مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره هجدهم، شماره ۳، سال ۱۳۹۷

مودهای شکست ترک سکه‌ای موجود در لایه محدود ایزوتروپ جانبی

سید مرتضی دهقان منشادی[۱]، علی خجسته[۲*]، شهریار ناطق[۱]، محمد رحیمیان[۳]

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران
۲- استادیار دانشکده علوم مهندسی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران
۳- استاد دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

[*]akhojasteh@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: [۹۶/۳/۱۵]　　تاریخ پذیرش: [۹۶/۱۰/۹]

چکیده

وجود ترک در محیط‌های مختلف امری دور از انتظار نیست، از سویی دیگر توسعه روز افزون مواد کامپوزیتی توجه به اندرکنش ترک با محیط‌های ناهمسانگرد را دوچندان کرده است. همچنین ایجاد و گسترش ترک در جامدات یکی از عوامل مهمی است که برای جلوگیری از آثار مخرب ترک روی محیط باید مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به این موضوع که ترک ممکن است در معرض مودهای مختلف شکست قرار بگیرد، بررسی ترک تحت شرایط مرزی مختلف، کمک شایانی به پیش‌بینی رفتار محیط دارای ترک می‌کند. در این پژوهش به صورت تحلیلی مودهای مختلف شکست (بازشدگی، برشی و پارگی) ترک سکه‌ای واقع در لایه ایزوتروپ جانبی بررسی شده است. در هر مود با نوشتن شرایط مرزی حاکم بر مساله و جایگذاری آن‌ها در معادلات حاکم بر محیط و تغییر متغیرهای مناسب، شرایط مرزی به معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل می‌شود. در نهایت با حل معادلات انتگرالی دوگانه، مسائل مورد بررسی هر کدام به یک معادله فردهلم نوع دوم که تابعی از شعاع ترک، ضخامت لایه و خواص محیط است، منتهی می‌شوند که به علت پیچیدگی، این معادلات دارای جواب تحلیلی نیست. در نتیجه با به کارگیری روش عددی مناسب معادلات حل شده و ضریب شدت تنش نوک ترک سکه‌ای برای مودهای مختلف حاصل می‌شود، نتایج شدت تنش برای مصالح مختلف ایزوتروپ جانبی بر حسب نسبت ضخامت لایه به شعاع ترک سکه‌ای به دست آمدند. نتایج نشان‌دهنده آن هستند که ناهمسانی محیط تاثیر قابل توجهی روی ضرایب شدت تنش می‌گذارد و اینکه همواره با افزایش ضخامت لایه به شعاع ترک ضریب شدت تنش در مودهای مختلف افزایش و این مقدار در ضخامت‌های زیاد مستقل از نوع مصالح محیط به ضریب شدت تنش محیط بی‌نهایت میل پیدا می‌کند.

واژگان کلیدی: ترک سکه‌ای، ایزوتروپ جانبی، معادله فردهلم، ضریب شدت تنش

۱- مقدمه

در چند دهه اخیر با توجه به رشد روز افزون مواد کامپوزیتی، مطالعه مواد ناهمسان در شاخه مکانیک خاک توسط پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است. از سویی وجود عیب و نقص همچون ترک در محیط‌های مختلف امری معمول است. همان‌گونه که واضح است، وجود ترک و حفره موجب کاهش مقاومت و طول عمر سازه‌ها می‌شود. بررسی آثار بارگذاری‌های مختلف در محیط‌های دارای ترک، کاربردهای عملی زیادی در شاخه مکانیک خاک دارد. بنابراین بررسی اندرکنش ترک با محیط‌های ایزوتروپ جانبی اهمیت

دوچندانی پیدا می‌کند. همچنین همواره راه‌حل‌های تحلیلی برای فهم رفتار محیط در قبال مسائل الاستیسیته و مکانیک شکست مورد توجه بوده‌اند.

توزیع تنش در جسم جامد الاستیک بی‌نهایت شامل ترک سکه‌ای شکل، باز شده تحت فشار اعمالی بر روی سطوح ترک، برای اولین بار توسط سک [1] و اسندون [2] مورد بررسی قرار گرفت. لوانگراب [3] توزیع تنش در مجاورت ترک سکه‌ای شکل در محیط الاستیک ایزوتروپ با ضخامت محدود را مورد بررسی قرار داد. کلینز [4] توزیع تنش متقارن محوری در محیط جامد الاستیک بی‌نهایت و صفحه ضخیم شامل ترک‌های سکه‌ای شکل را مطالعه نمود. کسیر و سیه [5] ترک سکه‌ای موجود در صفحه ضخیم ایزوتروپ را تحت بارگذاری‌های متفاوت مورد بررسی قرار دادند. دهاوان [6] مساله اعمال فشار بر روی ترک خارجی در صفحه ضخیم را بررسی نمود. سلوادرای و سینگ [7] مساله بارگذاری داخلی ترک حلقوی مسطح واقع در محیط بی‌نهایت ایزوتروپ را حل نمودند. معادلات انتگرالی حاکم بر مساله با استفاده از بسط سری حل و ضرایب شدت تنش مربوط به نوک داخلی و خارجی ترک به صورت تقریبی بدست آمد. توزیع تنش متقارن محوری در محیط بی‌نهایت ایزوتروپ شامل ترک حلقوی مسطح تحت پیچش محوری توسط دنی‌لاک و سینگ [8] مورد بررسی قرار گرفت و روابطی تقریبی برای ضرایب شدت تنش ترک ارائه شد. جواب‌های صریحی برای تنش و تغییرمکان مساله بارگذاری نامتقارن ترک سکه‌ای به وسیله بارهای متمرکز عمود بر ترک در محیط ایزوتروپ جانبی توسط فابریکنت [9] به دست آمد.

اسکندری و همکاران [10] مساله ترک حلقوی واقع در محیط پیزوالکتریک که در معرض بارگذاری میدان دور قرار دارد، را بر اساس سازگاری انرژی به صورت تحلیلی مطالعه نمودند. ترک سکه‌ای واقع در عمق دلخواه محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت بارگذاری قائم دینامیکی توسط اسکندری‌قادی و همکاران [11] مورد مطالعه قرار گرفت. فابریکنت [12] معادلات حاکم بر ترک مسطح دلخواه با موقعیت دلخواه در محیط ایزوتروپ جانبی را به دست آورد.

در این پژوهش ترک سکه‌ای موجود در لایه محدود ایزوتروپ جانبی تحت مودهای بازشدگی، برشی و پارگی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از معادلات حاکم بر محیط و جایگذاری آن‌ها در شرایط مرزی مساله مورد بررسی، معادلات انتگرالی دوگانه حاصل می‌شود. این معادلات با استفاده از روش نوبل به یک معادله فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود. به دلیل پیچیدگی معادلات، با به کارگیری روش عددی مناسب، ضرایب شدت تنش (مودهای اول، دوم وسوم) ترک سکه‌ای به دست می‌آیند. با نظر گرفتن انواع مصالح ایزوتروپ جانبی اثر پارامترهای مختلف بر روی ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- معادلات کلی حاکم بر مساله

محیط ارتجاعی با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای $(r;\theta;z)$ چنان در نظر می‌گیریم که محور z عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد. در این صورت معادلات تعادل استاتیکی بر حسب تغییرمکان‌ها در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود [13]:

$$\begin{aligned}
&c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\\
&\quad+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)-2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\\
&\quad+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}=0\\
&c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\\
&\quad+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)+2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\\
&\quad+(c_{13}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}=0\\
&c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\\
&\quad+(c_{13}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z}\right)=0
\end{aligned}\tag{۱}$$

که در آن u_r، u_θ، u_z مولفه‌های برداری تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r، θ، z و همچنین c_{ij} ثابت‌های الاستیسیته محیط جامد است. میدان‌های تغییرمکان و تنش به طور کلی عبارتند

از [14]:

$$\tilde{u}_{r_m}^{m+1} + i\tilde{u}_{\theta_m}^{m+1} = \alpha_3\xi\frac{d\tilde{F}_m^m}{dz} - i\xi\tilde{\chi}_m^m$$
$$\tilde{u}_{r_m}^{m-1} - i\tilde{u}_{\theta_m}^{m-1} = -\alpha_3\xi\frac{d\tilde{F}_m^m}{dz} - i\xi\tilde{\chi}_m^m \qquad (۲)$$
$$\tilde{u}_{z_m}^{m} = \left[\alpha_2\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2(1+\alpha_1)\right]\tilde{F}_m^m$$

و

$$\tilde{\sigma}_{zz_m}^{m} = \frac{d}{dz}\left[\alpha_3 c_{13}\xi^2 - c_{33}\xi^2(1+\alpha_1) + c_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right]\tilde{F}_m^m$$
$$\tilde{\sigma}_{zr_m}^{m+1} + i\tilde{\sigma}_{z\theta_m}^{m+1} = c_{44}\xi\left[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1)\right]\tilde{F}_m^m - c_{44}\xi i\frac{d\tilde{\chi}_m^m}{dz}$$
$$\tilde{\sigma}_{zr_m}^{m-1} - i\tilde{\sigma}_{z\theta_m}^{m-1} = -c_{44}\xi\left[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1)\right]\tilde{F}_m^m - c_{44}\xi i\frac{d\tilde{\chi}_m^m}{dz}$$
(۳)

که زیرنویس m نشان‌دهنده ضریب mام سری فوریه و بالانویس و علامت مد نشان‌دهنده مرتبه هنکل است. ضرایب دیگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_1 = \frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}};\ \alpha_2 = \frac{c_{44}}{c_{66}};\ \alpha_3 = \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{66}} \qquad (٤)$$
$$\tilde{F}_m^m(\xi;z) = A_m(\xi)e^{-\xi s_1 z} + B_m(\xi)e^{\xi s_1 z} + C_m(\xi)e^{-\xi s_2 z} + D_m(\xi)e^{\xi s_2 z} \qquad (٥)$$
$$\tilde{\chi}_m^m(\xi;z) = E_m(\xi)e^{-\xi s_0 z} + F_m(\xi)e^{\xi s_0 z} \qquad (٦)$$

همچنین در روابط فوق $s_0 = 1/\sqrt{\alpha_2}$ و پارامترهای s_1 و s_2 ریشه‌های معادله زیر است، که نمی‌توانند صفر یا موهومی خالص باشند [13]:

$$c_{33}c_{44}s^4 + [c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}]s^2 + c_{11}c_{44} = 0 \qquad (٧)$$

۳- مود اول شکست

۳-۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی دوگانه

لایه‌ای ایزوتروپ جانبی به ضخامت $2h$ شامل ترک سکه ای شکل در مرکز لایه به شعاع a به طوری که سطوح ترک در معرض تنش فشاری به اندازه $p(r)$ و سطوح لایه محدود فاقد هر گونه حرکتی باشند، را در نظر بگیرید (شکل ۱). با توجه به تقارن موجود در مساله نسبت به محور $z = 0$، مساله فقط برای حالت $z \geq 0$ حل می‌شود، بنابراین شرایط مرزی مساله عبارتند از:

$$u_r(r;h) = 0; \qquad 0 \leq r < \infty \qquad (٨)$$
$$u_z(r;h) = 0; \qquad 0 \leq r < \infty \qquad (٩)$$
$$\sigma_{rz}(r;0) = 0; \qquad 0 \leq r < \infty \qquad (١٠)$$
$$\sigma_{zz}(r;0) = p(r); \qquad 0 \leq r < a \qquad (١١)$$
$$u_z(r;0) = 0; \qquad a \leq r < \infty \qquad (١٢)$$

شکل ۱. ترک سکه‌ای شکل تحت مود یک موجود در صفحه ضخیم

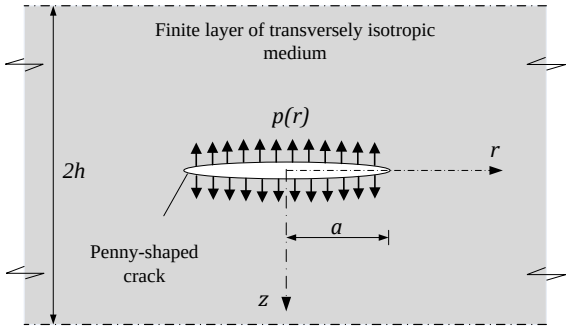

Fig. 1. Penny-shaped crack under mode I in a thick plate

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_\theta = 0$ و $m = 0$ است. با انتخاب میدان‌های مناسب از روابط (۲) و (۳) شرایط مرزی (۱۰)–(۸) را ارضا نموده و چهار مجهول موجود در مساله را براساس یک مجهول بازنویسی می‌کنیم. در ادامه با اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) به معادلات انتگرالی دوگانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty \xi K_1(\xi)\, F_1(\xi;h) J_0(\xi r) d\xi = p(r); \quad 0 \leq r < a \qquad (١٣)$$
$$\int_0^\infty K_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0; \quad a \leq r < \infty \qquad (١٤)$$

که $K_1(\xi) = \alpha_1 A_0(\xi)$. همچنین $F_1(\xi;h)$ و α_1 ضرایب مشخصی است. معادلات انتگرالی دوگانه (۱۳ و ١٤) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی نماییم:

$$\int_0^\infty \xi K_1(\xi)\{1 + H_1(\xi;h)\} J_0(\xi r) d\xi = p(r); \ r < a \qquad (١٥)$$
$$\int_0^\infty K_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0; \quad r \geq a \qquad (١٦)$$

به طوری که $H_1(\xi;h) = F_1(\xi;h) - 1$. بر اساس مقاله نوبل [15] روابط (۱۵ و ١٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^\infty \xi^{0.5} K_1(\xi)\{1 + H_1(\xi;h)\} J_{0.5}(\xi r) d\xi = \frac{r^{-0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)} Q_1(r); \ r < a \qquad (١٦)$$
$$\int_0^\infty \xi^{0.5} K_1(\xi) J_{0.5}(\xi r) d\xi = 0; \quad r \geq a \qquad (١٧)$$

به طوری که

$$Q_1(r)=\int_0^r tp(t)(r^2-t^2)^{-0.5}dt \qquad (۱۸)$$

برای تبدیل معادلات انتگرالی فوق به معادله فردهلم فرض می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \xi^{0.5}K_1(\xi)J_{0.5}(\xi r)d\xi=\frac{r^{-0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\theta(r);r<a \qquad (۱۹)$$

که $\theta(r)$ تابعی مجهول است. با توجه به معادلات (۱۶) و (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty \xi^{0.5}K_1(\xi)J_{0.5}(\xi r)d\xi=\begin{cases}\frac{r^{-0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\theta(r);r<a\\ 0; \quad a>r\end{cases} \qquad (۲۰)$$

با کمک قضیه تبدیل معکوس هنکل خواهیم داشت:

$$K_1(\xi)=\frac{\xi^{0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\int_0^a \gamma^{0.5}\theta(\gamma)J_{0.5}(\xi\gamma)d\gamma \qquad (۲۱)$$

برای یافتن معادله‌ای برای $\theta(\gamma)$، ابتدا رابطه (۱۶) را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\int_0^\infty \xi^{0.5}K_1(\xi)J_{0.5}(\xi r)d\xi+\int_0^\infty \xi^{0.5}H_1(\xi;h)K_1(\xi)J_{0.5}(\xi r)d\xi=\frac{r^{-0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}Q_1(r); \quad r<a \qquad (۲۲)$$

حال اگر از رابطه (۲۱)، $K_1(\xi)$ را در رابطه بالا جایگذاری نماییم، معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم مطابق زیر برای $\theta(r)$ حاصل می‌شود:

$$\theta(r)+r^{0.5}2^{-0.5}\Gamma(0.5)\int_0^\infty \xi^{0.5}H_1(\xi;h)\left[\frac{\xi^{0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\int_0^a \gamma^{0.5}\theta(\gamma)J_{0.5}(\xi\gamma)d\gamma\right]J_{0.5}(\xi r)d\xi=Q_1(r) \qquad (۲۳)$$

پس از ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\theta(r)+\frac{1}{\pi}\int_0^a M_1(r;\gamma;h)\theta(\gamma)d\gamma=Q_1(r); \quad r<a \qquad (۲۴)$$

که در آن

$$M_1(r;\gamma;h)=\pi(r\gamma)^{0.5}\int_0^\infty \xi H_1(\xi;h)J_{0.5}(\xi r)J_{0.5}(\xi\gamma)d\xi \qquad (۲۵)$$

زمانی می‌توان روش فوق را به کاربرد که حد $H_1(\xi;h)$ وقتی ξ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، صفر شود یا به عبارت دیگر $\lim_{\xi\to\infty}(1+H_1(\xi;h))=1$. اما در مساله مورد بررسی $\lim_{\xi\to\infty}(1+H_1(\xi;h))=L_1$ می‌شود که L_1 یک عدد ثابت وابسته به خواص محیط است. پس با ضرب عبارت $(1+H_1(\xi;h))$ در L_1^{-1}، شرط همگرایی ارضا می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که برای برقرار ماندن شرایط اولیه مساله، طرفین رابطه (۱۵) باید در L_1^{-1} ضرب شوند. بنابراین معادلات انتگرالی (۱۵ و ۱۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\int_0^\infty \xi K_1(\xi)\{1+H_1(\xi;h)\}J_0(\xi r)d\xi=\frac{p(r)}{L_1}; \; r<a \qquad (۲۶)$$

$$\int_0^\infty K_1(\xi)J_0(\xi r)d\xi=0; \quad r\geq a \qquad (۲۷)$$

که در آن

$$H_1(\xi;h)=\frac{F_1(\xi;h)}{L_1}-1 \qquad (۲۸)$$

در نهایت معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta(r)+\frac{1}{\pi}\int_0^a M_1(r;\gamma;h)\theta(\gamma)d\gamma=\frac{Q_1(r)}{L_1}; \quad r<a \qquad (۲۹)$$

ملاحظه می‌شود که معادلات انتگرلی دوگانه ارائه شده در روابط (۱۵ و ۱۶) به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم (۲۹) تبدیل شد. با جایگذاری $J_{0.5}(x)=\sqrt{2/\pi x}\sin(x)$ در رابطه (۲۵) داریم:

$$M_1(r;\gamma;h)=2\int_0^\infty H_1(\xi;h)\sin(\xi r)\sin(\xi\gamma)\,d\xi \qquad (۳۰)$$

۳-۲- ضریب شدت تنش مود بازشدگی

ضریب شدت تنش مود بازشدگی، مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$K_I^a=\lim_{r\to a^+}\sqrt{2(r-a)}\sigma_{zz}(r;0) \qquad (۳۱)$$

داریم:

$$K_1(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \theta(\gamma)\sin(\gamma\xi)\,d\gamma=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\theta(a)\cos(\xi a)}{\xi}+\int_0^a \theta'(\gamma)\frac{\cos(\xi\gamma)}{\xi}d\gamma\right] \qquad (۳۲)$$

همچنین می‌توان نشان داد که

$$\sigma_{zz}(r;0)=\int_0^\infty \xi K_1(\xi)J_0(\xi r)d\xi+\int_0^\infty \xi K_1(\xi)H_1(\xi;h)J_0(\xi r)d\xi \qquad (۳۳)$$

با استفاده از روابط (۳۳-۳۱)، ضریب شدت تنش مود بازشدگی برابر است با

$$K_I^a=(1+L_1)\frac{2}{\pi}\frac{\theta(a)}{a^{0.5}} \qquad (۳۴)$$

۳-۳- نتایج عددی و بحث

برای ارزیابی درستی روش عددی به کارگرفته شده و آثار ناهمسانی محیط روی نتایج، تعدادی ماده ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی انتخاب شدند. ویژگی‌های مواد در جدول (۱) آورده شده است که E و E' به ترتیب مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی و عمود بر آن است. G' مدول برشی صفحه عمود بر صفحه ایزوتروپی، ν معرف ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپی و ν' معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپی است. مثبت و معین بودن انرژی توسط شرط‌های زیر برای مصالح مورد بررسی قرار گرفته است [16]:

$$c_{11} > |c_{12}|;\quad (c_{11}+c_{12})c_{33} > 2c_{13}^2;\quad c_{44} > 0 \qquad (۳۵)$$

قبل از بحث در مورد نتایج عددی لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده با فرض $p(r) = -p_0$ می‌باشند. نمودار (۲) نشان دهنده ضریب شدت تنش به ازای مصالح با E' مختلف می‌باشد. همان طور که ملاحظه می‌شود با افزایش E' ضریب شدت تنش مود بازشدگی کاهش قابل توجهی می‌یابد. تاثیر پارامتر G' در شکل (۳) نشان داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با کاهش G'ضریب شدت تنش مود بازشدگی کاهش می‌یابد. شکل (٤) نشان دهنده تغییرات E است. همانطور که مشخص است با تغییرات این پارامتر متعلق به صفحه ایزوتروپی، K_I^a تغییر محسوسی نمی‌کند و تقریبا برای همه مصالح یکسان می‌باشد. همچنین شکل (۵) بیانگر آن است که با افزایش ν ضریب شدت تنش با کاهش روبرو می‌شود.

نکته‌ای که در شکل‌های (۵-۲) برای همه مصالح قابل مشاهده است این است که ضریب شدت تنش در هر حالت با افزایش نسبت ضخامت لایه به شعاع ترک افزایش می‌یابد به طوری که این افزایش برای ضخامت‌های کم چشمگیر و هر چقدر ضخامت لایه بزرگتر شود و به سمت بی‌نهایت میل نماید ضریب شدت تنش بازشدگی به مقدار ثابتی که همان ضریب شدت تنش برای محیط بی‌نهایت

شکل ۲. تاثیر E' بر روی ضریب شدت تنش مود بازشدگی

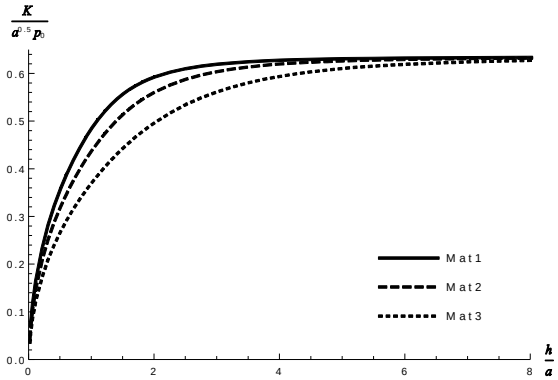

Fig . 2. The effect of E' on the opening stress intensity factor

شکل (۳) تاثیر G' بر روی ضریب شدت تنش مود بازشدگی

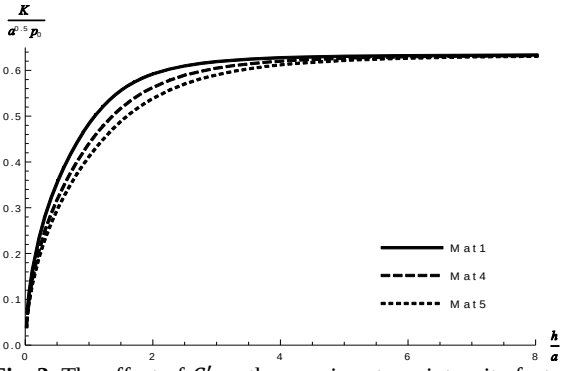

Fig. 3. The effect of G' on the opening stress intensity factor

جدول ۱. ثابت‌های مهندسی مصالح

Mat	E	E'	G	G'	$\nu;\nu'$	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}
1*	5	5	2	2	0.25	6	2	2	6	2	2
2+	5	10	2	2	0.25	5.6	1.6	1.8	10.9	2	2
3+	5	25	2	2	0.25	5.4	1.4	1.7	25.9	2	2
4+	5	5	2	1	0.25	6	2	2	6	1	2
5+	5	5	2	0.67	0.25	6	2	2	6	0.67	2
6+	10	5	4	2	0.25	14	6	5	7.5	2	4
7+	15	5	6	2	0.25	26	14	10	10	2	6
8*	5	5	2	2	0.1	5.1	0.5	0.5	5.1	2.3	2.3
9*	5	5	2	2	0.4	10.7	7.1	7.1	10.7	1.8	1.8

*Isotropic +Transversely isotropic

Table 1. Properties of synthetic materials

شکل (٤) تاثیر E بر روی ضریب شدت تنش مود بازشدگی

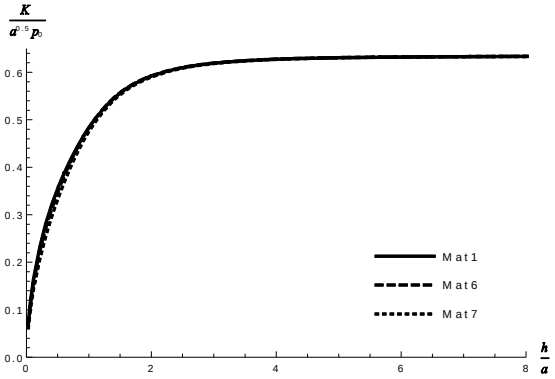

Fig. 4. The effect of E on the opening stress intensity factor

شکل ٥. تاثیر ν روی ضریب شدت تنش مود بازشدگی

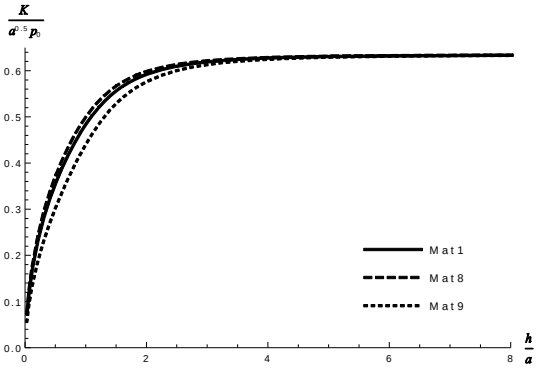

Fig. 5. The effect of ν on the opening stress intensity factor

است، میل می‌کند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ضریب شدت تنش برای محیط بی‌نهایت مستقل از نوع ماده تشکیل دهنده محیط است.

٤- مود دوم شکست

۴-۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی دوگانه

لایه‌ای ایزوتروپ جانبی به ضخامت $2h$ شامل ترک سکه‌ای شکل در مرکز لایه به شعاع a به طوری که سطوح ترک در معرض تنش برشی شعاعی به اندازه $\tau(r)$ و سطوح لایه محدود فاقد هر گونه حرکتی باشند، را در نظر بگیرید (شکل ٦). با توجه به تقارن موجود در مساله نسبت به محور $z=0$، مساله فقط برای حالت $z \geq 0$ حل می‌شود، بنابراین شرایط مرزی مساله عبارتند از:

$$u_r(r;h)=0; \qquad 0 \leq r < \infty \tag{٣٦}$$

$$u_z(r;h)=0; \qquad 0 \leq r < \infty \tag{٣٧}$$

$$\sigma_{zz}(r;0)=0; \qquad 0 \leq r < \infty \tag{٣٨}$$

$$\sigma_{rz}(r;0)=\tau(r); \qquad 0 \leq r < a \tag{٣٩}$$

$$u_r(r;0)=0; \qquad a \leq r < \infty \tag{٤٠}$$

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_\theta=0$ و $m=0$ می‌باشند. با انتخاب میدان‌های مناسب از روابط (۲) و (۳) شرایط مرزی (۳۸-۳٦) را ارضا نموده و چهار مجهول موجود در مساله را براساس یک مجهول بازنویسی می‌کنیم. در ادامه با اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی (۳۹) و (٤٠) به معادلات انتگرالی دوگانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty \xi K_2(\xi)\, F_2(\xi;h) J_1(\xi r) d\xi = \tau(r); \quad 0 \leq r < a \tag{٤١}$$

$$\int_0^\infty K_2(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0; \quad a \leq r < \infty \tag{٤٢}$$

شکل ٦. ترک سکه‌ای شکل تحت مود دو موجود در صفحه ضخیم

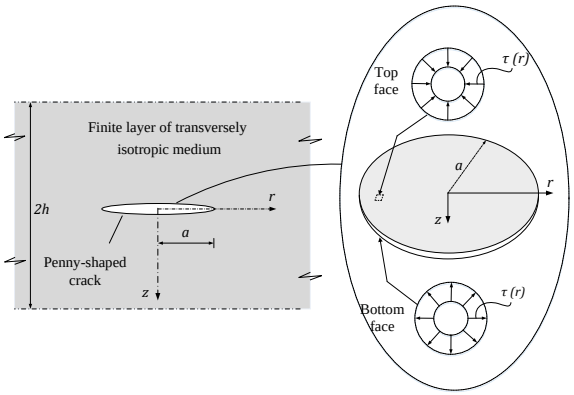

Fig. 6. Penny-shaped crack under mode II in a thick plate

که $K_2(\xi)=\alpha_2 A_0(\xi)$. همچنین $F_2(\xi;h)$ و α_2 ضرایب مشخصی می‌باشند. معادلات انتگرالی دوگانه (٤١ و ٤٢) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی نماییم:

$$\int_0^\infty \xi K_2(\xi)\{1+H_2(\xi;h)\} J_1(\xi r) d\xi = \frac{\tau(r)}{L_2}; \; r < a \tag{٤٣}$$

$$\int_0^\infty K_2(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0; \quad r \geq a \tag{٤٤}$$

که در آن

$$H_2(\xi;h)=\frac{F_2(\xi;h)}{L_2}-1; \lim_{\xi\to\infty}\big(1+H_2(\xi;h)\big)=L_2 \tag{٤٥}$$

با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳، برای حل معادلات دوگانه تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$K_2(\xi) = \frac{\xi^{0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\int_0^a t^{0.5}\theta(t)J_{1.5}(\xi t)dt \qquad (٤٦)$$

رابطه (٤٦) رابطه (٤٤) را ارضا می‌نماید، با جایگذاری رابطه (٤٦) در رابطه (٤٣) با صرف نظر از ارائه جزئیات مساله به معادله فردهلم نوع دوم زیر منتهی می‌شود:

$$\theta(r) + \frac{1}{\pi}\int_0^a M_2(r;\gamma;h)\theta(\gamma)d\gamma = \frac{Q_2(r)}{rL_2}; \quad r < a \qquad (٤٧)$$

به طوری که

$$M_2(r;\gamma;h) = \pi(r\gamma)^{0.5}\int_0^\infty \xi H_2(\xi;h)J_{1.5}(\xi r)J_{1.5}(\xi\gamma)d\xi \qquad (٤٨)$$

$$Q_2(r) = \int_0^r t^2\tau(t)(r^2-t^2)^{-0.5}dt \qquad (٤٩)$$

۴-۲- ضریب شدت تنش مود برشی

ضریب شدت تنش مود برشی، مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$K_{II}^a = \lim_{r\to a^+}\sqrt{2(r-a)}\sigma_{rz}(r;0) \qquad (٥٠)$$

با استفاده از روابط (٤٣ و ٥٠)، ضریب شدت تنش برابر است با

$$K_{II}^a = (1+L_2)\frac{2}{\pi}\frac{\theta(a)}{a^{0.5}} \qquad (٥١)$$

۴-۳- نتایج عددی و بحث

قبل از بحث در مورد نتایج عددی لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده با فرض $\tau(r) = -p_0$ است. شکل‌های (۱۰-۷) نشان دهنده اثر تغییرات پارامترهای محیط ایزوتروپ جانبی بر روی ضریب شدت مود برشی است. از نمودارها می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که تغییر پارامتر E' تاثیر محسوسی بر روی ضریب شدت تنش برشی ندارد در حالی که با تغییر E و G' ضریب شدت تنش تغییر محسوسی دارد. به طوری که با کاهش G' ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد و با افزایش E ضریب شدت تنش برشی با افزایش روبرو می‌شود. شکل (۱۰) نشان‌دهنده آن است که در ضخامت‌های کم لایه با افزایش پارامتر ν ضریب شدت تنش مود برشی نیز افزیش یافته است.

شکل ۷. تاثیر E' بر روی ضریب شدت تنش مود برشی

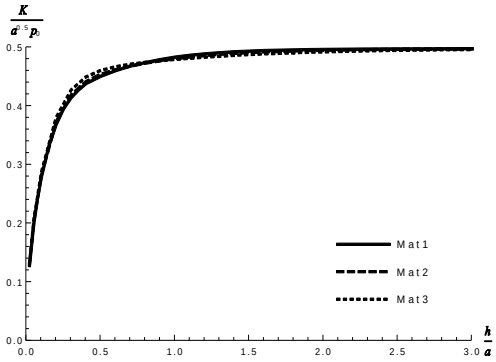

Fig. 7. The effect of E' on the shearing stress intensity factor

شکل ۸ تاثیر G' بر روی ضریب شدت تنش مود برشی

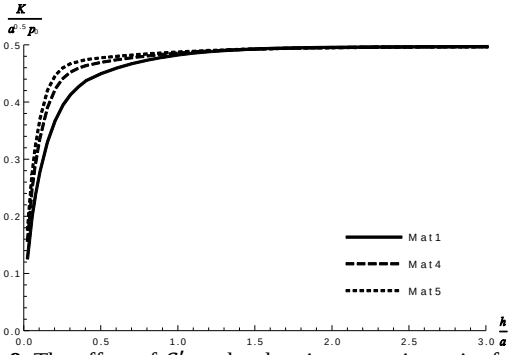

Fig. 8. The effect of G' on the shearing stress intensity factor

مانند مود یک شکست، در مود دوم هم با افزایش نسبت ضخامت لایه به شعاع ترک سکه‌ای ضریب شدت تنش با افزایش مواجه می‌شود به طوری که این افزایش برای نسبت‌های کوچک از شدت زیادی برخوردار است و به تدریج با افزایش ضخامت لایه ضریب شدت تنش افزایش بسیار کمی به خود می‌بینند. به طوری که به ازای نسبت‌های بزرگتر از دو ضخامت لایه به شعاع ترک، ضریب شدت تنش برشی برای مصالح مختلف تمایل به

شکل (۹) تاثیر E بر روی ضریب شدت تنش مود برشی

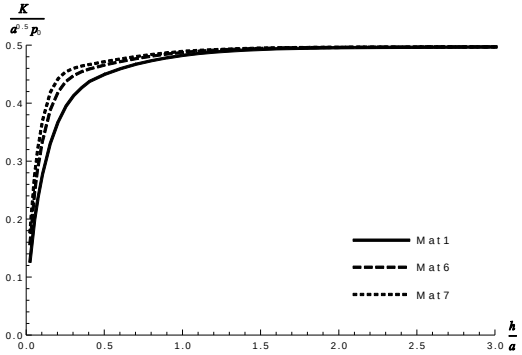

Fig . 9. The effect of E on the shearing stress intensity factor

شکل ۱۰. تاثیر ν بر روی ضریب شدت تنش مود برشی

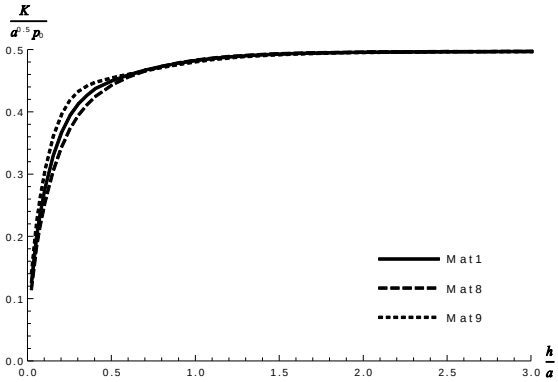

Fig. 10. The effect of ν on the shearing stress intensity factor

یک مقدار ثابت که همان مقدار ضریب شدت تنش برای محیط بی‌نهایت است، را دارد. بنابراین می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که ضریب شدت تنش مود برشی هم برای ضخامت بی‌نهایت از نوع مصالح محیط مستقل است.

۵- مود سوم شکست

۵-۱- تعریف مساله و حل معادلات انتگرالی دوگانه

لایه‌ای ایزوتروپ جانبی به ضخامت $2h$ شامل ترک سکه‌ای شکل در مرکز لایه به شعاع a به طوری که سطوح ترک در معرض تنش برشی خارج از صفحه (ناشی از لنگر پیچشی) به اندازه $\mu(r)$ و سطوح لایه محدود فاقد هر گونه حرکتی باشند، را در نظر بگیرید (شکل ۱۱). با توجه به تقارن موجود در مساله نسبت به محور $z=0$، مساله فقط برای حالت $z \geq 0$ حل می‌شود، بنابراین شرایط مرزی مساله عبارتند از:

$$u_\theta(r;h)=0; \qquad 0 \leq r < \infty \tag{۵۲}$$

$$\sigma_{\theta z}(r;0)=\mu(r); \qquad 0 \leq r < a \tag{۵۳}$$

$$u_\theta(r;0)=0; \qquad a \leq r < \infty \tag{۵۴}$$

با توجه به تقارن محوری موجود در مساله $u_\theta=0$ ، $u_z=0$ و $m=0$ است. با انتخاب میدان‌های مناسب از روابط (۲ و ۳) شرط (۵۲) را ارضا نموده و دو مجهول موجود در مساله را براساس یک مجهول بازنویسی می‌کنیم. در ادامه با اعمال تغییر متغیر مناسب، شرایط مرزی (۵۳ و ۵٤) به معادلات انتگرالی دوگانه زیر کاهش می‌یابند:

$$\int_0^\infty \xi K_3(\xi)\, F_3(\xi;h) J_1(\xi r) d\xi = \mu(r); \quad 0 \leq r < a \tag{۵۵}$$

$$\int_0^\infty K_3(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0; \quad a \leq r < \infty \tag{۵٦}$$

که $K_3(\xi)=\alpha_3 E_0(\xi)$، $F_3(\xi;h)=c_{44}s_0\coth(s_0 h\xi)$ و α_3 ضریب مشخصی است. معادلات انتگرالی دوگانه (۵۵ و۵٦) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی نماییم:

شکل ۱۱. ترک سکه‌ای شکل تحت مود سه موجود در صفحه ضخیم

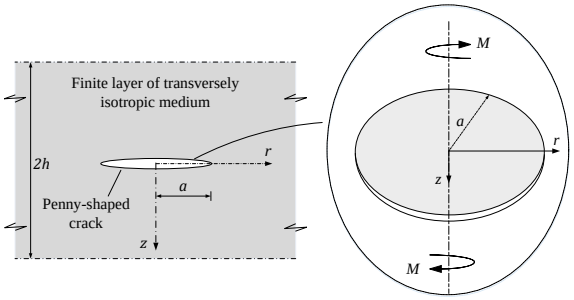

Fig. 11. Penny-shaped crack under mode III in a thick plate

$$\int_0^\infty \xi K_3(\xi)\{1+H_3(\xi;h)\} J_1(\xi r) d\xi = \frac{\mu(r)}{L_3}; \; r < a \tag{۵۷}$$

$$\int_0^\infty K_3(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0; \quad r \geq a \tag{۵۸}$$

که در آن

$$H_3(\xi;h)=\frac{F_3(\xi;h)}{L_3}-1; \lim_{\xi\to\infty}\big(1+H_3(\xi;h)\big)=L_3 \tag{۵۹}$$

با استفاده از روش گفته شده در بخش ۳، برای حل معادلات دوگانه تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$K_3(\xi)=\frac{\xi^{0.5}}{2^{-0.5}\Gamma(0.5)}\int_0^a t^{0.5}\theta(t) J_{1.5}(\xi t) dt \tag{٦۰}$$

رابطه (٦۰) رابطه (۵۸) را ارضا می‌نماید، با جایگذاری رابطه (٦۰) در رابطه (۵۷) با صرف نظر از ارائه جزئیات مساله به معادله فردهلم نوع دوم زیر منتهی می‌شود:

$$\theta(r)+\frac{1}{\pi}\int_0^a M_3(r;\xi;h)\theta(\gamma) d\gamma = \frac{Q_3(r)}{rL_3}; \quad r < a \tag{٦۱}$$

به طوری که

$$M_3(r;\gamma;h) = \pi(r\gamma)^{0.5}\int_0^\infty \xi H_3(\xi;h) J_{1.5}(\xi r) J_{1.5}(\xi\gamma) d\xi \tag{٦۲}$$

$$Q_3(r)=\int_0^r t^2\tau(t)(r^2-t^2)^{-0.5} dt \tag{٦۳}$$

۵-۲- ضریب شدت تنش مود پارگی

ضریب شدت تنش مود پارگی، مطابق رابطه زیر تعریف

می‌شود:

$$K_{III}^{a} = \lim_{r\to a^{+}} \sqrt{2(r-a)}\,\sigma_{\theta z}(r;0) \qquad (٦٤)$$

با استفاده از روابط (۵۷ و ٦٤)، ضریب شدت تنش برابر است با

$$K_{III}^{a} = (1+L_3)\frac{2}{\pi}\frac{\theta(a)}{a^{0.5}} \qquad (٦٥)$$

۵-۳- نتایج عددی و بحث

قبل از بحث در مورد نتایج عددی لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده با فرض $\mu(r) = -p_0$ است. همانطور که ملاحظه می‌شود طبق رابطه (٦١)، ضریب شدت تنش مود پارگی فقط تابعی از G' و E است. بنابراین دیگر پارامترهای محیط تاثیری بر روی ضریب شدت تنش مود پارگی نخواهند گذاشت.

شکل ۱۲. تاثیر G' بر روی ضریب شدت تنش مود پارگی

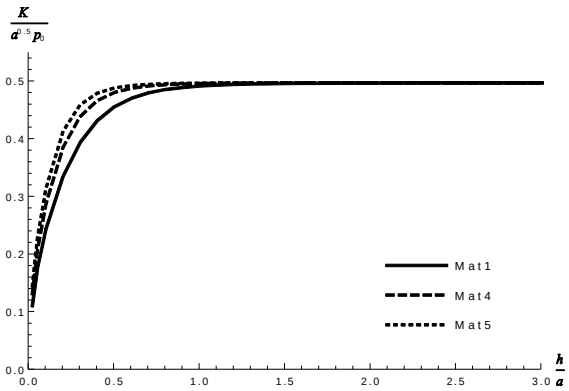

Fig. 12. The effect of G' on the tearing stress intensity factor

شکل (۱۲) بیانگر آن است که با کاهش G' ضریب شدت تنش مود پارگی افزایش می‌یابد و در شکل (۱۳) شاهد آن هستیم که با افزایش پارامتر E ضریب شدت تنش مود پارگی افزایش یافته است. همچنین مانند مودهای شکست بازشدگی و برشی ضریب شدت تنش مود پارگی نیز با افزایش نسبت ضخامت لایه به شعاع ترک سکه‌ای همواره افزایش می‌یابد و در بی‌نهایت این ضریب مستقل از نوع محیط به مقدار ثابتی میل پیدا می‌کند.

شکل ۱۳. تاثیر E بر روی ضریب شدت تنش مود پارگی

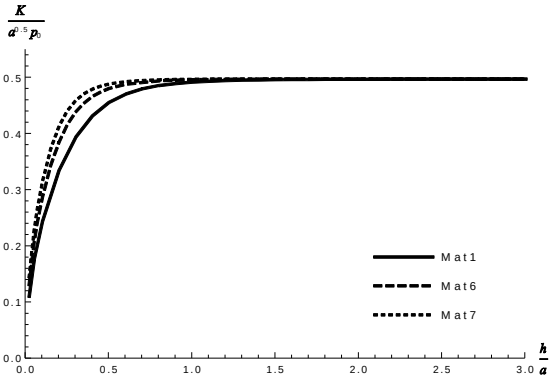

Fig. 13. The effect of E on the tearing stress intensity factor

٦- صحت‌سنجی

ضرایب شدت تنش مودهای بازشدگی، برشی و پارگی ترک سکه‌ای موجود در محیط بی‌نهایت زمانی که ترک در معرض تنش‌های ثابت فشاری، برشی داخل صفحه و برشی خارج از صفحه قرار بگیرد به ترتیب مطابق زیر است [5]:

$$K_{I}^{a} = \frac{2\sqrt{a}}{\pi}p_0 \qquad (٦٦)$$

$$K_{II}^{a} = \frac{\sqrt{a}}{2}p_0 \qquad (٦٧)$$

$$K_{III}^{a} = \frac{\sqrt{a}}{2}p_0 \qquad (٦٨)$$

نتایج عددی ضریب شدت تنش برای مود بازشدگی برای نسبت‌های ضخامت لایه به شعاع ترک بزرگتر از ۸ با تقریب مناسب به مقدار رابطه (٦٦) میل پیدا می‌کنند. همچنین ضریب شدت تنش برای مودهای برشی و پارگی برای نسبت‌های ضخامت لایه به شعاع ترک بزرگتر از ۳ با تقریب مناسب به ترتیب به روابط (٦٧ و ٦٨) میل می‌کنند. این نتایج بیانگر صحت روش عددی و نتایج به دست آمده است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش اندرکنش ترک سکه‌ای تحت مودهای مختلف شکست (بازشدگی، برشی و پارگی) با لایه ایزوتروپ جانبی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از میدان‌های تغییرمکان و تنش حاکم بر محیط و جایگذاری آن‌ها در شرایط مرزی، مساله به حل معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل شد. در ادامه با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب معادلات انتگرالی دوگانه به ازای هر مود به یک معادله فردهلم نوع دوم که به

صورت عددی قابل حل است، کاهش پیدا کردند. نتایج ضریب شدت تنش نوک ترک به ازای مصالح متفاوت ایزوتروپ جانبی برای مودهای مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاکی از تاثیر قابل توجه ناهمسانی محیط روی ضریب شدت تنش مودهای مختلف است بعلاوه اینکه ضریب شدت تنش با افزایش نسبت ضخامت لایه به شعاع ترک سکه‌ای همواره افزایش می‌یابد. در ضمن، هنگامی که ضخامت صفحه به سمت بی‌نهایت میل نماید نتایج ضریب شدت تنش هر سه مود مستقل از نوع مصالح محیط می‌شوند و به یک مقدار مشخص میل پیدا می‌کنند.

۸- مراجع References

[1] Sack, R. A. 1946 Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions. *Proceedings of the Physical Society*, **58**(6), 729.

[2] Sneddon, I. 1946 The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*,**187**, 229-260.

[3] Lowengrub, M. 1961 Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate. *Quarterly of Applied Mathematics*, **19**(2), 119-126.

[4] Collins, W. D. 1962 Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks. I. Cracks in an infinite solid and a thick plate. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **266**.

[5] Kassir, M. K., & Sih, G. C. 1975 Three-dimensional crack problems: A new selection of crack solutions in three-dimensional elasticity(Book). *Leiden, Noordhoff International Publishing(Mechanics of Fracture., 2.*

[6] Dhawan, G. K. 1973 The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic thick plate. *Acta Mechanica*, **16**(3), 255-270.

[7] Selvadurai, A. P. S., & Singh, B. M. 1985 The annular crack problem for an isotropic elastic solid. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **38**(2), 233-243.

[8] Danyluk, H. T., & Singh, B. M. 1986 Problem of an infinite solid containing a flat annular crack under torsion. *Engineering fracture mechanics*, **24**(1), 33-38.

[9] Fabrikant, V. I. 1991 Internal circular crack under normal antisymmetric loading. *Archive of applied mechanics*, **61**(1), 2-17.

[10] Eskandari, M., Moeini-Ardakani, S. S., & Shodja, H. M. 2010 An energetically consistent annular crack in a piezoelectric medium. *Engineering Fracture Mechanics*, **77**(5), 819-831.

[11] Eskandari-Ghadi, M., Ardeshir-Behrestaghi, A., & Neya, B. N. 2013 Mathematical analysis for an axissymmetric disc-shaped crack in transversely isotropic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, **68**, 171-179.

[12] Fabrikant, V. I. 2016 General flat crack arbitrarily located in the transversely-isotropic body. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **82**, 69-76.

[13] Lekhnitskii, S. G. 1963 *Of an anisotropic elastic body*. Vol. 525. San Francisco: Holden-Day.

[14] Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y., & Khojasteh, A. 2007 Elastodynamic potential method for transversely isotropic solid. *Journal of Engineering Mechanics*, **133**(10), 1134-1145.

[15] Noble, B. 1963 The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **59**, 351-362.

[16] Payton, R. C. 2012 *Elastic wave propagation in transversely isotropic media*. Vol. 4. Springer Science & Business Media.

Fracture modes of a penny-shaped crack in a layer of transversely isotropic solid

S. M. Dehghan Manshadi[1], S. Nategh[1], A. Khojasteh[2*], M. Rahimian[3]

1- M.Sc. of Structural Eng., School of Civil Eng., College of Eng., University of Tehran
2- Associate Prof., School of Engineering Science, College of Eng., University of Tehran
3- Prof., School of Civil Eng., College of Eng., University of Tehran

***akhojasteh@ut.ac.ir**

Abstract:
Nowadays fracture behavior composites play an important role in geomechanics engineering. Also, it is common knowledge that all existing structural materials contain different inter- and intra-component defect (cracks, delaminations, etc.). On the other hand, analytical techniques can provide a better physical interpretation of problems. In this paper, by using an analytical approach, effects of the fracture modes (opening, shearing and tearing) on a penny-shaped crack in a layer of transversely isotropic solid has been studied. The layer surfaces are fixed from displacement and the system is loaded symmetrically in each mode. In each mode, by substituting the boundary conditions into the governing equations of the medium, the problem reduced to dual integral equations. With the aid some mathematical methods, the dual integral equations are converted to a Fredholm integral equation which is amenable to numerical solution. These Fredholm integral equations are the functions of the thickness of the layer, the radius of crack and the properties of the layer. To evaluate the effect of anisotropic materials on the stress intensity factors(SIFs), several synthetic types of isotropic and transversely isotropic materials are selected. By employing a numerical method the opening, shearing and tearing SIFs for different ratios of layer thickness are obtained. The results for the opening SIF show that by increasing the E' the SIF decreases substasinaly. On the other hand, an increase in G' leads to increments in opening SIF. Also, the results demonstrate that the variation in E has a negligible effect on the opening SIF. Moreover, an increasing in ν leads reductions in SIF. For the shearing SIF, E' has little effect on the results although by decreasing the G' the shearing SIF increases. Unlike the E', the modulus of the young in the plane (E) of the isotropy has substantial effect on the shearing SIF. An increase in E leads increments in the shearing SIF. Also, by increasing the ν the SIF increases marginally. In the mode III, the tearing SIF is only the functions of G' (the shear modulus for the plane normal to the plane of isotropy) and E. The results show that by reduction in G' the tearing SIF increases and by increasing E the tearing SIF increases. An important point that can be inferred from the results is that by increasing the ratio of layer thickness to the radius of the penny-shaped crack all of the three SIFs increase, this increase for the lower thicknesses is much more in comparison to the greater thicknesses. Additionally, when the layer thickness gets higher, the stress intensity factors for all the materials tend to a constant coefficient. This means that when the layer thickness gets greater and tends to infinity, the SIFs become independent of the material of the layer.

Keywords: Penny-shapped crack, Transversely isotropic, Fredholm equation, Stress intensity Factor (SIF).