

Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plate Using Higher Order Haar Wavelet

Ali Mirahmadi Chenaruiyeh¹, Mohammad Javad Fadaee Fath Abadi^{2*} , Hamed Saffari³

1. M.S, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.
2. Ph.D., Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.
3. Ph.D., Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

Abstract

In the last few decades, laminated composite plates, due to their high characteristics resistance and hardness, have been used in a variety of designs as structural components. Considering the structural complexities of laminated composite plates, choosing the appropriate method to solve the equation governing the dynamic equilibrium of these plates in order to analysis their vibration behavior has been attracted the attention of many researchers.

In the present research, free vibration of a laminated composite plate, has been investigated using numerical solution. In order to model the behavior of the composite plate, the refined Zigzag theory in which the transverse shear stress distribution is allowed through the thickness of the layers and also satisfies the condition of zero shear stress on the top and bottom surfaces of the composite plate without need to use shear correction factor, have been deployed. In this theory, seven independent displacement variables are considered and according to the continuity condition of displacement between layers, the number of variables will be independent of the number of layers. Principal of virtual work and minimization of the potential energy have been used for deriving the partial differential equations of motion. The higher order Haar wavelet method have been developed to replace displacement variables and numerically solve the partial differential equations and calculating eigenvalues. In most of the similar researches, the use of Haar wavelet numerical solution has mostly been discussed on beams, annular plates and shells, and research in the field of the rectangular composite plate has not been observed. In this paper, the numerical solution is modeled in a simple form and the equations governing the rectangular laminate composite plate have been replaced by linear algebraic series and so, the free vibration of laminate composite plate has been investigated.

Finally, the accuracy and convergence of solution method in analysis of laminated composite plates are evaluated and the results of the proposed method, earned from programming in the Matlab software, have been compared with the results of other solutions methods that mentioned in this paper. The comparison of these results shows good accuracy compared to other solution methods. Meanwhile, by converting multivariable equations of motion into linear algebraic expressions, the results of the proposed method have been obtained without any particular complexity and with a small number of collection points. Achieving the results by the proposed method with the same accuracy as the Haar solution results using smaller matrix dimensions and so reducing the computational cost is another advantage of this proposed method. It can be used instead of the Haar solution method in the numerical solutions of various solid mechanics' problems. Examining the convergence of this proposed method shows that this solution has a good ability to approach the exact solution by increasing the resolution and collection points. It was also observed that the dimensionless frequency index increases with the increase in the ratio of longitudinal to transverse modulus regardless of the number of layers.

Review History

Received: Sep 29, 2024

Revised: Feb 7, 2026

Accepted: Apr 18, 2026

Keywords

Free vibration
laminated composite plate
refined Zigzag theory
higher order Haar wavelet
numerical method

* Corresponding Author Email: mjfadaee@uk.ac.ir - ORCID: 0000-0001-8620-5573



ارتعاش آزاد صفحه مرکب چندلایه با استفاده از موجک هار مرتبه بالاتر

علی میراحمدی چناروئی^۱، محمد جواد فدائی فتح‌آبادی^{۲*} ID، حامد صفاری^۳

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

۲. استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

۳. استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

چکیده

تاریخچه داوری

در چند دهه اخیر، صفحات مرکب چندلایه، با توجه به سختی و مقاومت مشخصه بالا به عنوان عضو سازه‌ای در انواع طرح‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با توجه به پیچیدگی‌های ساختاری صفحات چندلایه مرکب، انتخاب روش مناسب برای حل معادلات حاکم بر تعادل دینامیکی این صفحات برای تحلیل رفتار ارتعاشی آنها مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این پژوهش به منظور مدل‌سازی رفتار صفحه مرکب از نظریه زیگزاگ بهبود یافته به عنوان یک ابزار با توجه به توانایی آن در توصیف بهتر رفتار و محاسبه تنش‌های بین لایه‌ای و تنش‌های در امتداد ضخامت در صفحات مرکب چندلایه، مورد استفاده قرار گرفته است. از اصل کار مجازی و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل برای استخراج معادلات حرکت حاکم و از روش حل عددی موجک هار مرتبه بالاتر برای حل این معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و به دست آوردن مقادیر ویژه، استفاده شده است. در اغلب پژوهش‌های مشابه، استفاده از حل عددی موجک هار بیشتر بحث روی تیرها، صفحات حلقوی و پوسته‌ها بوده است و در زمینه صفحه مرکب مستطیلی پژوهشی مشاهده نشده است. در این پژوهش این حل عددی به شکل ساده مدل‌سازی شده است و به کمک آن معادلات حاکم بر صفحه مرکب چندلایه مستطیلی با سری‌های جبری خطی جایگزین شده و با استفاده از این سری‌ها، ارتعاش آزاد صفحه مرکب چندلایه بررسی شده است. در نهایت دقت و همگرایی این روش حل در تحلیل صفحه مرکب، مورد ارزیابی و جواب‌های حاصل از این روش، به دست آمده در محیط نرم‌افزار متلب، با جواب‌های حاصل از دیگر روش‌های حل، مورد مقایسه قرار گرفته است.

کلمات کلیدی

ارتعاش آزاد
صفحه مرکب چندلایه
نظریه زیگزاگ بهبود یافته
موجک هار مرتبه بالاتر
روش عددی

۱- مقدمه

مکانیک، هوافضا و دریا توجه ویژه‌ای به این صفحات چندلایه، صورت گیرد. این مواد از طریق تنوع در جهت‌گیری فیبرها و چگونگی چینش لایه‌ها، انعطاف پذیری خوبی را در طراحی فراهم می‌کنند [1]. در دهه‌های اخیر، تحقیقات گسترده‌ای برای تعیین مشخصات ارتعاشی (فرکانس طبیعی، اشکال مودی و ...) صفحات مرکب صورت گرفته است. به منظور تحلیل یک سازه، به طور مثال

در طول نیم قرن اخیر، استفاده از مواد مرکب به سرعت رشد کرده است. این مواد برای کاربردهای سازه‌ای که به استحکام بالا و وزن کم نیاز دارند، ایده‌آل هستند. ویژگی‌های پیشرفته دیگر مانند قدرت تحمل خستگی و مقاومت بالا در برابر خوردگی باعث شده است که در سال‌های اخیر در انواع زمینه‌های مهندسی عمران،

* رایانامه نویسنده مسئول: ORCID: 0000-0001-8620-5573 - mjfadaee@uk.ac.ir

کپی‌رایت © ۲۰۲۶، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس (TMU Press). این مقاله به صورت دسترسی آزاد منتشر شده و تحت مجوز بین‌المللی Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 قرار دارد (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>). بر اساس این مجوز، شما می‌توانید این



مطلب را در هر قالب و رسانه‌ای کپی، بازنشر و بازآفرینی کنید و یا آن را ویرایش و بازسازی نمایید، به شرط آنکه نام نویسنده را ذکر کرده و از آن برای مقاصد غیرتجاری استفاده کنید.

تعداد مجهولات نیز افزایش می‌یابد و اغلب برای به‌دست آوردن نتایج دقیق، از نظر محاسباتی وقت‌گیر و هزینه‌بر می‌باشد [7].

نظریه‌های تک‌لایه معادل براساس مرتبه تابع جابه‌جایی در امتداد ضخامت را می‌توان به چند دسته شامل نظریه صفحه چندلایه کلاسیک^۵ (CLPT)، نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول^۶ (FSDT) و نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر^۷ (HSDT) تقسیم‌بندی کرد [9]. ساده‌ترین نظریه تک‌لایه معادل، نظریه صفحه چندلایه کلاسیک است. ابتدا نظریه صفحات دوبعدی کلاسیک در قرن نوزدهم توسط کریشهف بنا شد و در قرن بیستم توسط لاو و تیموشنکو توسعه پیدا کرد. فرضیه اساسی در نظریه CLPT این است که خطوط مستقیم و نرمال نسبت به سطح میانی قبل از تغییر شکل، پس از تغییر شکل نیز مستقیم و نرمال باقی می‌مانند [1]. اگرچه این فرض منجر به معادلات ساختاری ساده می‌شود، اما عامل اصلی ضعف این نظریه می‌باشد. با توجه به اینکه صفحات مرکب، به دلیل وجود رفتار ناپیوسته در امتداد ضخامت و ماهیت ناهمسان‌گردی، تحت تنش‌های نرمال و برشی عرضی قرار می‌گیرند، برای پیش‌بینی بهتر از ویژگی‌های رفتاری صفحات مرکب، نیاز به توسعه نظریه‌های پیشرفته‌تری می‌باشد.

چندین نظریه برای تجزیه و تحلیل صفحات مرکب چندلایه، برای در نظر گرفتن اثر برش انتقالی، پیشنهاد شده است. بیشتر این نظریه‌ها بسط نظریه‌های مرسوم توسعه یافته توسط میندلین و رایسنر هستند که به نظریه‌های صفحه تغییر شکل برشی معروف می‌باشند. رایج‌ترین این نظریه‌ها به عنوان نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) شناخته می‌شود. این نظریه تنش برشی عرضی در امتداد ضخامت را ثابت فرض می‌کند و برای ارضای شرایط مرزی در سطح بالا و پایین صفحه نیاز به ضریب اصلاح برشی دارد [1]. این ضریب، سختی برشی عرضی را تعیین می‌کند و در نتیجه، دقت نتایج انجام شده FSDT به طور قابل توجهی به ضریب اصلاح برش بستگی دارد [10]. محدودیت‌های CLPT و FSDT پژوهشگران را به توسعه تعدادی نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر (HSDT) سوق داده است. مدل‌های مرتبه بالاتر برپایه فرض تغییر تنش به صورت غیرخطی در امتداد ضخامت، می‌باشند [1]. فان و ردی [11] این نظریه را برای ارتعاش آزاد، خمش و

صفحه مرکب، دو موضوع باید مدنظر قرار بگیرد. موضوع اول رسیدن به معادلات دیفرانسیل حاکم بر صفحه به همراه شرایط اولیه و مرزی مناسب، که یک بیان ریاضی از رفتار صفحه در سطح مرجع است و موضوع دوم، حل این معادلات به صورت تحلیلی یا به صورت عددی می‌باشد. مکانیک جامدات بر پایه نظریه الاستیسیته سه بعدی استوار است که فرمول‌بندی ریاضی سخت و پیچیده‌ای دارد [2, 3]. در صورتی که این معادلات از الاستیسیته سه بعدی به دست آمده باشند، ممکن است حل آن‌ها امکان‌ناپذیر و یا هزینه‌بر باشد. بر همین اساس برای رسیدن به معادلات حاکم بر تیرها، صفحات و پوسته‌ها، به کارگیری مدل‌های کاهش مرتبه یافته با در نظر گرفتن تعدادی فرض و تقریب‌سازی، به منظور رسیدن به یک مدل به مراتب ساده‌تر، توسط پژوهشگران ترجیح داده شده است. علاوه بر آن، در صفحات مرکب به دلیل پیچیدگی لایه‌ای، نظریه‌هایی که قابلیت محاسبه تنش‌های بین لایه‌ای و تنش‌های در امتداد ضخامت را دارند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

مدل‌های کاهش مرتبه یافته، که در آن به نوعی یک مسئله سه‌بعدی به یک مسئله دوبعدی تقلیل پیدا کرده است، براساس متغیر اساسی به کار گرفته شده برای رسیدن به معادلات حاکم بر صفحات مرکب، به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول فرمول‌بندی براساس جابه‌جایی نام دارد، که در آن متغیر اساسی، جابه‌جایی‌های سطح مرجع می‌باشند. دسته دوم به‌عنوان فرمول‌بندی براساس تنش نام دارد، که در آن متغیر اساسی، تنش‌های غشائی سطح مرجع هستند و دسته سوم فرمول‌بندی ترکیبی نامیده می‌شود [4]. نظریه‌های مبتنی بر جابه‌جایی را می‌توان به چهار دسته تقسیم‌بندی کرد: ۱- نظریه‌های تک‌لایه معادل^۱ (ESL)، ۲- مدل‌های لایه‌ای^۲ (LW)، ۳- فرمول‌بندی یکنواخت^۳ (UF) [8]، ۴- نظریه‌های زیگ‌زاگ^۴ (ZZ). در رویکرد نظریه تک‌لایه معادل، در یک مرکب چند لایه، فرض می‌شود که لایه‌ها یک لایه منفرد معادل هستند. در حالی که در رویکرد نظریه لایه‌ای، برای هر لایه یک میدان جابه‌جایی جداگانه در نظر گرفته می‌شود [5]. هرچند که این نظریه از دقت بالاتری در مقایسه با مدل‌های تک‌لایه معادل برخوردار است [6]، اما با افزایش تعداد لایه‌ها،

¹ Equivalent single layer theories

² Layerwise theories

³ Unified formulations

⁴ Zig-zag theories

⁵ Classical laminated plate theory

⁶ First-order shear deformation theory

⁷ Higher-order shear deformation theories

پاسخ دقیق تری در مقایسه با نظریه‌های تک‌لایه معادل و با هزینه کمتری نسبت به نظریه‌های لایه‌ای فراهم می‌کند [19, 20]. به منظور برطرف کردن ایرادات نظریه‌های زیگزاگی اولیه، تسلا، دی‌اسکیووا و گرلن، با استفاده از یک سینماتیک زیگزاگی پیشرفته برای تیرها و صفحات مرکب چندلایه، مدل جدیدی را ارائه کردند و آن را نظریه زیگزاگ بهبودیافته نامیدند [21, 22]. در این نظریه از یک سینماتیک زیگزاگی درون صفحه جدید استفاده شد که در آن تغییرشکل برشی تمام لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود و به پیوستگی کامل تنش برشی در فصل مشترک لایه‌ها نیاز ندارد. بنابراین تمام شرایط مرزی را به‌درستی مدل می‌کند و سینماتیک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول به‌عنوان اساس رسیدن به توابع شکل پیوستگی مورد نیاز، به‌کار گرفته شده است.

به منظور حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر صفحه مرکب چندلایه، به‌دست آمده از طریق به‌کارگیری یک نظریه مناسب، می‌توان از روش‌های حل تحلیلی [23-26] یا عددی استفاده کرد. در میان حل‌های عددی، روش المان محدود پرکاربردترین آنها در تحلیل صفحه مرکب چندلایه، می‌باشد [27-33]. نومیر و همکاران [34] از روش تفاضل محدود در تحلیل ارتعاش آزاد صفحه مرکب استفاده کردند. روش تفاضلات مربعی به همراه فرمول‌بندی یکنواخت برای به دست آوردن جواب‌های یک صفحه چندلایه توسط فریرا و همکاران [35] به‌کار گرفته شد. تای و همکاران [36] نظریه تغییرشکل برشی و روش هم‌هندسی را برای تجزیه و تحلیل جامع صفحات مرکب استفاده کردند. ناتاراجان و همکاران [37] نظریه فرمول‌بندی یکنواخت و روش هم‌هندسی را برای تجزیه و تحلیل صفحات مرکب متقاطع به‌کار گرفتند. دی‌اسکیووا و همکاران [38] یک مجموعه از المان‌های صفحه‌ای براساس نظریه زیگزاگ بهبودیافته برای تحلیل صفحات مرکب به‌کار گرفتند.

در سال‌های اخیر، روش‌های موجک³ (WM) به‌عنوان یک ابزار حل عددی، در تحقیقات مهندسی به‌کار گرفته شده‌اند. در میان این روش‌ها، روش موجک هار⁴ (HWM) به دلیل سادگی آن مورد توجه قرار گرفته است [39]. باید اشاره شود که موجک هار دارای ناپیوستگی است و در نقطه ناپیوستگی مشتق وجود ندارد. بنابراین نمی‌توان از موجک هار به‌طور مستقیم برای حل معادلات

کمانش صفحات مرکب، به‌کار بردند. از جمله نظریه‌های مرتبه بالاتر در مدل‌سازی صفحات مرکب، می‌توان نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه سوم¹ (TSDTs)، که به نظریه‌های سهموی هم معروفند، را نام برد [12]. توزیع سهموی دیگری از کرنش‌های برشی در امتداد ضخامت یک صفحه چندلایه توسط ووکسانوویچ [13] پیشنهاد شده است. استاین [14] یک نظریه دو بعدی را توسعه داد که در آن جابه‌جایی‌ها با سری مثلثاتی بیان می‌شوند. عبارات مثلثاتی با عبارات معمول جبری فرض شده برای جابه‌جایی در طول ضخامت، ترکیب می‌شوند تا راه‌حل بهتری فراهم شود. یک راه حل به فرم بسته برای تجزیه و تحلیل کلی تنش‌های بین لایه‌ای برای صفحات چندلایه نازک و ضخیم تحت بارگذاری سینوسی، توسط لی و لیو [15] استخراج شد. نظریه صفحه تغییرشکل برشی هایپربولیک² (HSDPT) توسط تیمارچی و سولداتوس ارائه شد [16]. کاراما و همکاران یک تابع نمایی برای کرنش عرضی در مطالعه خمش صفحه مرکب خود پیشنهاد کردند [17]. ماتسونگا [18] یک نظریه مرتبه بالاتر کلی را پیشنهاد کرد و برای تجزیه و تحلیل تنش بین لایه‌ای در مسائل صفحات مرکب و ساندویچی چندلایه مورد استفاده قرار داد.

در نوع دیگری از نظریه‌ها، ترکیب مناسبی از مزیت‌های محاسباتی نظریه‌های تک‌لایه معادل و دقت نظریه‌های لایه‌ای به‌کار گرفته شده است. این نظریه‌ها که نظریه‌های زیگزاگ نام دارند، ابتدا توسط لختیتسکی مطرح شد و سپس توسط آمبارتسومیان به صفحات چندلایه گسترش یافت [4]. در نظریه‌های زیگزاگ، میدان جابه‌جایی به صورت جمع آثار یک توزیع شبه زیگزاگی تنش برشی در امتداد ضخامت و یک توزیع خطی یا غیرخطی شبیه به آنچه در نظریه‌های تک‌لایه معادل استفاده شد، در نظر گرفته می‌شود. مهم‌ترین مزیت این نظریه‌ها این است که بدون توجه به تعداد لایه‌های یک صفحه مرکب چندلایه، تعداد ثابتی از متغیرهای جابه‌جایی را در نظر می‌گیرند و سینماتیک زیگزاگی به‌گونه‌ای طرح ریزی شده است که پیوستگی تنش‌های برشی عرضی در امتداد ضخامت و شرایط تنش آزاد در بالا و پایین صفحه، بدون نیاز به ضریب اصلاح برشی را تضمین می‌کند. بنابراین نظریه‌های زیگزاگ برای صفحات مرکب چندلایه نسبتاً ضخیم، پیش‌بینی

³ Wavelet methods⁴ Haar wavelet method¹ Third-order shear deformation theory² Hyperbolic shear deformation plate theory

۲- فرمول‌بندی ریاضی

یک صفحه مرکب چند لایه با ضخامت کلی H شامل k لایه با ضخامت $h^{(k)}$ در نظر بگیرید (شکل ۱). نقاط روی این صفحه با توجه به سیستم مختصات کارتزین کلی (x_1, x_2, z) مشخص می‌شوند. زوج (x_1, x_2) بیانگر مختصات درون صفحه‌ای و $z \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$ مختصه در امتداد ضخامت می‌باشد. همچنین $z = 0$ صفحه میانی^۲ (سطح مرجع) تعریف می‌شود.

براساس نظریه زیگزاگ بهبودیافته، مولفه‌های جابه‌جایی در هر نقطه (x_1, x_2) درون صفحه و زمان t و فاصله z از سطح مرجع مطابق رابطه زیر شامل دو بخش کلی^۳ و محلی^۴ در نظر گرفته می‌شود [21].

$$U(x_1, x_2, z, t) = U^G(x_1, x_2, z, t) + U^L(x_1, x_2, z, t) \quad (1)$$

که در این رابطه، بخش کلی U^G براساس نظریه تغییرشکل برشی و بخش محلی U^L شامل توابع زیگزاگی به‌منظور در نظر گرفتن تنش‌های در امتداد ضخامت و ایجاد شرایط پیوستگی بین لایه‌ای، مطابق روابط زیر می‌باشند.

$$U^G(x_1, x_2, z, t) = U(x_1, x_2, t) + z\theta(x_1, x_2, t) \quad (2)$$

$$U^L(x_1, x_2, z, t) = \varphi^{(k)}(z)\Psi(x_1, x_2, t) \quad (3)$$

در نتیجه میدان جابه‌جایی به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود.

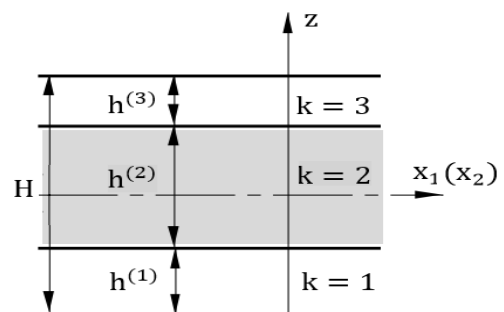
$$\begin{cases} u_1^{(k)}(x_1, x_2, z, t) = u(x_1, x_2, t) + z\theta_1(x_1, x_2, t) \\ \quad + \varphi_1^{(k)}(z)\Psi_1(x_1, x_2, t) \\ u_2^{(k)}(x_1, x_2, z, t) = v(x_1, x_2, t) + z\theta_2(x_1, x_2, t) \\ \quad + \varphi_2^{(k)}(z)\Psi_2(x_1, x_2, t) \\ u_z^{(k)}(x_1, x_2, z, t) = w(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (4)$$

در این میدان جابه‌جایی، $u, v, w, \theta_1, \theta_2, \Psi_1$ و Ψ_2 به ترتیب جابه‌جایی در جهت x_1 جابه‌جایی در جهت x_2 ، چرخش حول محور x_2 چرخش حول محور x_1 ، دامنه شعاعی تابع زیگزاگ $\varphi_1^{(k)}$ و دامنه شعاعی تابع زیگزاگ $\varphi_2^{(k)}$ می‌باشند. در ادامه کرنش‌های طولی و عرضی با مشتق‌گیری از میدان جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + z \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \varphi_1^{(k)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \quad (5)$$

دیفرانسیل استفاده کرد. یکی از راه‌های برون رفت از این نقص، استفاده از روش انتگرال است. در این روش که توسط چن و هسیائو [40] ارائه شد، بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله دیفرانسیل، به سری‌های موجک گسترش می‌یابد و معادله دیفرانسیل به معادله جبری تبدیل می‌شود و تابع مجهول با انتگرال‌گیری از این معادله به دست می‌آید. از این روش به عنوان یک ابزار موثر، برای حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی استفاده شده است [41-43]. به تازگی روش موجک هار مرتبه بالاتر^۱ (HOHW) توسط ماجاک و همکاران [44] به منظور ارتقای دقت و همگرایی روش موجک هار، معرفی شده است. در این روش بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله دیفرانسیل به اضافه پارامتر $2s$ ، به سری‌های موجک گسترش می‌یابد. در این روش، s شمارنده افزایش مرتبه است و هر مرتبه افزایش آن $2s$ ثابت انتگرالی اضافه معرفی می‌کند که به شرایط جدیدی علاوه بر شرایط اولیه و مرزی برای تعیین آن‌ها نیاز است، هرچند، در حالت $s=1$ که در این پژوهش استفاده می‌شود، شرایط مرزی کافی برای تعیین مجهولات اضافی وجود خواهد داشت.

در پژوهش حاضر از تئوری زیگزاگ بهبود یافته برای توصیف رفتار و میدان جابه‌جایی صفحه چند لایه، از اصل کار مجازی و کمینه سازی انرژی پتانسیل به منظور استخراج معادلات حرکت حاکم و از روش موجک هار مرتبه بالاتر در حالت $s=1$ برای حل عددی معادلات حرکت حاکم استفاده شده است. کارایی این روش حل، در بررسی ارتعاش آزاد صفحه مرکب چند لایه ارزیابی و جواب‌های حاصل از این روش، به دست آمده از طریق کدنویسی در محیط نرم‌افزار متلب، با جواب‌های حاصل از روش‌های حل دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۱. صفحه مرکب سه‌لایه

Fig. 1. Three layered composite plate

¹ Higher order haar wavelet method

² Mid-plane

³ Global

⁴ Local

$$\varepsilon_{22}^{(k)} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + z \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \varphi_2^{(k)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \quad (6)$$

$$\gamma_{12}^{(k)} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + z \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) + \varphi_1^{(k)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \varphi_2^{(k)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \quad (7)$$

$$\gamma_{1z}^{(k)} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_1 + \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial z} \Psi_1 \quad (8)$$

$$\gamma_{2z}^{(k)} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \theta_2 + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial z} \Psi_2 \quad (9)$$

با توجه به قانون کلی هوک روابط تنش-کرنش حاکم بر لایه kام صفحه مرکب ناهمسانگرد در حالت تنش صفحه‌ای، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{1z} \\ \tau_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (10)$$

که در این رابطه، \bar{Q}_{ij} سختی‌های کاهش یافته تنش صفحه‌ای می‌باشند [1].

توابع زیگزاگ $\varphi_1^{(k)}$ و $\varphi_2^{(k)}$ با استفاده از روابط زیر برای لایه kام صفحه مرکب دارای N لایه، به دست می‌آیند [21].

$$\varphi_1^{(k)}(z) = \left(z + \frac{H}{2} \right) \left(\frac{G_4}{\bar{Q}_{44}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{q=2}^k h^{(q-1)} \left(\frac{G_4}{\bar{Q}_{44}^{(q-1)}} - \frac{G_4}{\bar{Q}_{44}^{(k)}} \right) \quad (11)$$

$$\varphi_2^{(k)}(z) = \left(z + \frac{H}{2} \right) \left(\frac{G_5}{\bar{Q}_{55}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{q=2}^k h^{(q-1)} \left(\frac{G_5}{\bar{Q}_{55}^{(q-1)}} - \frac{G_5}{\bar{Q}_{55}^{(k)}} \right) \quad (12)$$

در روابط بالا، ثابت‌های G_4 و G_5 از روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$G_4 = \left(\frac{1}{H} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{\bar{Q}_{44}^{(k)}} \right)^{-1} \quad (13)$$

$$G_5 = \left(\frac{1}{H} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{\bar{Q}_{55}^{(k)}} \right)^{-1} \quad (14)$$

به منظور رسیدن به معادلات تعادل حاکم بر صفحه مرکب، ابتدا باید از رابطه زیر، کار نیروهای داخلی (انرژی کرنشی مجازی) محاسبه شود.

$$\delta U = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \Rightarrow \quad (15)$$

$$\delta U = \int_A \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\sigma_{11}^{(k)} \delta \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \delta \varepsilon_{22}^{(k)} + \tau_{12}^{(k)} \delta \gamma_{12}^{(k)} + \tau_{1z}^{(k)} \delta \gamma_{1z}^{(k)} + \tau_{2z}^{(k)} \delta \gamma_{2z}^{(k)} \right) dz dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A & \left(N_1 \delta \frac{\partial u}{\partial x_1} + N_2 \delta \frac{\partial v}{\partial x_2} + N_{12} \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x_2} + \delta \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + M_1 \delta \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + M_1^\phi \delta \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + M_2 \delta \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + M_2^\phi \delta \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + M_{12} \left(\delta \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) + M_{12}^\phi \delta \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + M_{21}^\phi \delta \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + Q_2 \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x_2} + \delta \theta_2 \right) + Q_2^\phi \delta \Psi_2 + Q_1 \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x_1} + \delta \theta_1 \right) \right. \\ & \left. + Q_1^\phi \delta \Psi_1 \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

در رابطه بالا، تنش‌های N، M و Q به ترتیب تنش‌های محوری، خمشی و برشی هستند. این تنش‌ها و کرنش‌های متناظر محوری ε_m

خمشی e_b و برشی e_s به وسیله روابط زیر تعریف می‌شوند [21].

$$N_m^T = \{N_1, N_2, N_{12}\} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \tau_{12}^{(k)} \right\} dz \quad (16)$$

$$e_m^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\} \quad (17)$$

$$M_b^T = \{M_1, M_1^\phi, M_2, M_2^\phi, M_{12}, M_{12}^\phi, M_{21}^\phi\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ z\sigma_{11}^{(k)}, \phi_1^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}, z\sigma_{22}^{(k)}, \phi_2^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}, z\tau_{12}^{(k)}, \phi_1^{(k)}\tau_{12}^{(k)}, \phi_2^{(k)}\tau_{12}^{(k)} \right\} dz \quad (18)$$

$$e_b^T = \left\{ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right\} \quad (19)$$

$$Q_s^T = \{Q_2, Q_2^\phi, Q_1, Q_1^\phi\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ \tau_{2z}^{(k)}, \frac{\partial \phi_2^{(k)}}{\partial z} \tau_{2z}^{(k)}, \tau_{1z}^{(k)}, \frac{\partial \phi_1^{(k)}}{\partial z} \tau_{1z}^{(k)} \right\} dz \quad (20)$$

$$e_s^T = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_2} + \theta_2, \Psi_2, \frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_1, \Psi_1 \right\} \quad (21)$$

بر همین اساس می‌توان روابط ساختاری حاصل در صفحه مرکب را با استفاده از نظریه زیگزاگ بهبودیافته به صورت زیر نشان داد [21].

$$\begin{Bmatrix} N_m \\ M_b \\ Q_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^T & D & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_m \\ e_b \\ e_s \end{Bmatrix} \quad (22)$$

اجزای ماتریس سختی رابطه بالا از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$A = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} P dz \quad (23)$$

$$B = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} PR dz \quad (24)$$

$$D = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} R^T PR dz \quad (25)$$

$$G = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S^T QS dz \quad (26)$$

ماتریس‌های موجود در روابط بالا، به وسیله روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$P = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (27)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (28)$$

$$R = \begin{bmatrix} z & \phi_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \phi_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & \phi_1^{(k)} & \phi_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \phi_2^{(k)}}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial \phi_1^{(k)}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

در ادامه روند رسیدن به معادلات حاکم، باید کار حاصل از نیروهای اینرسی، از رابطه زیر محاسبه شود.

$$\delta K = \int_{\Omega} m \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \delta d^T d \Omega \quad (31)$$

در رابطه بالا، ماتریس های d و m از روابط زیر به دست می آیند [38].

$$d = [u, v, w, \theta_1, \theta_2, \Psi_1, \Psi_2]^T \quad (32)$$

$$m = \begin{bmatrix} m^{(0)} & 0 & 0 & m^{(1)} & 0 & m_{\phi_1}^{(0)} & 0 \\ 0 & m^{(0)} & 0 & 0 & m^{(1)} & 0 & m_{\phi_2}^{(0)} \\ 0 & 0 & m^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m^{(1)} & 0 & 0 & m^{(2)} & 0 & m_{\phi_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & m^{(1)} & 0 & 0 & m^{(2)} & 0 & m_{\phi_2}^{(1)} \\ m_{\phi_1}^{(0)} & 0 & 0 & m_{\phi_1}^{(1)} & 0 & m_{\phi_1}^{(2)} & 0 \\ 0 & m_{\phi_2}^{(0)} & 0 & 0 & m_{\phi_2}^{(1)} & 0 & m_{\phi_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

مقادیر ماتریس m صفحه مرکب با چگالی ρ (رابطه بالا)، از رابطه زیر به دست می آیند.

$$(m^{(0)}, m^{(1)}, m^{(2)}, m_{\phi_1}^{(0)}, m_{\phi_2}^{(0)}, m_{\phi_1}^{(1)}, m_{\phi_2}^{(1)}, m_{\phi_1}^{(2)}, m_{\phi_2}^{(2)}) = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ \rho, \rho z, \rho z^2, \rho \phi_1^{(k)}, \rho \phi_2^{(k)}, \rho z \phi_1^{(k)} \right\} dz \quad (34)$$

براساس اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل و اصل همپیتون در حالت عدم حضور بار خارجی داریم:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta K = 0 \quad (35)$$

معادلات تعادل حاکم بر صفحه مرکب، براساس نظریه صفحه زیگزاگ بهبودیافته، با جایگذاری روابط (۱۵) و (۳۱) و اعمال عملگر

تغییراتی^۱ (δ) در رابطه بالا، به صورت زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} \delta u: \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = m^{(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m^{(1)} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + m_{\phi_1}^{(0)} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} \\ \delta v: \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = m^{(0)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m^{(1)} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + m_{\phi_2}^{(0)} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \\ \delta w: \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = m^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \delta \theta_1: \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = m^{(1)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m^{(2)} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + m_{\phi_1}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} \\ \delta \theta_2: \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = m^{(1)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m^{(2)} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + m_{\phi_2}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \\ \delta \Psi_1: \frac{\partial M_1^\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}^\phi}{\partial x_2} - Q_1^\phi = m_{\phi_1}^{(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_{\phi_1}^{(1)} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + m_{\phi_1}^{(2)} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} \\ \delta \Psi_2: \frac{\partial M_{21}^\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2^\phi}{\partial x_2} - Q_2^\phi = m_{\phi_2}^{(0)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m_{\phi_2}^{(1)} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + m_{\phi_2}^{(2)} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \end{cases} \quad (36)$$

۳- مدل سازی حل عددی

در این قسمت مدل سازی روش حل موجک هار مرتبه بالاتر به منظور حل عددی معادلات تعادل حاکم صورت می گیرد. برای رسیدن به

این هدف نیاز به شناخت موجک هار و چگونگی حل معادلات دیفرانسیل جزئی^۲ در این روش می باشد. از دید ریاضی تابع موجک هار به

¹ Variational Operator

² Partial Differential Equations

عنوان گروهی از امواج مستطیلی عمود بر هم با مقدار ± 1 در بازه $[A, B]$ و صفر در سایر نقاط تعریف می‌شود. بدین منظور پارامتر مهم $M = 2^J$ در نظر گرفته می‌شود که در آن J بیشترین میزان وضوح^۱ مورد نظر می‌باشد. بازه $[A, B]$ به $2M$ زیربازه با اندازه‌های مساوی و با مقدار هر زیربازه برابر $\Delta\xi = (B - A)/2M$ تقسیم می‌شود. دو پارامتر $m = 2^j$ که در آن $j = 0, 1, \dots, J$ و $k = 0, 1, \dots, m - 1$ در نظر گرفته می‌شوند. شمارنده موجک‌ها (i) با توجه به مقادیر m و k از رابطه زیر به دست می‌آید و مقدار آن از ۱ تا $2M$ تغییر می‌کند [39].

$$i = m + k + 1 \quad (37)$$

برای $i = 1$ موجک‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$h_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [A, B] \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (38)$$

و موجک‌ها برای $1 < i \leq 2M$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h_i(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [\Delta_1(i), \Delta_2(i)] \\ -1, & \xi \in [\Delta_2(i), \Delta_3(i)] \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (39)$$

در رابطه بالا داریم:

$$\Delta_1(i) = A + 2k \frac{M}{m} \Delta\xi \quad (40)$$

$$\Delta_2(i) = A + (2k + 1) \frac{M}{m} \Delta\xi \quad (41)$$

$$\Delta_3(i) = A + 2(k + 1) \frac{M}{m} \Delta\xi \quad (42)$$

پس از محاسبه تابع‌ها، انتگرال‌های مرتبه n تابع‌ها نیز از روابط زیر به دست می‌آیند [39].

$$i = 1 \rightarrow p_{n,1}(\xi) = \frac{\xi^n}{n!} \quad (43)$$

$$i > 1 \rightarrow p_{n,i}(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq \Delta_1(i) \\ \frac{1}{n!} (\xi - \Delta_1(i))^n, & \Delta_1(i) < \xi \leq \Delta_2(i) \\ \frac{1}{n!} [(\xi - \Delta_1(i))^n - 2(\xi - \Delta_2(i))^n], & \Delta_2(i) < \xi \leq \Delta_3(i) \\ \frac{1}{n!} [(\xi - \Delta_1(i))^n - 2(\xi - \Delta_2(i))^n + (\xi - \Delta_3(i))^n], & \xi > \Delta_3(i) \end{cases} \quad (44)$$

در ادامه با جایگذاری ξ با ξ_r به صورت زیر، ماتریس‌های مربعی‌های (H) و انتگرال‌های (P_n) ، با ابعاد $2M \times 2M$ تشکیل می‌شوند.

$$\xi_r = A + (r - 0.5)\Delta\xi \quad r = 1, 2, \dots, 2M \quad (45)$$

$$H(i, r) = h_i(\xi_r) \quad (46)$$

$$P_n(i, r) = p_{n,i}(\xi_r) \quad (47)$$

در روش حل موجک‌ها مرتبه بالاتر، جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی به فرم زیر فرض می‌شود.

$$\frac{d^{n+2s}y(\xi)}{d\xi^{n+2s}} = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\xi_r) \quad (48)$$

¹ Resolution

در رابطه بالا، n بالاترین مرتبه مشتق به کار رفته در معادله دیفرانسیل، s شمارنده مرتبه بالاتر موجک هار، a_i بردار ضرایب مجهول هار و h_i ماتریس موجک هار می باشد.

اکنون معادله دیفرانسیل جزئی زیر شامل متغیرهای مستقل x, y, t ، تابع جابه جایی u وابسته به متغیرهای مستقل و مشتقات این تابع، را در نظر بگیرید.

$$F\left(x, y, t, u(x, y, t), \dots, \frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\beta u(x, y, t)}{\partial y^\beta}, \frac{\partial^\gamma u(x, y, t)}{\partial t^\gamma}, \dots\right) = f(x, y, t) \quad (49)$$

در رابطه بالا، $f(x, y, t)$ می تواند یک ثابت یا یک تابع معلوم باشد و $x \in [A_1, B_1]$ ، $y \in [A_2, B_2]$ و $t \in [A_3, B_3]$ دامنه متغیرهای ثابت و α, β و γ به ترتیب بالاترین مرتبه مشتق به کار رفته در معادله نسبت به x, y و t فرض می شوند. طبق روندی که در تعریف موجک هار اشاره شد، می توان بازه های $[A_1, B_1]$ ، $[A_2, B_2]$ و $[A_3, B_3]$ را به ترتیب به $2M_1, 2M_2$ و $2M_3$ قسمت با اندازه های یکسان تقسیم کرد. در این حالت جواب معادله دیفرانسیل جزئی به فرم رابطه زیر فرض می شود.

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u(x, y, t)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial t^\gamma} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} a_{i,j,l} h_i(x_r) h_j(y_k) h_l(t_g) \quad (50)$$

در رابطه بالا، $a_{i,j,l}$ ماتریس ضرایب هار در حالت سه بعدی نامیده می شود و نقاط مجموعه ای هر بازه از روابط زیر به دست می آیند.

$$x_r = A_1 + (r - 0.5)\Delta x \quad (\Delta x = (B_1 - A_1)/2M_1, \quad r = 1, 2, \dots, 2M_1) \quad (51)$$

$$y_k = A_2 + (k - 0.5)\Delta y \quad (\Delta y = (B_2 - A_2)/2M_2, \quad k = 1, 2, \dots, 2M_2) \quad (52)$$

$$t_g = A_3 + (g - 0.5)\Delta t \quad (\Delta t = (B_3 - A_3)/2M_3, \quad g = 1, 2, \dots, 2M_3) \quad (53)$$

در ادامه برای رسیدن به تابع جابه جایی u ، ابتدا از رابطه (50) α بار سپس β بار و در نهایت γ بار انتگرال می گیریم تا رابطه زیر به دست بیاید.

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} a_{i,j,l} P_{\alpha,i}(x_r) P_{\beta,j}(y_k) P_{\gamma,l}(t_g) + \sum_{ii=0}^{\alpha-1} \frac{(x)^{ii}}{(ii)!} \frac{\partial^{(ii)} u(0, y, t)}{\partial x^{ii}} + \sum_{jj=0}^{\beta-1} \frac{(y)^{jj}}{(jj)!} \frac{\partial^{(jj)} u(x, 0, t)}{\partial y^{jj}} + \sum_{ll=0}^{\gamma-1} \frac{(t)^{ll}}{(ll)!} \frac{\partial^{(ll)} u(x, y, 0)}{\partial t^{ll}} - \sum_{ll=0}^{\gamma-1} \frac{(t)^{ll}}{(ll)!} \sum_{ii=0}^{\alpha-1} \frac{(x)^{ii}}{(ii)!} \frac{\partial^{(ii+ll)} u(0, y, 0)}{\partial x^{ii} \partial t^{ll}} - \sum_{ll=0}^{\gamma-1} \frac{(t)^{ll}}{(ll)!} \sum_{jj=0}^{\beta-1} \frac{(y)^{jj}}{(jj)!} \frac{\partial^{(jj+ll)} u(x, 0, 0)}{\partial y^{jj} \partial t^{ll}} - \sum_{jj=0}^{\beta-1} \frac{(y)^{jj}}{(jj)!} \sum_{ii=0}^{\alpha-1} \frac{(x)^{ii}}{(ii)!} \frac{\partial^{(ii+jj)} u(0, 0, t)}{\partial x^{ii} \partial y^{jj}} + \sum_{ii=0}^{\alpha-1} \frac{(x)^{ii}}{(ii)!} \sum_{jj=0}^{\beta-1} \frac{(y)^{jj}}{(jj)!} \sum_{ll=0}^{\gamma-1} \frac{(t)^{ll}}{(ll)!} \frac{\partial^{(ii+jj+ll)} u(0, 0, 0)}{\partial x^{ii} \partial y^{jj} \partial t^{ll}} \quad (54)$$

در رابطه بالا، انتگرال های $P_{\alpha,i}(x_r)$ ، $P_{\beta,j}(y_k)$ و $P_{\gamma,l}(t_g)$ از روابط (43 و 44) و سایر جملات با به کارگیری شرایط اولیه و مرزی مسئله محاسبه می شوند. در حالت حل مرتبه بالاتر، رابطه (50) می تواند به صورت رابطه زیر نوشته شود.

$$\frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma+6s)} u(x, y, t)}{\partial x^{\alpha+2s} \partial y^{\beta+2s} \partial t^{\gamma+2s}} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} a_{i,j,l} h_i(x_r) h_j(y_k) h_l(t_g) \quad (55)$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا و در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی صفحه مرکب با تکیه گاه ساده و طول و عرض واحد، تابع جابه جایی u و سایر توابع جابه جایی به کار رفته در معادلات حاکم بر صفحه مرکب و مشتقات آنها را می توان برحسب ماتریس های هار، که در حالت حل موجک هار مرتبه بالاتر با $s=1$ به صورت زیر به دست می آیند، بازنویسی کرد.

$$\left\{ \begin{aligned} &u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t), w(x_1, x_2, t), \theta_1(x_1, x_2, t), \\ &\theta_2(x_1, x_2, t), \Psi_1(x_1, x_2, t), \Psi_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (56)$$

$$\left(P_{4,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{2,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{2,i}(1) - x_r P_{4,i}(1) \right) \left(P_{4,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{2,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{2,j}(1) - y_k P_{4,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (57)$$

$$\left(P_{3,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{1,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{1,i}(1) - x_r P_{3,i}(1) \right) \left(P_{4,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{2,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{2,j}(1) - y_k P_{4,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (58)$$

$$\left(P_{4,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{2,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{2,i}(1) - x_r P_{4,i}(1) \right) \left(P_{3,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{1,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{1,j}(1) - y_k P_{3,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (59)$$

$$\left(P_{2,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{0,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{0,i}(1) - x_r P_{2,i}(1) \right) \left(P_{4,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{2,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{2,j}(1) - y_k P_{4,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (60)$$

$$\left(P_{4,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{2,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{2,i}(1) - x_r P_{4,i}(1) \right) \left(P_{2,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{0,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{0,j}(1) - y_k P_{2,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \\ &\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t), \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{2M_1} \sum_{j=1}^{2M_2} \sum_{l=1}^{2M_3} \{a_{i,j,l}, b_{i,j,l}, c_{i,j,l}, d_{i,j,l}, e_{i,j,l}, f_{i,j,l}, g_{i,j,l}\} \quad (61)$$

$$\left(P_{3,i}(x_r) - \frac{x_r^3}{6} P_{1,i}(1) + \frac{x_r}{6} P_{1,i}(1) - x_r P_{3,i}(1) \right) \left(P_{3,j}(y_k) - \frac{y_k^3}{6} P_{1,j}(1) + \frac{y_k}{6} P_{1,j}(1) - y_k P_{3,j}(1) \right) (P_{4,l}(t_g))$$

موجک هار مرتبه بالاتر در حالت $s=1$ ، که از برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب به دست آمده‌اند، در حالتی که نسبت مدول الاستیسیته طولی به عرضی برابر سه و وضوح برابر دو در نظر گرفته شده است، مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج به دست آمده نشان می‌دهد در ابعاد ماتریسی برابر، استفاده از حل موجک هار مرتبه بالاتر باعث رسیدن به جواب دقیق‌تر نسبت به موجک هار می‌شود. در جداول (۴ تا ۸) نسبت‌های فرکانسی بدون بعد به دست آمده با استفاده از حل موجک هار مرتبه بالاتر با تعدادی از نتایج روش‌های حل دیگر صفحات اشاره شده در جدول (۱)، مورد مقایسه قرار گرفته است. بررسی نتایج نشان دهنده دقت خوب حل به کار گرفته شده می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت مدول الاستیسیته طولی به عرضی با هر تعداد لایه، شاخص فرکانسی افزایش می‌یابد.

مطابق مرجع [45]، با در اختیار داشتن جواب دقیق می‌توان با در نظر گرفتن جواب عددی حاصل از دو وضوح متوالی، نرخ همگرایی جواب‌های به دست آمده را با استفاده از رابطه زیر، مورد بررسی قرار داد. در حالت $s=1$ میزان این نرخ برابر $2 + 2s$ می‌باشد.

$$k_i = \frac{\log((F_{i-1} - F_0)/(F_i - F_0))}{\log(2)} \quad (64)$$

در رابطه بالا، F_0 جواب دقیق و F_i جواب حاصل از وضوح $i = 1$ می‌باشد. جدول (۹) شامل نتایج شاخص فرکانسی صفحه پنج لایه با دو وضوح متوالی و نسبت مدول الاستیسیته طولی به عرضی برابر سه، نشان دهنده همگرایی نزدیک جواب‌های به دست آمده می‌باشد. همچنین در جدول (۱۰) مدت زمان کلی رسیدن به جواب برای یک صفحه مرکب پنج لایه در دو وضوح متوالی و نسبت مدول الاستیسیته طولی به عرضی برابر سه، آورده شده است. در کمترین وضوح این مدت زمان به مراتب کمتر از وضوح بالاتر می‌باشد.

نمونه ۲. در این نمونه یک صفحه مرکب چهارلایه با جهت‌گیری فیبرها به صورت $[0/90/90/0]$ و نسبت پهنا به ضخامت سی و مشخصات الاستیک مطابق جدول (۱۱) با تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شده است. در جدول (۱۲) شاخص فرکانس اصلی بدون بعد برای این صفحه و شاخص فرکانسی بدون بعد مودهای بالاتر به دست آمده از حل پیشنهادی مورد مقایسه قرار گرفته است.

با جای‌گذاری روابط بالا در معادلات حاکم بر صفحه مرکب (با توجه به اینکه $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = -\omega^2 d$)، ماتریس‌های جایگزین شده با ضرایب مجهولات جابه‌جایی نسبت به مکان، تشکیل ماتریس سختی معادل صفحه مرکب (K)، ماتریس‌های جایگزین شده با ضرایب مجهولات جابه‌جایی نسبت به زمان، تشکیل ماتریس جرم معادل صفحه مرکب (M) و ضرایب مجهول هار، تشکیل بردار اشکال مودی صفحه مرکب (X) را می‌دهند. معادله حاکم بر ارتعاش آزاد صفحه مرکب چندلایه می‌تواند به فرم مسئله مقدار ویژه مطابق رابطه زیر در نظر گرفته شود.

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = 0 \quad (62)$$

در این رابطه پس از جای‌گذاری ماتریس‌های حل عددی، هر کدام از ماتریس‌های سختی و جرم، با توجه به هفت متغیر جابه‌جایی، ماتریسی با ابعاد 7×7 خواهند بود که هر درایه آن با توجه به میزان وضوح در نظر گرفته شده حل عددی، به یک زیرماتریس با ابعاد $(2M)^3 \times (2M)^3$ تبدیل می‌شود. برای نمونه در وضوح $J = 1$ ابعاد هر کدام از ماتریس‌های سختی و جرم 448×448 و در وضوح $J = 2$ ابعاد هر کدام از ماتریس‌های سختی و جرم 3584×3584 و در وضوح $J = 3$ ابعاد هر کدام از ماتریس‌های سختی و جرم 28672×28672 خواهد بود.

۴- نتایج عددی و بحث

نمونه ۱. در این نمونه به منظور بحث و مقایسه پیرامون دقت نتایج به دست آمده از روش حل پیشنهادی و پارامترهای مؤثر بر ارتعاش آزاد، صفحه مرکب چندلایه با نسبت‌های مدول الاستیسیته و تعداد لایه‌های مختلف با شرایط تکیه‌گاهی ساده در تمام لبه‌ها، مورد بررسی قرار گرفته است. ویژگی‌های مورد استفاده صفحات چندلایه در جداول (۱ و ۲) آورده شده است.

به منظور مقایسه جواب‌های به دست آمده، از رابطه شاخص فرکانسی بدون بعد (Ω) به صورت زیر استفاده می‌شود [32].

$$\Omega = \omega H \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \quad (63)$$

در رابطه بالا، ω فرکانس اصلی به دست آمده از حل مسئله مقدار ویژه می‌باشد. در جدول (۳) جواب شاخص فرکانسی بدون بعد، حاصل از حل عددی موجک هار، با حل عددی حاصل از

جدول ۱. مشخصات صفحات چندلایه مورد استفاده

Table 1. Properties of used laminate composite plates

Width to length ratio	Width to thickness ratio	Stacking sequence	Fiber orientation	Elastic properties	Composite plate type
1	5	unidirectional	[0/90/0]	according to table 2	three-layer
1	5	unidirectional	[0/90/90/0]	according to table 2	four-layer
1	5	unidirectional	[0/90/0/90/0]	according to table 2	five-layer
1	5	unidirectional	[0/90/0/90/0/90/0]	according to table 2	seven-layer
1	5	unidirectional	[0/90/0/90/0/90/0/90/0]	according to table 2	nine-layer

جدول ۲. مشخصات الاستیک لایه‌های صفحات مرکب

Table 2. Elastic properties of laminate composite plates

Unit	Value	Elastic property
Pa	arbitrary	Longitudinal modulus of elasticity (E_{11})
Pa	according to $\frac{E_{11}}{E_{22}}$ ratio	Transverse modulus of elasticity (E_{22})
Pa	$0.6E_{22}$	Shear modulus in the x_1x_2 plane (G_{12})
Pa	$0.6E_{22}$	Shear modulus in the x_1z plane (G_{13})
Pa	$0.5E_{22}$	Shear modulus in the x_2z plane (G_{23})
—	0.25	Poisson's ratio (ν)

جدول ۳. مقایسه حل موجک هار و حل موجک هار مرتبه بالاتر در تحلیل صفحه پنج‌لایه ($s=1, J=2, \frac{E_{11}}{E_{22}}=3$)

Table 3. Comparison between solution of Haar wavelet and higher order Haar wavelet in the analysis of five-layer composite plate

Dimensionless frequency index (Ω)			Composite plate type
3D elasticity solution [3]	Haar wavelet solution	Higher order Haar wavelet solution	
0.2659	0.2813	0.2669	five-layer

جدول ۴. مقایسه شاخص‌های فرکانسی به دست آمده صفحه مرکب سه‌لایه با روش‌های حل دیگر

Table 4. Comparing the obtained frequency indices of the three-layer composite plate with other solution methods

Dimensionless frequency index (Ω)				Reference
$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 30$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	
0.3917	0.3673	0.3237	0.2609	Present method
0.4109	0.3824	0.3284	0.2647	Noor (3D elasticity) [3]
0.3936	0.3697	0.3266	0.2627	Matsunaga [23]
0.3950	0.3704	0.3270	0.2631	Sayyad and Ghugal [26]
0.4194	0.3898	0.3392	0.2695	Owen and Li [27]
0.3937	0.3693	0.3260	0.2621	Pandya and Kant [29]
0.4015	0.3749	0.3318	0.2673	Vuksanović [13]
0.3941	0.3667	0.3264	0.2623	Nayak et al. [30]
0.3928	0.3688	0.3258	0.2620	Zhen et al. [31]
0.3927	0.3691	0.3262	0.2621	Marjanović and Vuksanović [32]
0.3840	0.3640	0.3252	0.2646	Belarbi et al. [33]

جدول ۵. مقایسه شاخص‌های فرکانسی به دست آمده صفحه مرکب چهارلایه با روش‌های حل دیگر

Table 5. Comparing the obtained frequency indices of the four-layer composite plate with other solution methods

Dimensionless frequency index (Ω)				Reference
$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 30$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	
0.4076	0.3791	0.3249	0.2622	Present method
0.4109	0.3824	0.3284	0.2673	Noor (3D elasticity) [3]
0.4117	0.3817	0.3312	0.2625	Karama at al. [24]
0.4122	0.3821	0.3314	0.2626	Mantari at al. [25]
0.4119	0.3821	0.3319	0.2634	Sayyad and Ghugal [26]
0.4109	0.3811	0.3309	0.2624	Phan and Reddy [11]

جدول ۶. مقایسه شاخص‌های فرکانسی به دست آمده صفحه مرکب پنج‌لایه با روش‌های حل دیگر

Table 6. Comparing the obtained frequency indices of the five-layer composite plate with other solution methods

Dimensionless frequency index (Ω)				Reference
$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 30$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	
0.4343	0.3898	0.3379	0.2669	Present method
0.4314	0.3979	0.3409	0.2659	Noor (3D elasticity) [3]
0.4216	0.3901	0.3362	0.2638	Matsunaga [23]
0.4288	0.3950	0.3385	0.2644	Sayyad and Ghugal [26]
0.4370	0.4030	0.3453	0.2699	Owen and Li [27]
0.4258	0.3930	0.3375	0.2641	Kant and Manjunatha [28]
0.4208	0.3893	0.3354	0.2631	Zhen et al. [31]
0.4269	0.3939	0.3442	0.2684	Vuksanović [13]
0.4257	0.3929	0.3372	0.2636	Nayak et al. [30]
0.4219	0.3918	0.3396	0.2683	Marjanović and Vuksanović [32]
0.4300	0.3966	0.3404	0.2662	Belarbi et al. [33]

جدول ۷. مقایسه شاخص‌های فرکانسی به دست آمده صفحه مرکب هفت‌لایه با روش‌های حل دیگر

Table 7. Comparing the obtained frequency indices of the seven-layer composite plate with other solution methods

Dimensionless frequency index (Ω)				Reference
$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 30$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	
0.4426	0.3991	0.3438	0.2689	Present method
0.4421	0.4055	0.3443	0.2664	Noor (3D elasticity) [3]
0.4412	0.4093	0.3450	0.2667	Sayyad and Ghugal [26]
0.4386	0.4022	0.3417	0.2646	Kant and Manjunatha [28]
0.4379	0.4015	0.3410	0.2638	Pandya and Kant [29]

جدول ۸. مقایسه شاخص‌های فرکانسی به دست آمده صفحه مرکب نه‌لایه با روش‌های حل دیگر

Table 8. Comparing the obtained frequency indices of the nine-layer composite plate with other solution methods

Dimensionless frequency index (Ω)				Reference
$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 30$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 20$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 10$	$\frac{E_{11}}{E_{22}} = 3$	
0.4457	0.4027	0.3461	0.2697	Present method
0.4421	0.4055	0.3443	0.2664	Noor (3D elasticity) [3]
0.4376	0.4016	0.3414	0.2645	Matsunaga [23]
0.4263	0.3935	0.3378	0.2641	Nayak et al. [30]
0.4362	0.4002	0.3402	0.2636	Zhen et al. [31]
0.4418	0.4042	0.3427	0.2650	Sayyad and Ghugal [26]

جدول ۹. بررسی همگرایی شاخص‌های فرکانسی صفحه مرکب پنج‌لایه

Table 9. Examining the convergence of the frequency indices of the five-layer composite plate ($\frac{E_{11}}{E_{22}}=3, s=1$)

Rate of convergence	Dimensionless frequency index (Ω)			Composite plate type
	3D elasticity solution [3]	Numerical solution		
		J=2	J=1	
3.991	0.2659	0.2669	0.2818	five-layer

جدول ۱۰. زمان محاسبات مربوط به نمونه ۱ صفحه مرکب پنج‌لایه در دو وضوح مختلف

Table 10. Computational time of the five-layer composite plate with different resolution ($\frac{E_{11}}{E_{22}}=3, s=1$)

Computational time (s)		Composite plate type
J=2	J=1	
7038.33	125.45	five-layer

جدول ۱۱. مشخصات الاستیک لایه‌های صفحه مرکب با شرایط مرزی گیردار

Table 11. Elastic properties of fixed laminate composite plate

Unit	Value	Elastic property
GPa	224.649	Longitudinal modulus of elasticity (E_{11})
GPa	12.753	Transverse modulus of elasticity (E_{22})
GPa	4.434	Shear modulus in the x_1x_2 plane (G_{12})
GPa	4.434	Shear modulus in the x_1z plane (G_{13})
GPa	2.497	Shear modulus in the x_2z plane (G_{23})
—	0.25	Poisson's ratio (ν)

جدول ۱۲. شاخص فرکانس بدون بعد صفحه چهارلایه مرکب با شرایط مرزی گیردار

Table 12. Dimensionless frequencies of a fixed four-layer composite plate ($\frac{a}{H}=30, J=1, s=1$)

Numayr et al. [34]	Present method	Mode number
0.9001	0.9043	1
1.3150	1.3913	2
2.1395	2.5311	3
3.3076	3.4376	4

۵- نتیجه گیری

در لبه‌ها با نسبت‌های مدول الاستیسیته طولی به عرضی متفاوت و تعداد لایه‌های مختلف استخراج و با نتایج پژوهش‌های مشابه مقایسه شد. مقایسه این نتایج به دست آمده از روش حل عددی به کار گرفته شده نشان می‌دهد این روش پیشنهادی از دقت خوبی در مقایسه با دیگر روش‌های حل اشاره شده در این تحقیق، برخوردار است. این درحالیست که با تبدیل معادلات حرکت چند متغیره به عبارت‌های جبری خطی، نتایج حاصل از این روش پیشنهادی بدون پیچیدگی خاصی و با تعداد کمی از نقاط مجموعه‌ای به دست آمده‌اند. رسیدن نتایج روش پیشنهادی به دقت نتایج حل موجک‌ها با ابعاد ماتریسی کمتر و در نتیجه کاهش

در این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد صفحه مرکب چندلایه با استفاده از حل عددی موجک‌ها مرتبه بالاتر بررسی شد. ابتدا رفتار حاکم بر صفحه مرکب چندلایه براساس نظریه زیگزاگ بهبودیافته مدل‌سازی و معادلات حرکت حاکم استخراج شد و سپس مجهولات جابه‌جایی و مشتقات آنها در معادلات، با ماتریس‌های به دست آمده از تعریف موجک‌ها مرتبه بالاتر جایگزین شد و فرکانس‌های طبیعی از حل مسئله مقدار ویژه با استفاده از برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب به دست آمد. نسبت‌های فرکانسی بدون بعد برای صفحه مرکب با تکیه‌گاه ساده

تعارض منافع

هیچ تعارض منافی برای نویسندگان این مقاله در انتشار آن وجود ندارد.

سهم نویسندگان

سهم هر یک از نویسندگان یک سوم از کل است.

منابع مالی

از منابع مالی خاصی کمک گرفته نشده است.

References

- [1] Reddy, J.N., 2004. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press.
- [2] Pagano, N.J., 1969. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *Journal of Composite Materials*, 3(3), pp.398–411.
- [3] Noor, A.K., 1973. Free vibrations of multilayered composite plates. *AIAA Journal*, 11(7), pp.1038–1039.
- [4] Carrera, E., 2002. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2), pp.87–140.
- [5] Khandan, R., Noroozi, S., Sewell, P. and Vinney, J., 2012. The Development of Laminated Composite Plate Theories: A Review. *Journal of Materials Science*, 47(16), pp.5901–5910.
- [6] Plagianakos, T.S. and Saravanos, D.A., 2009. Higher-order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates. *Composite Structures*, 87(1), pp.23–35.
- [7] Nosier, A., Kapania, R.K. and Reddy, J.N., 1993. Free Vibration Analysis of Laminated Plates Using a Layerwise Theory. *AIAA Journal*, 31(12), pp.2335–2346.
- [8] Carrera, E. and Ciuffreda, A., 2005. A Unified Formulation to Assess Theories of Multilayered Plates for Various Bending Problems. *Composite Structures*, 69(3), pp.271–293.
- [9] Zhang, Y.X. and Yang, C.H., 2009. Recent Developments in Finite Element Analysis for Laminated Composite Plates. *Composite Structures*, 88(1), pp.147–157.
- [10] Reddy, J.N., 1984. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4), pp.745–752.
- [11] Phan, N.D. and Reddy, J.N., 1985. Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Shear Deformation Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(12), pp.2201–2219.
- [12] Reddy, J.N. and Arciniega, R.A., 2004. Shear Deformation Plate and Shell Theories: From Stavsky to Present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11(6), pp.535–582.
- [13] Vuksanović, D., 2000. Linear analysis of laminated composite plates using single layer higher-order discrete models. *Composite Structures*, 48(1), pp.205–211.
- [14] Stein, M., 1986. Nonlinear Theory for Plates and Shells Including the Effects of Transverse Shearing. *AIAA Journal*, 24(9), pp.1537–1544.
- [15] Lee, C.Y. and Liu, D., 1992. An Interlaminar Stress Continuity Theory For Laminated Composite Analysis. *Computers & Structures*, 42(1), pp.69–78.
- [16] Soldatos, K.P., 1992. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3), pp.195–220.
- [17] Karama, M., Afaq, K.S. and Mistou, S., 2003. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), pp.1525–1546.
- [18] Matsunaga, H., 2002. Interlaminar Stress Analysis of Laminated Composite Beam According to Global Higher-Order Deformation Theories. *Composite Structures*, 55(1), pp.105–114.
- [19] Di Sciuva, M., 1987. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3), pp.589–596.
- [20] Di Sciuva, M., 1992. Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses. *Composite Structures*, 22(3), pp.149–167.
- [21] Tessler, A., Di Sciuva, M. and Gherlone, M., 2009. *Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates*. Technical Report, NASA/TP-2009-215561, pp.1–53.
- [22] Tessler, A., Di Sciuva, M. and Gherlone, M., 2010. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5(3), pp.341–367.
- [23] Matsunaga, H., 2000. Vibration and stability of cross-ply

- laminated composite plates according to a global higher order plate theory. *Composite Structures*, 48(3), pp.231–244.
- [24] Karama, M., Afaq, K.S. and Mistou, S., 2009. A new theory for laminated composite plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 223(2), pp.53–62.
- [25] Mantari, J.L., Öktem, A.S. and Soares, C.G., 2011. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(1), pp.37–49.
- [26] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M., 2015. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Composite Structures*, 129, pp.177–201.
- [27] Owen, D.R.J. and Li, Z.H., 1987. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods—II Vibration and stability. *Computers & Structures*, 26(6), pp.915–923.
- [28] Kant, T. and Manjunatha, B.S., 1988. An un-symmetric FRC laminate C3 finite element model with 12 degrees of freedom per node. *Engineering with Computers*, 5(3), pp.300–308.
- [29] Pandya, B.N. and Kant, T., 1988. Finite element stress analysis of a laminated composite plate using a higher-order displacement model. *Composites Science and Technology*, 32(2), pp.137–155.
- [30] Nayak, A.K., Moy, S.S.J. and Shenoi, R.A., 2002. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory. *Composites Part B: Engineering*, 33(7), pp.505–519.
- [31] Zhen, W., Wanji, C. and Xiaohui, R., 2010. An accurate higher-order theory and C0 finite element for free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures*, 92(6), pp.1299–1307.
- [32] Marjanović, M. and Vuksanović, D., 2014. Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations. *Composite Structures*, 108, pp.9–20.
- [33] Belarbi, M.O., Tati, A., Ounis, H. and Khechai, A., 2017. On the Free Vibration Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates: A Layerwise Finite Element Formulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14(11), pp.2265–2290.
- [34] Numayr, K.S., Haddad, R.H. and Haddad, M.A., 2004. Free vibration of composite plates using the finite difference method. *Thin-Walled Structures*, 42(3), pp.399–414.
- [35] Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Viola, E., Tornabene, F., Fantuzzi, N. and Zenkour, A.M., 2014. Analysis of Thick Isotropic and Cross-ply Laminated Plates by Generalized Differential Quadrature Method and a Unified Formulation. *Composites Part B: Engineering*, 58, pp.544–552.
- [36] Thai, C.H., Nguyen-Xuan, H., Bordas, S.P.A. and Nguyen-Thanh, N., 2015. Isogeometric Analysis of Laminated Composite Plates Using the Higher Order Shear Deformation Theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22(6), pp.451–469.
- [37] Natarajan, S., Ferreira, A.J.M. and Nguyen-Xuan, H., 2014. Analysis of CrossPly Laminated Plates Using Isogeometric Analysis and Unified Formulation. *Curved and Layered Structures*, 1(1), pp.1–10.
- [38] Di Sciuva, M. and Sorrenti, M., 2019. A Family of C0 Quadrilateral Plate Elements Based on the Refined Zigzag Theory for the Analysis of Thin and Thick Laminated Composite and Sandwich Plates. *Journal of Composites Science*, 3(4), p.100.
- [39] Lepik, Ü. and Hein, H., 2014. *Haar wavelets: with applications*. Berlin: Springer.
- [40] Chen, C.F. and Hsiao, C.H., 1997. Haar wavelet method for solving lumped and distributed parameter systems. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 144(1), pp.87–94.
- [41] Lepik, Ü., 2005. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. *Mathematics and Computers in Simulation*, 68(2), pp.127–143.
- [42] Lepik, Ü., 2008. Solving differential and integral equations by the Haar wavelet method; revisited. *International Journal of Mathematics and Computation*, 1, pp.43–52.
- [43] Lepik, Ü., 2011. Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(7), pp.1873–1879.
- [44] Majak, J., Pohlak, M., Karjust, K., Eerme, M., Kurnitski, J. and Shvartsman, B.S., 2018. New higher order Haar wavelet method: application to FGM structures. *Composite Structures*, 201, pp.72–78.
- [45] Majak, J., Ratas, M., Karjust, K. and Shvartsman, B.S., 2020. Higher order Haar wavelet method for solving differential equations. In: *Wavelet Theory*. London: IntechOpen.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم؟

Mirahmadi Chenaruiyeh, A., Fadaee Fathabadi, M.J. and Saffari, H., 2026. Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plate Using Higher Order Haar Wavelet. *Modares Civil Engineering journal*, 26(3), pp.25-42.

