

محاسبه مستقیم ضرایب ترم آزاد در معادلات انتگرال مرزی تغییر مکانی برای مسائل ایزوتروپ سه بعدی

بابک امیدوار^{۱*}، محمد رحیمیان^۲، تکتّم محمدنژاد^۳، علیرضا صناعی^۴

۱- استادیار دانشکده محیط زیست دانشگاه تهران

۲- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

۳- دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی شریف

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

bomidvar@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۲/۰۱

چکیده- در این مقاله ضمن مرور چگونگی حصول معادله انتگرال مرزی جابه‌جایی با استفاده از قضیه Somigliana، جزئیات محاسبه مستقیم ضرایب ترم آزاد c_{ij} برای مسائل ایزوتروپ خطی در محیط سه بعدی، به تفصیل ارائه می‌شود. با استفاده از نتایج تحقیق حاضر امکان محاسبه مستقیم ضرایب ترم آزاد در مدل‌سازی مسائل بی‌نهایت و نیمه‌بی‌نهایت که نمی‌توان از مفهوم حرکت جسم صلب برای محاسبه این ضرایب استفاده کرد، فراهم می‌شود. فرمول‌بندی ارائه شده در مسائلی که شرط همواری در محل تلاقی المان‌های پیوسته، صادق نیست نیز کاربرد دارد. همچنین توابع شکلی مربوط به المان‌های غیرپیوسته، و نیمه‌پیوسته درجه دوم نه‌گره‌ای که در مدل‌سازی سطوح ترک، فصل مشترک لایه‌ها، مرزهای انتهایی محیط‌های نامحدود و بسیاری مسائل دیگر کاربرد دارد، ارائه می‌شود. صحت و کارایی روش پیشنهاد شده برای محاسبه ضرایب c_{ij} با حل و بررسی مثال‌های مکعب تحت تنش یکنواخت، تیر طره تحت حرکت جانبی در تکیه‌گاه، کره الاستیک تحت تنش یکنواخت و تحت جابه‌جایی یکنواخت و در نهایت حفره کروی تحت تنش یکنواخت و تحت جابه‌جایی یکنواخت، اثبات می‌شود.

کلیدواژگان: روش المان مرزی، ضریب ترم آزاد c_{ij} ، معادلات انتگرال مرزی، انتگرال منفرد

۱- مقدمه

امروزه استفاده از روش المان مرزی^۱ برای حل مسائل کاربردی و مهندسی، به طور گسترده‌ای مرسوم شده است و این به دلیل بعضی مزایای این روش نسبت به روش‌های

عددی دیگر مانند اجزای محدود^۲ و تفاوت‌های محدود^۳

است [۱-۲].

ترکیب معادلات انتگرال مرزی^۴ و روش المان مرزی

2. Finite Element
3. Finite Difference
4. Boundary Integral Equation

1. Boundary Element Method

انتگرال مرزی را حل کردند. Guigiani و همکاران [۱۰] الگوریتمی کلی برای المان‌های سطحی منحنی شکل ارائه کردند که در آن انتگرال‌های هیپرسینگولار بر پایه عملیاتی که روی مختصات طبیعی المان‌ها انجام می‌شد، خوش‌رفتار شده است. در ادامه Karami و Derakhshan [۱۱] اثبات کردند که برای ارزیابی انتگرال‌های سوپرسینگولار نیز این الگوریتم قابل تعمیم است. محاسبه‌ی مستقیم انتگرال‌های منفرد با مرتبه‌ی بالاتر، بر پایه‌ی بسط پارامترها با استفاده از سری لورانت، به‌وسیله‌ی Frangi و Guiggiani انجام شد [۱۲] که در آن تکنه‌گی‌ها تا مرتبه r^4 با موفقیت محاسبه شد. اخیراً Gao و همکاران [۱۷-۱۳] روشی برای محاسبه هر نوع انتگرال مرزی دوبعدی و سه‌بعدی منفرد ارائه کرده‌اند که در این روش با تعریف قسمت‌های غیرمنفرد هسته انتگرال به سری‌های توانی در فاصله کلی r و حذف توابع منفرد، هسته انتگرال‌گیری به توابع خوش‌رفتار تبدیل می‌شود. لازم به ذکر است که در این روش، انتگرال‌های منفرد قبل از تقسیم شدن انتگرال‌های مرزی به فرم خوش‌رفتار در می‌آیند.

هم‌چنان‌که ذکر شد یکی از روش‌های محاسبه انتگرال‌های قوی، تفسیر انتگرال منفرد قوی به عنوان مقدار اصلی کوشی CPV و محاسبه مستقیم انتگرال CPV است. در این روش که به روش مستقیم معروف است، ضرایب ترم آزاد c_{ij} نیز باید مستقیماً محاسبه شوند. یعنی علاوه بر دانستن انتگرال‌های CPV به محاسبه ضرایب c_{ij} هم نیاز است و در واقع بدون مشخص بودن این ضرایب، استفاده از این روش امکان‌پذیر نخواهد بود [۱۹-۱۸]. هم‌چنین با توجه به محدودیت روش حرکت جسم صلب در مدل‌هایی که دارای مرز بی‌نهایت است، استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم الزامی است.

برای حل مسائل با هندسه پیچیده مناسب است. در بیش‌تر معادلات انتگرال مرزی^۱، هسته انتگرال‌گیری شامل توابع منفرد است. روش‌های مختلفی برای محاسبه این انتگرال‌ها وجود دارد که با توجه به درجه منفرد بودن و نوع مسئله باید از روش مناسب برای حل این انتگرال‌های منفرد استفاده کرد.

برای انتگرال‌های منفرد ضعیف^۲، منفرد بودن با استفاده از تبدیل مختصات، برداشته شده و سپس با استفاده از روش عددی گوس انتگرال‌های غیرمنفرد محاسبه می‌شود. در این حالت تجزیه دامنه انتگرال‌گیری، به تعدادی زیر دامنه و افزایش تعداد نقاط گوس نیز مؤثر است [۶-۳].

انتگرال‌های منفرد قوی^۳ که در معادلات انتگرال مرزی ظاهر می‌شوند را می‌توان یا با استفاده از روش‌های تحلیلی و کاهش یا برداشتن منفرد بودن، یا با تفسیر انتگرال منفرد قوی به‌عنوان مقدار اصلی کوشی^۴ CPV و حل مستقیم CPV محاسبه کرد.

روش‌های دیگری برای حل انتگرال‌های منفرد به‌وسیله‌ی محققان دیگر به‌کار گرفته شده است که از آن جمله می‌توان به فرمول‌بندی لگاریتمی برای انتگرال‌های منفرد لگاریتمی^۵ [۲] و روش حرکت جسم صلب برای انتگرال‌های منفرد قوی و هیپرسینگولار [۷] اشاره کرد. زوزولیا و گنزالزچی با استفاده از روش Gauss-Ostrogradskii و تئوری گرین به ساده‌سازی حل انتگرال‌های منفرد ضعیف، منفرد و هیپرسینگولار^۵ پرداختند [۸].

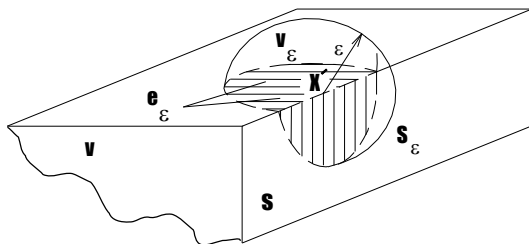
Budreck و Achenbach [۹] با استفاده از المان‌بندی مسائل ترک مسطح، انتگرال منفرد ایجاد شده در معادله

1. Conventional Boundary Integral Equation
2. Weakly Singular
3. Strongly Singular Integrals
4. Cauchy Principal Value
5. Hypersingular

6. Free-Term Coefficients

نقطه میدانی (انتگرال گیری) $x \in S^3$ است. S سطح مرزی مربوط به ناحیه V است. فرمول المان مرزی مستقیم که جابه‌جایی‌های مرزی را به بردارهای تنش مرزی مربوط می‌کند، با حدگیری از معادله (۱) هنگامی که نقطه داخلی X' به سمت نقطه مرزی x میل می‌کند، به دست می‌آید. نقطه X' به وسیله حجم کوچک خارجی v_ϵ با شکل دلخواه s_ϵ محصور می‌شود، بدین ترتیب نقطه X' نقطه داخلی ناحیه جدید $V+v_\epsilon$ خواهد شد. به طور مرسوم در روش المان مرزی، v_ϵ را قسمت خارجی کره به شعاع ϵ ، به مرکز X' در نظر می‌گیرند. با مراجعه به شکل ۱، معادله (۱) به شکل زیر در می‌آید [۱۹]:

$$u_i(X') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon+s_\epsilon} U_{ij}(X',x) t_j(x) ds(x) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon+s_\epsilon} T_{ij}(X',x) u_j(x) ds(x) \quad (2)$$



شکل (۱) نقطه منفرد (چشمه) X' روی سطح مرزی S که به وسیله سطح کروی s_ϵ احاطه شده

هنگامی که $\epsilon \rightarrow 0$ به s_ϵ میل می‌کند. در رابطه (۲)، انتگرال اول شامل هسته‌ای از مرتبه $(1/t)$ است و بدین ترتیب منفرد ضعیف است. منفرد بودن در انتگرال‌های منفرد ضعیف با استفاده از تبدیل مختصات، برداشته شده و سپس با استفاده از روش عددی گوس،^۴ انتگرال‌های غیرمنفرد محاسبه می‌شوند. در این حالت تجزیه دامنه

با استفاده از نتایج تحقیق حاضر، محاسبه مستقیم ضرایب ترم آزاد در مدل‌سازی مسائل بی‌نهایت و نیمه‌بی‌نهایت که نمی‌توان از مفهوم حرکت ممکن صلب برای محاسبه آن‌ها استفاده کرد، ممکن می‌شود. فرمول‌بندی ارائه شده، در مسائلی که شرط همواری در محل تلاقی المان‌های پیوسته صادق نیست نیز کاربرد دارد. هم‌چنین توابع شکلی مربوط به المان‌های غیرپیوسته و نیمه‌پیوسته درجه دوم نه‌گره‌ای که در مدل‌سازی سطوح ترک، فصل مشترک لایه‌ها، مرزهای انتهایی محیط‌های نامحدود و بسیاری مسائل دیگر کاربرد دارد، ارائه می‌شود.

شایان ذکر است که محمدنژاد، برهانی و رضازاده با استفاده از محاسبه مستقیم ضرایب ترم آزاد در معادلات انتگرال مرزی تغییرمکانی، به تحلیل دینامیکی سه‌بعدی سازه‌های مختلف پرداخته‌اند [۲۰-۲۲].

۲- معادله انتگرال مرزی جابه‌جایی

نقطه شروع تحلیل به روش المان مرزی، معادلات انتگرال مرزی است. قضیه Somigliana جابه‌جایی‌های u_i در نقطه داخلی X' را به جابه‌جایی‌های u_j و بردارهای تنش t_j روی سطح S مربوط می‌کند. فرم کلی این معادله برای مسائل برداری سه‌بعدی الاستواستاتیک و الاستودینامیک هارمونیک نسبت به زمان به شکل زیر است [۱۹]:

$$u_i(X') = \int_S U_{ij}(X',x) t_j(x) ds(x) - \int_S T_{ij}(X',x) u_j(x) ds(x) \quad (1)$$

$U_{ij}(X',x)$ و $T_{ij}(X',x)$ به ترتیب پاسخ‌های اساسی^۱ جابه‌جایی و بردار تنش ناشی از حل کلونین است [۲۳-۲۴]. در معادله انتگرال داخلی (۱) نقطه چشمه (روی هم گذاری) $X' \in V^2$ و

3. Field (Integration) Point
4. Gauss Formulae

1. Fundamental Solutions
2. Source (Collocation) Point

۳- مدل سازی

استفاده از معادله انتگرال مرزی، محدودیت‌هایی را برای مدل‌سازی محیط‌های نامحدود و لایه‌ای اعمال می‌کند. با توجه به این‌که در محیط‌های لایه‌ای، نقاط روی فصل مشترک دو محیط، دارای تغییر مکان و بردار تنش مجهول است، برای این‌که همه‌ی مجهولات با استفاده از معادلات انتگرالی قابل دستیابی باشند، استفاده از المان‌های ناپیوسته روی فصل مشترک دو محیط ضروری است. هم‌چنین با توجه به این‌که محیط‌های نامحدود، با تعداد محدودی المان مدل‌سازی می‌شوند، استفاده از المان‌های نیمه‌پیوسته روی مرز انتهایی، اجتناب ناپذیر است. پارامتر هندسه یعنی x_i به‌وسیله‌ی المان‌های درجه دوم پیوسته نه گره‌ای تقریب زده می‌شود. توابع شکلی^۱ به‌صورت

$$M^\alpha(\zeta, \eta) = \frac{1}{4} \zeta (\zeta + \zeta_\alpha) \eta (\eta + \eta_\alpha) \quad (5)$$

برای نقاطی که $\zeta_\alpha, \eta_\alpha = \pm 1$ ؛

$$M^\alpha(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) \eta (\eta + \eta_\alpha)$$

برای نقاطی که $\zeta_\alpha = 0, \eta_\alpha = \pm 1$ ؛

$$M^\alpha(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \zeta (\zeta + \zeta_\alpha) (1 - \eta^2)$$

برای نقاطی که $\zeta_\alpha = \pm 1, \eta_\alpha = 0$ و

$$M^\alpha(\zeta, \eta) = (1 - \zeta^2) (1 - \eta^2)$$

برای نقطه میانی $\zeta_\alpha = 0, \eta_\alpha = 0$ است [۱۹].

جابه‌جایی و بردار تنش برای فصل مشترک لایه‌ها، با استفاده از المان‌های درجه دوم ناپیوسته نه گره‌ای تقریب زده می‌شود. روی مرزهای انتهایی محیط‌های نامحدود و محل تقاطع فصل مشترک لایه‌ها و مرزهای خارجی، مؤلفه‌های جابه‌جایی و بردار تنش، به‌وسیله‌ی المان‌های نیمه‌پیوسته تقریب زده می‌شوند. توابع شکلی برای المان‌های ناپیوسته و

انتگرال‌گیری به تعدادی زیردامنه و افزایش تعداد نقاط گوس نیز مؤثر است.

انتگرال دوم در رابطه (۲) در دستگاه مختصات کروی شامل هسته‌ای از مرتبه $(1/r^2)$ است و منفرد قوی است. این انتگرال را می‌توان با کم کردن و سپس اضافه کردن جمله اول بسط تیلور تابع جابه‌جایی حول نقطه منفرد (نقطه چشمه) محاسبه کرد [۱۹]:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\varepsilon} + s_\varepsilon} T_{ij}(X', x) u_j(x) ds(x) = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\varepsilon}} T_{ij}(X', x) u_j(x) ds(x) + \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} T_{ij}(X', x) [u_j(x) - u_j(x')] ds(x) + \\ u_j(X') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} T_{ij}(X', x) ds(x) \end{aligned} \quad (3)$$

اولین انتگرال در سمت راست رابطه بالا با استفاده از تعریف مقدار اصلی کوشی، قابل انتگرال‌گیری است. به دلیل لزوم پیوستگی هولدر مؤلفه‌های تغییر مکان در نقاط روی هم‌گذاری، مقدار دومین انتگرال صفر خواهد شد و آخرین انتگرال منجر به یک پرش در مقدار جابه‌جایی به اندازه $\alpha_{ij}(X')$ می‌شود. در نهایت معادله انتگرال مرزی جابه‌جایی به شکل زیر در می‌آید [۱۹]:

$$c_{ij}(X') u_j(x') + \int_S T_{ij}(X', x) u_j(x) ds(x) = \int_S U_{ij}(X', x) t_j(x) ds(x) \quad (4)$$

در رابطه بالا \int نمایانگر انتگرال مقدار اصلی کوشی است و مقدار ترم آزاد $c_{ij}(X')$ از حد انتگرال روی سطح s_ε به‌دست می‌آید، $c_{ij}(X') = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(X')$ δ_{ij} دلتای دیراک است).

نیمه پیوسته به شکل روابط (۶) است [۱۹].
 $J^n = |x_\zeta \times x_\eta|$ ، که اندیس‌های ζ و η مشتقات نسبت به ζ و η را نشان می‌دهند.

۴- ضرایب ترم آزاد c_{ij}

روش المان مرزی علاوه بر دانستن انتگرال‌های CPV به محاسبه ضرایب c_{ij} هم نیاز دارد. در واقع با مشخص نبودن مقدار ضرایب c_{ij} روی نقاط روی هم‌گذاری، روش المان مرزی امکان‌پذیر نخواهد بود. در صورتی که نقطه روی هم‌گذاری X' یک نقطه مرزی هموار باشد یعنی تنها یک صفحه بتواند بر آن مماس شود، $c_{ij} = 0.5 \delta_{ij}$ خواهد شد. در حالت کلی نقطه X' ممکن است روی یک لبه (دو صفحه مماسی) و یا در رأس (سه صفحه مماسی یا بیش‌تر) واقع باشد. در این مقاله، محاسبه ضرایب c_{ij} را برای هر مسئله المان مرزی سه‌بعدی ارائه می‌دهیم. رفتار حدی^۱ هسته‌های T_{ij} در نزدیکی نقطه منفرد، برای مسائل الاستواستاتیک و مسائل دینامیکی هارمونیک نسبت به زمان یکسان است و بدین ترتیب مقادیر ضرایب c_{ij} برای مسائل الاستودینامیک هارمونیک دقیقاً مساوی مقادیر متناظرش در مسائل الاستواستاتیک خواهد شد. حالت حدی هسته T_{ij} به شکل زیر است [۱۹]:

$$T_{ij}(X', x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \quad (۸)$$

$$\left\{ \frac{dr}{dn} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\}$$

در رابطه (۸)، ν ضریب پواسن، n_i مؤلفه بردار یکه نرمال بر سطح، $r = |x - X'|$ فاصله نقطه میدان از نقطه روی هم‌گذاری است. ضریب c_{ij} برای مسائل سه‌بعدی الاستواستاتیک و الاستودینامیک هارمونیک از رابطه (۹) محاسبه می‌شود [۱۹]:

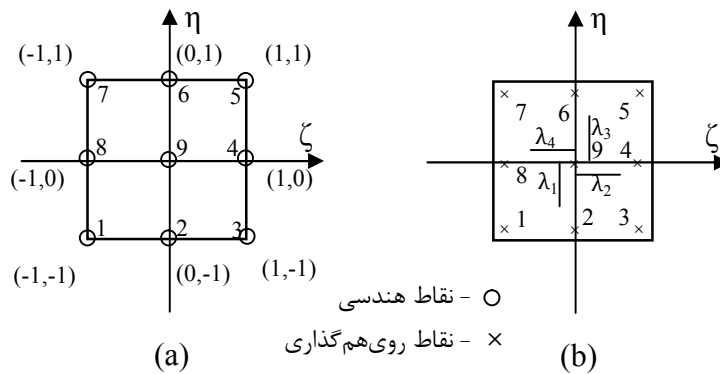
$$\begin{aligned} N^1(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta - \lambda_2) \eta (\eta - \lambda_3) / \\ & \quad [\lambda_4 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^2(\zeta, \eta) &= (\lambda_2 - \zeta) (\lambda_4 + \zeta) \eta (\eta - \lambda_3) / \\ & \quad [\lambda_2 \lambda_4 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^3(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta + \lambda_4) \eta (\eta - \lambda_3) / \\ & \quad [\lambda_2 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^4(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta + \lambda_4) (\lambda_3 - \eta) (\lambda_1 + \eta) / \\ & \quad [\lambda_2 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_3 \lambda_1] \\ N^5(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta + \lambda_4) \eta (\lambda_1 + \eta) / \\ & \quad [\lambda_2 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^6(\zeta, \eta) &= (\lambda_2 - \zeta) (\lambda_4 + \zeta) \eta (\eta + \lambda_1) / \\ & \quad [\lambda_2 \lambda_4 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^7(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta - \lambda_2) \eta (\eta + \lambda_1) / \\ & \quad [\lambda_4 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_3)] \\ N^8(\zeta, \eta) &= \zeta (\zeta - \lambda_2) (\lambda_3 - \eta) (\lambda_1 + \eta) / \\ & \quad [\lambda_4 (\lambda_4 + \lambda_2) \lambda_3 \lambda_1] \\ N^9(\zeta, \eta) &= (\zeta - \lambda_2) (\zeta + \lambda_4) (\eta - \lambda_3) \\ & \quad (\eta + \lambda_1) / [\lambda_2 \lambda_4 \lambda_3 \lambda_1] \end{aligned} \quad (۶)$$

که $i=1,4$ مؤلفه‌های موقعیت پارامتریک نقاط روی هم‌گذاری است و $0 < \lambda_i \leq 1$ است (شکل ۲). زمانی که λ_i ها مساوی یک باشند، توابع شکلی مربوط به المان‌های پیوسته به دست می‌آید. با استفاده از توابع شکلی بالا، برای تقریب زدن هندسه و مؤلفه‌های جابه‌جایی و بردار تنش، بر حسب مقادیر گرهی آن‌ها، معادله انتگرال مرزی جابه‌جایی (۴) به شکل مجزا شده زیر در می‌آید [۶]:

$$\begin{aligned} c_{ij}(x^\beta) u_j(x^\beta) + \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^9 u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \\ T_{ij}[x^\beta, x(\zeta, \eta)] \times N^\alpha(\zeta, \eta) J^n(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \\ = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\alpha=1}^9 t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}[x^\beta, x(\zeta, \eta)] \times \\ N^\alpha(\zeta, \eta) J^n(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (۷)$$

در رابطه‌ی بالا NE تعداد کل المان‌ها، x^β نقطه روی هم‌گذاری گرهی، $N, \beta=1$ (که N تعداد کل نقاط روی هم‌گذاری است) و m ژاکوبین المان ln است.

1. Asymptotic Behavior



شکل (۲) المان‌های درجه دوم نه گره‌ای

به صورت $z_3 = r \cos \theta$ و $z_2 = r \sin \theta \sin \varphi$ ، $z_1 = r \sin \theta \cos \varphi$ است و بدین ترتیب $r_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ، $r_1 = \sin \theta \cos \varphi$ و $r_3 = \cos \theta$ خواهد شد.

برای به دست آوردن زاویه $\bar{\theta}(\varphi)$ مربوط به هر صفحه مماسی در نقطه X' ، با استفاده از معادله آن صفحه در سیستم مختصات کارتزین، یعنی $n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 = 0$ و جای گذاری z_3, z_2, z_1 بر حسب روابط بالا داریم:

$$\operatorname{tg}(\bar{\theta}(\varphi)) = -\frac{n_3}{n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi} \quad (12)$$

n_i بردار یکه نرمالی است که صفحه مماس در نقطه X' را مشخص می‌کند. با توجه به این که $\bar{\theta}$ زاویه‌ای بین 0 و π است، سینوس آن مثبت است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\bar{\theta}(\varphi)) = \left[\frac{n_3^2}{(n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^2 + n_3^2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

با توجه به این که در ربع اول و دوم مثلثاتی، توابع کسینوس و تانژانت هم علامت است، در صورتی که تانژانت زاویه $\bar{\theta}$ یعنی رابطه (۱۲) مثبت باشد، کسینوس آن نیز مثبت است و بالعکس. بدین ترتیب مقدار کسینوس زاویه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c_{ij}(X') = \int_{s_e} T_{ij}(X', x) ds(x) \quad (9)$$

با توجه به این که s_e قسمتی از سطح یک کره است، روی این سطح $r_{,k} = -n_k$ ، $dr/dn = -1$ خواهد بود. برای ساده سازی، سیستم مختصات کروی (r, θ, φ) را در نقطه X' در نظر می‌گیریم. در این سیستم مختصات $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ است. با در نظر گرفتن $C = 1/[8\pi(1-\nu)]$ و $a = (1-2\nu)$ در سیستم مختصات کروی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{ij}(X') = \int_{s_e} C(a\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (10)$$

s_e قسمتی از سطح کره به مرکز X' است که حدود آن به وسیله صفحات مماسی در نقطه X' مشخص می‌شود و dr/dn برای آن مساوی -1 است. برای اندازه گیری زوایای θ و φ ، سیستم کارتزین (z_1, z_2, z_3) به گونه‌ای که محور سوم آن منطبق بر یکی از لبه‌ها در نقطه X' باشد (شکل ۳)، رابطه کلی (۱۰) به فرم واضح تر زیر در می‌آید:

$$c_{ij}(X') = \sum_{l=1}^n \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} C(a\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (11)$$

$n+2$ نمایانگر تعداد کل صفحات مماس در نقطه X' است. رابطه تبدیل مختصات کارتزین به مختصات کروی

تقریب زده می شود:

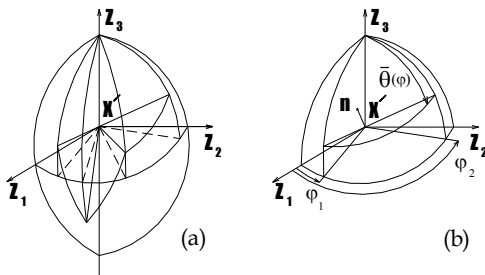
$$\varphi(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}\varphi_L + \frac{1+\zeta}{2}\varphi_{L+1} \quad (16)$$

ژاکوبین تبدیل به مختصات طبیعی که به شکل زیر است:

$$J^L = \frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{\varphi_{L+1} - \varphi_L}{2} \quad (17)$$

بدین ترتیب اگر روابط (۱۵) را به شکل کلی زیر نمایش دهیم،

$$c_{ij}(X') = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} f_{ij}(\varphi) d\varphi \quad (18)$$



شکل (۳) هندسه یک نقطه مرزی غیرهموار

با استفاده از روش عددی گوس، مقدار انتگرال بالا به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$c_{ij}(X') = \sum_{L=1}^n \int_{-1}^1 f_{ij}(\varphi(\zeta)) J^L d\zeta \quad (19)$$

با مراجعه به شکل ۳، دو حالت مهم وجود دارد که در آن $\bar{\theta}(\varphi)$ ثابت است؛ یکی زمانی که $\bar{\theta} = \pi$ ، یعنی نقطه روی هم گذاری X' روی لبه (دو صفحه مماسی) واقع باشد و دیگری زمانی که $\bar{\theta} = \pi/2$ ، یعنی نقطه X' روی رأس واقع باشد، که یک صفحه آن بر دو صفحه دیگر عمود است. در این حالات، انتگرال گیری روی هر دو متغیرهای θ و φ به صورت تحلیلی انجام می شود و مقدار نهایی ضرایب c_{ij} به شکل زیر است:

$$\cos(\bar{\theta}(\varphi)) = \text{sgn}(\text{tg}(\bar{\theta}(\varphi))) \times \left[\frac{(n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^2}{(n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^2 + n_3^2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، sgn تابع علامت است. با توجه به این که عبارات زیر علامت انتگرال در رابطه (۱۱)، توابع ساده مثلثاتی است، انتگرال گیری بر حسب متغیر θ می تواند به شکل تحلیلی انجام شود:

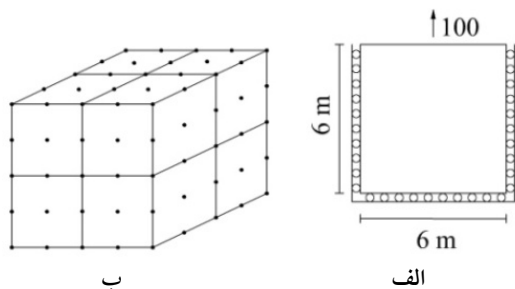
$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} C(a + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \\ &\quad \sin \theta d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C[a(1 - \cos \bar{\theta}(\varphi)) + \\ &\quad \cos^2 \varphi (2 - 3 \cos \bar{\theta}(\varphi) + \cos^3 \bar{\theta}(\varphi))] d\varphi \\ c_{22} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} C(a + 3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &\quad \sin \theta d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C[a(1 - \cos \bar{\theta}(\varphi)) + \\ &\quad \sin^2 \varphi (2 - 3 \cos \bar{\theta}(\varphi) + \cos^3 \bar{\theta}(\varphi))] d\varphi \\ c_{33} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} C(a + 3 \cos^2 \theta) \\ &\quad \sin \theta d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C[a(1 - \cos \bar{\theta}(\varphi)) + \\ &\quad (1 - \cos^3 \bar{\theta}(\varphi))] d\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} c_{12} = c_{21} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} 3C \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad (2 - 3 \cos \bar{\theta}(\varphi) + \cos^3 \bar{\theta}(\varphi))] d\varphi \\ c_{13} = c_{31} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} 3C \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \\ &\quad d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C \cos \varphi \sin^3 \bar{\theta}(\varphi) d\varphi \\ c_{23} = c_{32} &= \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} \int_0^{\bar{\theta}(\varphi)} 3C \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \\ &\quad d\theta d\varphi = \sum_{L=1}^n \int_{\varphi_L}^{\varphi_{L+1}} C \sin \varphi \sin^3 \bar{\theta}(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

در حالت کلی، مقدار نهایی ضرایب c_{ij} با استفاده از انتگرال گیری به روش عددی گوس محاسبه می شود. با استفاده از توابع انترپولاسیون خطی، متغیر φ بر حسب مقادیر ابتدایی و انتهایی دامنه ی انتگرال گیری به شکل زیر

۵- مثال های عددی

برای کنترل صحت و کارایی روش پیشنهاد شده برای محاسبه c_{ij} ، چند مثال بررسی می شود. مسائل مورد بررسی، مسائل الاستودینامیک هارمونیک نسبت به زمان است که بر اساس روش المان مرزی در فضای فرکانسی است. در این تحقیق برای محاسبه ضرایب c_{ij} از فرمول بندی های ارائه شده استفاده شده است؛ هم چنین با تفسیر انتگرال های منفرد قوی به عنوان مقدار اصلی کوشی و محاسبه مستقیم انتگرال های CPV، انتگرال های منفرد قوی محاسبه شده است. این شیوه محاسبه انتگرال های منفرد قوی، به «روش مستقیم» معروف است که از بسط تیلور مرتبه اول هسته، توابع شکلی و ژاکوبین حول نقطه منفرد (نقطه روی هم گذاری) استفاده می کند. شرح کامل این روش به وسیله ی Aliabadi و Mi [۲۵] و Guiggiani و Gigante [۲۶] در مقاله هایی ارائه شده است.



شکل (۴) مکعب تحت تنش یکنواخت: الف) هندسه، ب) المان بندی، ج) جابه جایی در نقطه میانی وجه بالایی.

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= C \left\{ \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{\sin(2\varphi_2) - \sin(2\varphi_1)}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. (2 - 3 \cos \bar{\theta} + \cos^3 \bar{\theta}) + a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - \cos \bar{\theta}) \right\} \\
 c_{22} &= C \left\{ \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{\sin(2\varphi_2) - \sin(2\varphi_1)}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. (2 - 3 \cos \bar{\theta} + \cos^3 \bar{\theta}) + a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - \cos \bar{\theta}) \right\} \\
 c_{33} &= C \{ (\varphi_2 - \varphi_1)(1 - \cos^3 \bar{\theta}) + \\
 &\quad a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - \cos \bar{\theta}) \} \\
 c_{12} = c_{21} &= \frac{C}{2} (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1) \\
 &\quad (2 - 3 \cos \bar{\theta} + \cos^3 \bar{\theta}) \\
 c_{13} = c_{31} &= C (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \sin^3 \bar{\theta} \\
 c_{23} = c_{32} &= C (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \sin^3 \bar{\theta}
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

مقادیر c_{ij} در روابط بالا مربوط به سیستم مختصات محلی (z_1, z_2, z_3) است. برای به دست آوردن مقادیر این ضرایب در سیستم مختصات کلی (x, y, z) باید از تبدیلات تانسوری استفاده کنیم. اگر بردارهای یکه دستگاه مختصات محلی و e_x, e_y, e_z بردارهای یکه دستگاه مختصات مرجع باشند، رابطه بین این بردارهای یکه به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \alpha_x e_x + \alpha_y e_y + \alpha_z e_z \\
 e_2 &= \beta_x e_x + \beta_y e_y + \beta_z e_z \\
 e_3 &= \gamma_x e_x + \gamma_y e_y + \gamma_z e_z
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ها به ترتیب کسینوس های هادی بردارهای یکه e_3, e_2, e_1 در دستگاه مختصات مرجع است. با استفاده از ماتریس تبدیل زیر می توان مقادیر c_{ij} را در دستگاه مختصات کلی به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} c_{xx} \\ c_{yy} \\ c_{zz} \\ c_{xy} \\ c_{xz} \\ c_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x^2 & \beta_x^2 & \gamma_x^2 & 2\alpha_x\beta_x \\ \alpha_y^2 & \beta_y^2 & \gamma_y^2 & 2\alpha_y\beta_y \\ \alpha_z^2 & \beta_z^2 & \gamma_z^2 & 2\alpha_z\beta_z \\ \alpha_x\alpha_y & \beta_x\beta_y & \gamma_x\gamma_y & (\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) \\ \alpha_x\alpha_z & \beta_x\beta_z & \gamma_x\gamma_z & (\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) \\ \alpha_y\alpha_z & \beta_y\beta_z & \gamma_y\gamma_z & (\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ c_{33} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{23} \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

۵-۱- مکعب تحت تنش یکنواخت

مکعبی به ضلع 6m با مشخصات مصالح زیر موجود است: مدول برشی $\mu=10^6 \text{N/m}^2$ ، چگالی $\rho=100 \text{kg/m}^3$ ، نسبت پواسن $\nu=25$ و ضریب میرایی $\beta=0.05$. مکعب روی وجه بالایی تحت تنش نرمال یکنواخت $100e^{\text{dot}} \text{ N/m}^2$ است که در آن ω فرکانس بارگذاری است. تنش برشی روی شش وجه مکعب صفر است. مؤلفه‌های جابه‌جایی روی وجوه جانبی و پایینی مکعب در جهت نرمال بر این سطوح مقید شده‌اند (شکل ۴). هر وجه مکعب با چهار المان درجه دو پیوسته نه گرهی مدل‌سازی شده است. مؤلفه جابه‌جایی در جهت نرمال بر سطح، در نقطه میانی وجه بالایی مکعب، نسبت به فرکانس بی‌بعد ω/ω_1 در شکل ۴ نمایش داده شده است. ω_1 فرکانس طبیعی اول همین مسئله است، زمانی که ضریب میرایی مصالح آن صفر فرض شده است ($\omega_1=45.34 \text{s}^{-1}$). نتایج به‌دست آمده از این روش، با خطوط پیوسته و نتایج Dominguez [۱۹]، با دوایر توپر نمایش داده شده است.

۵-۲- تیر طره تحت حرکت جانبی در تکیه‌گاه

تیر فولادی به ابعاد $4 \times 4 \times 20 \text{m}$ با مشخصات مصالح زیر موجود است: مدول برشی $\mu=0.8 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ، نسبت پواسن $\nu=0.3$ ، چگالی $\rho=7800 \text{kg/m}^3$ و میرایی $\beta=0.05$. تیر در تکیه‌گاه گیردارش تحت حرکت جانبی واحد است (شکل ۵). این تیر با ۲۲ المان درجه دو، المان‌بندی شده است. مؤلفه جابه‌جایی در جهت جابه‌جایی اعمال شده، در نقطه میانی، انتهای آزاد تیر طره در مقابل فرکانس بی‌بعد ω/ω_1 در شکل ۵ ترسیم شده است. ω_1 فرکانس طبیعی اول این تیر طره است ($\omega_1 = 52.66 \text{s}^{-1}$). نتایج به‌دست آمده با خطوط پیوسته و نتایج Dominguez [۱۹] با دوایر توپر نشان داده شده است.

۵-۳- کره الاستیک تحت تنش یکنواخت و تحت**جابه‌جایی یکنواخت**

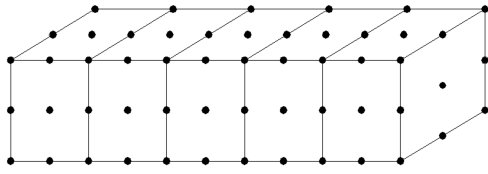
کره‌ای به شعاع 6m با مشخصات مصالح مشابه مکعب مثال اول موجود است. این کره با 24 المان درجه دو پیوسته، مدل شده است.

کره ابتدا تحت جابه‌جایی شعاعی یکنواخت $u_n=1 \text{m}$ (مسئله اول) و سپس تحت تنش شعاعی یکنواخت $t_n=100 \text{N/m}^2$ (مسئله دوم) است. تنش شعاعی محاسبه شده برای مسئله اول در شکل ۶ و جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده برای مسئله دوم در شکل ۷، در مقابل فرکانس بی‌بعد ω/ω_1 نشان داده شده است. فرکانس طبیعی مربوط به مسئله اول $\omega_1=129.71 \text{s}^{-1}$ و فرکانس طبیعی مربوط به مسئله دوم $\omega_1=74.09 \text{s}^{-1}$ است.

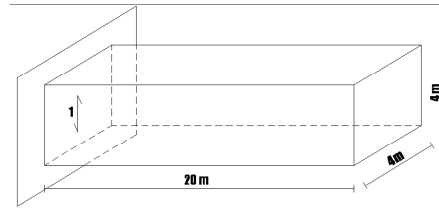
نتایج به‌دست آمده با خطوط پیوسته و نتایج Dominguez [۱۹] با دوایر توپر نمایش داده شده است.

۵-۴- حفره کروی تحت تنش یکنواخت و تحت**جابه‌جایی یکنواخت**

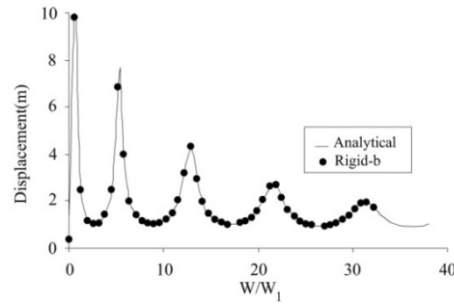
مسئله مورد بررسی، یک محیط الاستیک سه بعدی با یک حفره کروی به شعاع 6m است. مشخصات مصالح مشابه مکعب مثال اول است. شرایط مرزی مسئله به شکل زیر است: اول، جابه‌جایی شعاعی یکنواخت $u_n=1 \text{m}$ و دوم، فشار داخلی یکنواخت $t_n=100 \text{N/m}^2$ است. المان‌بندی مشابه مسئله بالا است. تنش نرمال محاسبه شده برای مسئله اول در شکل ۸ و جابه‌جایی نرمال محاسبه شده برای مسئله دوم در شکل ۹ در مقابل فرکانس بی‌بعد ω/ω_1 نشان داده شده است. برای هر دو این مسائل برابر 129.71s^{-1} است. نتایج به‌دست آمده با خطوط پیوسته و نتایج Dominguez [۱۹] با دوایر توپر نشان داده شده است.



ب

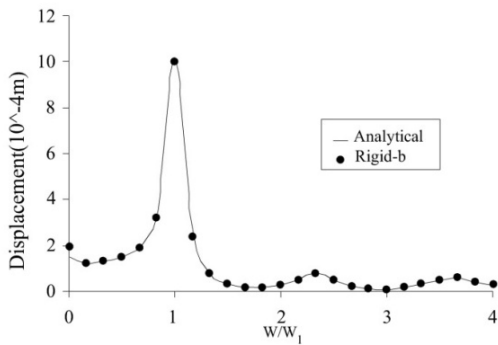


الف



ج

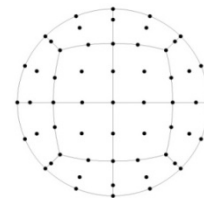
شکل (۵) تیر طره تحت حرکت جانبی در تکیه‌گاه: الف) هندسه، ب) المان‌بندی، ج) جابه‌جایی در نقطه میانی انتهای آزاد



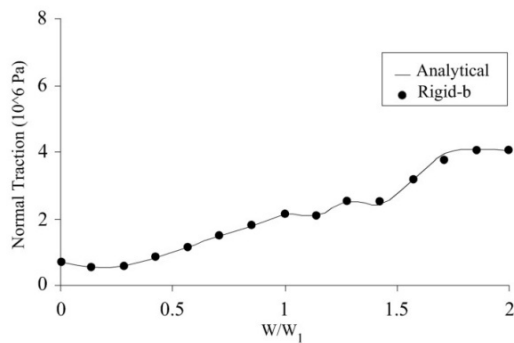
شکل (۷) کره الاستیک تحت تنش شعاعی یکنواخت: جابه‌جایی

شعاعی روی مرز

از مقایسه نتایج به‌دست آمده و نتایج موجود، صحت فرمول‌بندی ارائه شده تأیید می‌شود. لازم به ذکر است که Dominguez [۱۹] برای محاسبه انتگرال‌های منفرد قوی، از روش حرکت جسم صلب استفاده کرده است.

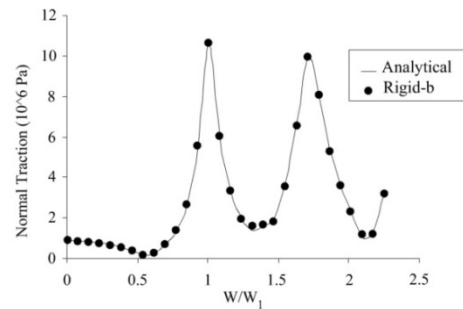


الف



شکل (۸) حفره کروی تحت جابه‌جایی شعاعی یکنواخت: تنش

شعاعی روی مرز



ب

شکل (۶) کره الاستیک تحت جابه‌جایی شعاعی یکنواخت:

الف) المان‌بندی، ب) تنش شعاعی روی مرز

[5] Michlin, S.G. (1962). "Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations", Moscow, Fismatgiz, English translation, Pergamon Press, Oxford.

[۶] بابک امیدوار، ۱۳۸۰. "بررسی پایداری دینامیکی سدهای بتنی ترک‌خورده با استفاده از روش المان مرزی دوگانه در فضای زمانی"، رساله دکترای مهندسی سازه، دانشکده فنی، دانشگاه تهران.

[7] Rudolphi, T.J. (1991). "The use of simple solutions in the regularization of hypersingular boundary integral equations", Mathematical and Computer Modelling (special issue on BIEM/BEM), 15, pp. 269-278.

[8] Zozulya, V.V. and Gonzalez-Chi (1999). "Weakly Singular, Singular and Hypersingular Integrals in 3-D Elasticity and Fracture Mechanics" Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.22, No. 6, pp. 763-775.

[9] Budreck, D.E. and Achenbach, J.D. (1988). "Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method", ASME Journal of Applied Mechanics, 55, pp. 405-412.

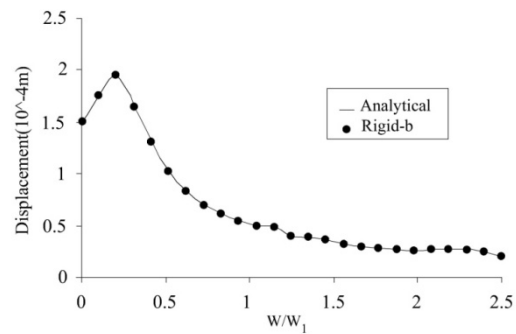
[10] Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. and Rizzo, F.J. (1992). "General algorithm for the numerical solution of hyper-singular boundary integral equations", (ASME) J Applied Mechanics, 59, pp. 604-614.

[11] Karami, G. and Derakhshan, D. (1999). "An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations analysis", Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, pp. 317-326.

[12] Frangi, A. and Guiggiani, M. (2000). "A direct approach for boundary integral equations with high-order singularities", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49, pp. 871-898.

[13] Gao, X.W. (2002). "The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization", Engineering Analysis with Boundary Elements, 26, pp. 905-916.

[14] Gao, X.W. (2005). "Evaluation of regular and singular domain integrals with boundaryonly



شکل (۹) حفره کروی تحت تنش شعاعی یکنواخت: جابه‌جایی

شعاعی روی مرز

۶- نتیجه‌گیری

جزئیات محاسبه ضرایب η برای مسائل سه‌بعدی الاستواستاتیک و الاستودینامیک هارمونیک ارائه شده است. در واقع محاسبه انتگرال‌های CPV به تنهایی کافی نیست و باید مقادیر η نیز در نقاط روی هم‌گذاری مشخص باشد. البته اگر برای محاسبه انتگرال‌های منفرد قوی از روش ترم آزاد، ولی این روش برای محیط‌های نامحدود قابل استفاده نیست. صحت و کارایی روش پیشنهاد شده برای محاسبه ضرایب η ، از مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج محققان قبلی، اثبات شده است.

۷- منابع

- [1] Aliabadi, M.H. (2002). "The boundary element method applications in solids and structures" John Wiley.
- [2] Brebbia, C.A. and Dominguez, J. (1992). "Boundary Elements An introductory Course", Computational Mechanics Publications.
- [3] Muskhelishvili, N.I. (1968). "Singular integral equation, Moscow", Nauka, English Translation, Nardhoff, Groningen.
- [4] Kupradze, V.D., Gegelia, T.G., Bachelishvili, M.O. and Burkhuladze, T.V. (1976). "Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity", Moscow, Nauka, English translation, North-Holland, Amsterdam.

- [۲۲] سلمان رضازاده، ۱۳۸۷. "بررسی رفتار دینامیکی تونل‌های کم‌عمق با استفاده از ترکیب روش‌های اجزای محدود و المان مرزی در فضای فرکانسی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده فنی، دانشگاه تهران.
- [23] Wen, P.H., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. (1998). "Cracks in three dimensions: a dynamic dual boundary element analysis." *Computer Meth. Appl. Mechanics Engng*, Vol. 167, PP. 139-151.
- [24] Wen, P.H., Aliabadi, M.H. and Young, A. (1999). "Dual boundary element methods for three-dimensional dynamic crack problems." *J. Strain Analysis*, Vol. 34(6), PP. 373-394.
- [25] Mi, Y. and Aliabadi, M.H. (1992). "Dual boundary element for three-dimensional fracture mechanics analysis." *Engng Analysis Boundary Elements*, Vol. 10(2), PP. 161-171.
- [26] Guiggiani, M. and Gigante, A. (1990). "A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method." *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 57, PP. 906-915.
- discetization — theory and Fortran code", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 175, pp. 265–290.
- [15] Gao, X.W. (2006). "Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals— theory and Fortran code, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 188, pp. 44–64.
- [16] Gao, X.W., Yang, K. and Wang, J. (2008). "An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, pp. 692–696.
- [17] Gao, X.W. (2010). "An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high-order singular boundary integrals", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [18] Becker, A.A (1992). "The Boundary Element Method in Engineering" McGraw-Hill, London.
- [19] Dominguez, J. (1993). "Boundary elements in dynamics." *Computational Mechanics publications*.
- [۲۰] تکتم محمد نژاد، ۱۳۸۳. "بررسی اثر خصوصیات ساختگاه روی بزرگ‌نمایی امواج زلزله"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده فنی، دانشگاه تهران.
- [۲۱] حمید برهانی، ۱۳۸۶. "تحلیل دینامیکی سرریز نیلوفری با استفاده از روش المان مرزی در فضای فرکانسی با در نظر گرفتن اندرکنش مخزن-سرریز-پی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده فنی، دانشگاه فردوسی مشهد.