acounted for arrangement A1 | **Fig. 10.** Stability diagram of Namin overpass bridge($i=660$) |

|  |
| --- |
| **جدول 2.**  مشخصات مودال مستخرج براي 3 مود اول خمشی سيستم پل روگذر شهر نمين |
| **MCF (%)** | **Damping (%)** | **Frequency ( Hz)** | **Mode** **Number** |
| **B-SSI** | **FDD** | **B-SSI** |  | **FEM** | **FDD** | **B-SSI** |
| 0.07 | 0.63 | 4.14 | 4.66 | 4.80 | 4.83 | 1 |
| 0.33 | - | 2.07 | - | - | 7.25 | - |
| 0.28 | - | 0.91 | - | - | 10.62 | - |
| .85 | 3.63 | 1.61 | 17.95 | 15.59 | 15.32 | 2 |
| 4.04 | 5.41 | 0.68 | 37.89 | 35.25 | 33.83 | 3 |
| **Table 2.** Extracted modal properties for the first 3 bending modes for the overpass bridge of Namin city**شكل 11**. اشكال مودي شناسائي شده پل روگذر شهر نمين |
| First ModeMCF=0.0% |  |  |
| Secound ModeMCF=0.1% |   |  |
| Third ModeMCF=3.68% |  |  |
|  | b) FEM | a) SSI-CCA |
| **Fig. 11.** Identified mode shapes of the overpass bridge of Namin city |

1. نتيجه­گيري

عدم اطلاع از ورودي­ها در آزمايش­هاي ارتعاش محيطي از مهمترين عوامل ايجاد عدم قطعيت در نتايج حاصل از شناسائي سيستم در روش­هاي حوزه زماني بوده و در اين بين ابعاد ماتريس‌ هانكل داده­ها نقش اصلي در فرآيند آناليز مودال را دارد. استفاده از ابعاد كوچك ماتريس احتمال عدم شناسائي قطب­هاي موجود را داشته و انتخاب ابعاد بسيار بزرگ علاوه برآنكه افزايش احتمال بوجود آمدن قطب­هاي مجازي و باياس را داشته، باعث افزايش هزينه محاسباتي نيز مي­شود. از اين­رو در اين پژوهش به منظور يافتن ابعاد مطلوب ماتريس هانكل كه ضمن پوشش قطب­هاي موجود هزينه محاسباتي حداقلي نيز داشته باشد، از معيار عدد شرطي ماتريس هانكل و انديكاتور انرژي در دو مرحله استفاده شده است. در نخستين گام، مرتبه بهينه نمودارهاي پايداري را با استفاده از انديكاتور انرژي محاسبه كرده، سپس با استفاده از اين مرتبه حداكثري، عدد شرطي ماتريس سيستم را براي سيكل­هايي كه ضريبي از حداقل مرتبه سيستم هستند محاسبه مي­شود. با توجه به تعريف عدد شرطي با همگرا شدن اين عدد به سمت صفر، ابعاد مطلوب ماتريس سيستم استخراج مي­شود. به منظور بررسي درستی‌آزمایی روش پیشنهادی، نتايج آزمايش ارتعاش محيطي پل روگذر ورودی شهر نمین که با نصب چهار سنسور در چهار آرایش مختلف روی بخش­های متفاوت دهانه اول اين پل (سمت شهر) نمونه­برداری شده بودند، مورد تحلیل قرار گرفت. با توجه به نتایج تحليل عددي، از شتاب­های کوچکتر از$0.01g$ با طول 60 ثانيه در اين پژوهش استفاده شده است. حداكثر مرتبه نمودارهاي پايداري در بازه بين 5 تا 12 درصد تعداد مقادير تكين هر سيكل اتفاق افتاد. همچنين از همگرائي حداكثر عدد شرطي سيكل‌ها از سيكل 8 ام، بُعد مطلوب 352 انتخاب شد. در يك جمع­بندي كلي مي­توان گفت استفاده از مفهوم انديكاتور انرژي در يافتن مرتبه موثر نمودار پايداري تاثير چشم­گيري در كاهش عدم قطعيت نتايج استخراج شده داشته به طوري كه از سه مود ارتعاشي مدنظر دو مود با دقت در ناحيه مربوط به مرتبه موثر استخراج شده است. بعلاوه استفاده از مفهوم عدد شرطي براي يافتن بعد بهينه سيستم موثر بوده، بطوريكه با رسم نمودار پايداري براي سيكل 15ام، مشخص شد كه مشخصات مودال مستخرج تفاوت چنداني با سيكل بهينه 8 ام نداشته است.

1. منابع
2. Deraemaeker, A., et al., *Vibration-based structural health monitoring using output-only measurements under changing environment.* Mechanical systems and signal processing, 2008. **22**(1): p. 34-56.
3. De Moor, B.L., *On the number of rows and columns in subspace identification methods.* 2003.
4. Wu, C., et al., *Stabilization diagrams to distinguish physical modes and spurious modes for structural parameter identification.* Journal of Vibroengineering, 2017. **19**(4): p. 2777-2794.
5. Mrabet, E., M. Abdelghani, and N. Ben Kahla, *A new criterion for the stabilization diagram used with stochastic subspace identification methods: an application to an aircraft skeleton.* Shock and Vibration, 2014. **2014**.
6. Rainieri, C. and G. Fabbrocino, *Influence of model order and number of block rows on accuracy and precision of modal parameter estimates in stochastic subspace identification.* International Journal of Lifecycle Performance Engineering 10, 2014. **1**(4): p. 317-334.
7. Priori, C., M. De Angelis, and R. Betti, *On the selection of user-defined parameters in data-driven stochastic subspace identification.* Mechanical Systems and Signal Processing, 2018. **100**: p. 501-523.
8. Li, S., et al., *Parametric analysis of SSI algorithm in modal identification of high arch dams.* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2020. **129**: p. 105929.
9. Nabavian, S.R., et al., *Damping estimation of a double layer grid with ball joint system by output-only modal identification.* Scientia Iranica, 2019.
10. Tarinejad, R. and M. Pourgholi, *Processing of Ambient Vibration Results using Stochastic Subspace Identification based on Canonical Correlation Analysis.* Modares Mechanical Engineering, 2015. **15**(7).
11. . Tarinejad, R. and M. Pourgholi, *Modal identification of arch dams using balanced stochastic subspace identification.* Journal of Vibration and Control, 2018. **24**(10): p. 2030-2044.
12. Chen, C.-T., *Linear system theory and design*. 1995: Oxford University Press, Inc.
13. Chen, H.-F., P. Kumar, and J. Van Schuppen, *On Kalman filtering for conditionally Gaussian systems with random matrices.* Systems & Control Letters, 1989. **13**(5): p. 397-404.
14. Peeters, B., *System Identification and Damage Detection in Civil Engeneering*, in *Faculteit Toegepaste Wetenschappen Arenbergkasteel*. 2000, Katholieke Universiteit Leuven: Heverlee (Belgium).
15. Desai, U.B., D. Pal, and R.D. Kirkpatrick, *A realization approach to stochastic model reduction.* International Journal of Control, 1985. **42**(4): p. 821-838.
16. Katayama, T., *Subspace methods for system identification*. 2006: Springer.
17. Van Overschee, P. and B.L. De Moor, *Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications*. Vol. 3. 1996: Kluwer academic publishers Dordrecht.
18. Peeters, B. and G. De Roeck, *Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis.* Mechanical systems and signal processing, 1999. **13**(6): p. 855-878.
19. Van Der Veen, A.-J. and E.F. Deprettere, *Subspace-based signal analysis using singular value decomposition.* Proceedings of the IEEE, 1993. **81**(9): p. 1277-1308.
20. Reynders, E. and G. De Roeck, *Reference-based combined deterministic–stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis.* Mechanical Systems and Signal Processing, 2008. **22**(3): p. 617-637.
21. Magalhaes, F., A. Cunha, and E. Caetano, *Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge.* Mechanical Systems and Signal Processing, 2009. **23**(2): p. 316-329.
22. Pridham, B.A. and J.C. Wilson. *An application example illustrating the practical issues of subspace identification*. in *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference*. 2003.
23. Verhaegen, M. and V. Verdult, *Filtering and system identification: a least squares approach*. 2007: Cambridge university press.
24. Yi, J.-H. and C.-B. Yun, *Comparative study on modal identification methods using output-only information.* Structural Engineering and Mechanics, 2004. **17**(3-4): p. 445-466.
25. Andersen, P., *ARTeMIS Extractor Online Help.* Structural Vibration Solutions A/S. Version, 2010.
26. YADGARI, J. and B. OMID, *Modal parameter identification using ambient vibration testing with introducing a new software.* 2010.
27. Marefat, M.-S., E. Ghahremani-Gargary, and S. Ataei, *Load test of a plain concrete arch railway bridge of 20-m span.* Construction and Building Materials, 2004. **18**(9): p. 661-667.

 The Uncertainty of ambient vibration test results in stochastic subspace methods

Mehran Pourgholi1\*, Mohsen Mohammadzadeh Gilarlue 2, Mahin Ghannadi3

1. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Sarab, Iran.

2. Assistant Professor, Department of Electical Engineering, Islamic Azad University, Sarab, Iran.

3. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Sarab, Iran.

\* Sarab, Iran, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University of Sarab Branch, Pourgholi@iausa.acir

Abstract

In stochastic subspace methods, the most important factor influencing the dynamic specifications is the dimensions of the Hankel matrix include the number of rows and columns. Using small matrix dimensions is unlikely to identify existing poles, and selecting very large dimensions not only increases the likelihood of virtual and bias poles but also increases computational costs. In this study, it is intended that the optimal dimensions of the Hankel matrix in the balanced stochastic subspace method be calculated in such a way that in addition to covering the existing poles, it also has a minimum computational cost. For this purpose, the condition number of the Hankel Matrix and Energy Indicator is used in two steps. The steps are as follows: First, calculate the optimal order of each cycle, and then use the optimal order to draw the condition number of the system matrix for different dimensions and calculate the desired dimension from its convergence. To verify the accuracy of the proposed method, the ambient vibration test of the Namin Entrance Bridge has been used. This bridge is located at the entrance of Namin city, 25 km from the center of Ardabil province, Iran, which includes two spans of 27.10m with a concrete deck. The deck of the bridge is located on beams with I sections, which are 2.5m away from each other, and the whole set of beams and deck is located on a system of foundations and piles with a diameter of 120cm. This bridge being the only entrance to the city and is exposed to various traffic loads, it was necessary to monitor the dynamic characteristics of the bridge as modal frequencies and damping ratios to evaluate the performance and ensure the health of the bridge structure. According to the numerical analysis and the length of the data (12000), the minimum order and the maximum number of cycles are 22 and 55, respectively. By diverging the curvature of the energy indicator graph, the optimal order is determined in the initial 5-12% of the singular values of cycles. For example, the maximum order of the 6th cycles was obtained, 28-62. Also, from the convergence of the maximum condition number of cycles from the 8th   cycle, the optimal dimension was selected 352. In a general summary, it can be said that the use of the energy indicator concept in finding the effective order of the stability diagram has a significant effect on reducing the uncertainty of the extracted results. So that from the three identified stable poles, two poles have been extracted in the effective-order area. Also, using the concept of conditional number to find the optimal dimension of the system was effective, so that by drawing a stability diagram for the 15th cycle, it was found that the identified modal characteristics were not significantly different from the results of the optimal cycle (8th). Finally, the extracted modal properties have an acceptable agreement with the numerical model and frequency domain decomposition method (FDD). The modal frequencies of both methods (FDD & B-SSI) have a good correlation but the damping ratios were very different. In frequency domain methods the damping ratios being very sensitive to the quality of data collection, one can expect that the results of the subspace method are closer to reality.

**Keywords:** System identification, Hankel matrix, Desired System dimension, Stability Chart, Condition Number

1. . Data-deriven Stochastic Subspace idenentification [↑](#footnote-ref-1)
2. . Condition Number [↑](#footnote-ref-2)
3. . Covariance-deriven Stochastic Subspace idenentification [↑](#footnote-ref-3)
4. .Balanced Stochastic Subspace idenentification (B-SSI) [↑](#footnote-ref-4)
5. . Energy Indicator (EI) [↑](#footnote-ref-5)
6. . Cayley-Hamilton [↑](#footnote-ref-6)
7. . Un-weighted Principle Component [↑](#footnote-ref-7)
8. . Well-Conditioned [↑](#footnote-ref-8)
9. . ill-Conditioned [↑](#footnote-ref-9)
10. . Vriance Accounted For (VAF) [↑](#footnote-ref-10)
11. . Modal Complexity Factor (MCF) [↑](#footnote-ref-11)