


## Solving Viscoelastic Problems Using Complex Fourier Boundary Element Method

M. Bahrampour<sup>1</sup>, S. Hamzehei-Javaran<sup>1\*</sup> , S. Shojaee<sup>1</sup>

1. Civil Engineering Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

### Abstract

This paper suggests a novel numerical approach to the analysis of two-dimensional viscoelastic materials using an enriched boundary element method (BEM) with complex Fourier radial basis functions (RBFs). The research is motivated by the growing need for accuracy and efficiency in tools capable of simulating the time-dependent behavior of materials like rubber, concrete, and polymers. The standard elastic analysis is not capable of modeling such advanced materials, and thus, viscoelastic formulations emerge as a more efficient option. The new method incorporates the Kelvin–Voigt rheological model and the weighted residual approach to constitute the governing equations, and finally uses complex Fourier shape functions to perform boundary variable interpolation. In the classical BEM, kernel functions are the fundamental solutions of the governing differential equations, and the field of interest is transformed to its boundary, leading to a significant reduction in the number of degrees of freedom. However, classical BEM accuracy can be finite, especially when employing conventional Lagrangian shape functions. To overcome such shortcomings, this contribution develops and applies sophisticated Fourier-based RBFs that are capable of meeting exponential, trigonometric, and polynomial field behavior simultaneously. The shape functions of these RBFs have Kronecker delta-type characteristics, partition of unity, and piecewise infinite continuity, which collectively enable enhanced convergence and satisfaction of boundary conditions. The contribution first develops the enriched formulation for boundary viscoelastic problems, achieving consistency through the extension of complex Fourier shape functions, with algebraic techniques for their use in boundary discretization. A major innovation is the hybridization of complex exponential and trigonometric terms into a radial form, enabling a more general approximation of boundary field variables.

For the validation of the proposed method, three classic problems are analyzed: (1) a simply supported beam with a time-varying load, (2) a fixed beam with a central point load, and (3) radial deformation of a viscoelastic rocket motor case due to constant internal pressure. In all cases, the solutions from the complex Fourier BEM are compared with the classical BEM solutions and available analytical solutions. The evaluation includes displacement-time history plots and mesh plots, which show the increased accuracy and convergence of the new approach. Notably, the Fourier BEM always produces results very close to analytical benchmarks, even with fewer elements, while classical BEM deviates significantly from the analytical results over time. The results indicate that the new method possesses several advantages: reduced degrees of freedom, higher accuracy, and computational efficiency. This is owing to the spectral richness of complex Fourier RBFs and their ability to approximate a wide range of physical responses. Furthermore, the formulation remains stable for creep and stress relaxation calculations over time owing to the stability of the implemented shape functions. In summary, the new Fourier boundary element method provides an exciting alternative to the traditional numerical methods in viscoelastic simulation. It benefits from the dimensional reduction property of BEM and high accuracy of spectral interpolation, thereby being particularly beneficial for simulating time-dependent mechanical properties in engineering materials. Further work can focus on generalizing the method to three-dimensional problems or anisotropic viscoelastic materials.

### Review History

Received: Mar 15, 2025

Revised: July 6, 2025

Accepted: Nov 8, 2025

### Keywords

2D Viscoelastic problems  
Boundary element method  
Radial basis functions  
Complex Fourier elements

\* Corresponding Author Email: [s.hamzeheijavaran@uk.ac.ir](mailto:s.hamzeheijavaran@uk.ac.ir) - ORCID: 0000-0002-7341-4314 - Tel.: +989123054622



## حل مسائل ویسکوالاستیک با استفاده از روش اجزای مرزی مختلط فوریه

مهدیه بهرامپور<sup>۱</sup>، صالح حمزهء جواران<sup>۲\*</sup> ID، سعید شجاعی<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

۲. دانشیار، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

۳. استاد، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

### چکیده

### تاریخچه داوری

در این مقاله، روش اجزا مرزی مختلط فوریه برای تحلیل عددی دوبعدی مواد ویسکوالاستیک مانند لاستیک، بتن، پلیمر یا مواد زیستی با استفاده از توابع پایه شعاعی (RBF) باز فرمول‌بندی شده است. این مسئله به این دلیل مورد توجه قرار گرفته است که با پیشرفت علم و گرایش به روش‌های بهینه‌تر، به دیدگاه‌های واقعی‌تری نیاز پیدا شده است.

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۱۵

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۱۷

### کلمات کلیدی

مسائل ویسکوالاستیک دوبعدی

روش اجزای مرزی

توابع پایه شعاعی

المان مختلط فوریه

در روش متداول اجزای مرزی (BEM)، قضیه کلاسیک دوگانه بازمینی شده است و توابع پایه مختلط فوریه به جای توابع شکل کلاسیک لاگرانژ به کار گرفته شده‌اند. این توابع می‌توانند حوزه‌های مختلفی مانند میدان توابع نمایی و مثلثاتی و همچنین توابع چندجمله‌ای را اغنا کنند. سپس، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های تخمین زده شده و برای سه مسئله مرجع با روش‌های کلاسیک و تحلیلی مقایسه می‌شوند تا اعتبار و پایداری روش پیشنهادی بررسی شود. نتایج، نشان‌دهنده دقت و کارایی بالای روش فوریه در مقایسه با رویکرد کلاسیک است و با توجه به اینکه نتایج دقیق‌تر با کمترین درجه‌های آزادی به دست می‌آیند، نتیجه‌گیری می‌شود که روش پیشنهادی اقتصادی‌تر و کارآمدتر است.

### ۱- مقدمه

ویسکوز (ویسکوز) یک میراگر می‌باشد. ترکیب‌های خطی مختلفی از دو المان مذکور در طول سال‌ها به منظور رسیدن به تجسمی قابل قبول‌تر انجام شده است که شامل مدل‌های کلین-وویت، مکسول-ویچرت، پویتینگ-تامسون و مدل جفری می‌باشد. برخی از مدل‌های پیچیده‌تر نیز در پیشینه تحقیقات علمی گزارش شده است که هر یک مزایا و معایب خاص خود را در مدل‌سازی خزش و وادادگی تنش دارد [2, 3] و در این راستا روش‌های عددی در تحلیل ویسکوالاستیک به طور فزاینده‌ای رایج شده‌اند [4-12].

در مسائل مهندسی، نتایج تحلیلی به راحتی در دسترس نیستند و حتی در برخی موارد به طور کامل غیرقابل دسترسی هستند. به همین دلیل پژوهشگران به روش‌های عددی در قالب کدهای رایانه‌ای روی

با توجه به این موضوع که تحلیل ویسکوالاستیک نسبت به روش‌های معمول الاستیک، دیدگاه واقع‌گرایانه‌تری ارائه می‌دهد و در نتیجه به شبیه‌سازی بهینه‌تر و اقتصادی‌تری منجر می‌شود، در سال‌های اخیر مواد ویسکوالاستیک توجه زیادی را به خود جلب نموده‌اند. کاربردهای وسیعی از این مواد در رشته‌هایی مانند مهندسی سازه به عنوان سیستم‌های اتلافی، دینامیک سازه‌ها و رئولوژی مشاهده می‌شود [1]. مواد ویسکوالاستیک با تفکیک رفتار آن‌ها به دو بخش الاستیک و ویسکوز مدل‌سازی می‌شوند. یک فنر نمایانگر جسم هوکین<sup>۱</sup> (بخش الاستیک) است و نماینده مایع نیوتنی<sup>۲</sup> (بخش

<sup>1</sup> Hookean Solid

<sup>2</sup> Newtonian Fluid

آزادی<sup>۸</sup>، دقت کلی فرمول‌بندی BEM ویسکوالاستیک، افزایش می‌یابد [26]، اما همچنان معضل زمان و بهینه‌سازی مطرح است و به همین دلیل انتخاب دقیق توابع تقریب برای بهینه‌سازی فرایند، از اهمیت بالایی برخوردار است.

توابع پایه شعاعی<sup>۹</sup> به عنوان توابع درون یاب در این مقاله در نظر گرفته خواهند شد. نویسندگان، پیش‌تر از توابع پایه هنکل کروی<sup>۱۰</sup> در تحلیل FEM مواد ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند [33] و در اینجا، توابع پایه مختلط فوریه<sup>۱۱</sup> با قدرت عددی بالا به عنوان جایگزینی برای توابع شکل کلاسیک لاگرانژی در نظر گرفته شده است. این توابع شکل نخستین بار توسط حمزه جواران و همکاران در سال ۲۰۱۱ معرفی شدند [34] و پس از آن در تقریب میدان‌های متفاوت از مسائل مهندسی به کار گرفته شدند [35-41] که نتایج رضایت‌بخشی نشان دادند. از جمله نقاط قوت این درون‌یاب‌ها می‌توان به ارضا هم‌زمان میدان توابع نمایی و مثلثاتی و نیز میدان توابع چند جمله‌ای اشاره کرد. RBF ها معمولاً به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند. دسته اول غیرنوسانی<sup>۱۲</sup> مانند اسپینل‌های نازک<sup>۱۳</sup>، مولتی‌کوادریک‌ها<sup>۱۴</sup> و توابع مخروطی [15, 42, 43] و دسته دیگر مانند فوریه حقیقی و مختلط، J-Bessel و توابع پایه هنکل کروی، نوسانی هستند [33, 35 - 37, 39, 40, 44 - 55]. در این پژوهش، چند نمونه عددی برای نشان دادن درستی، پوشش عددی کامل میدان، توانایی همگرایی سریع روش پیشنهادی و مزایای استفاده از آن در زمینه ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- فرمول‌بندی اجزای مرزی ویسکوالاستیک

همان‌گونه که ذکر شد، رفتار ویسکوالاستیک مواد باید از طریق مدل‌های مختلف شبیه‌سازی شود [2] و روش اجزای مرزی نیز باید با استفاده از یکی از دو روش توصیف‌شده به کار گرفته شود. هر مدل و روش دارای مزایا و معایب خاص خود است [۱۸]. مدل رئولوژیکی کلون-وویت<sup>۱۵</sup> با ترکیبی خطی از فنر و میراگر به عنوان مدل انتخابی در این مقاله به کار رفته است که دارای

می‌آورند. این روش‌ها بیشتر به دو دسته تقسیم می‌شوند: روش‌های مبتنی بر مش و روش‌های بدون مش. دسته اول رایج‌تر است و همانطور که از نام آن پیداست نیاز به توپولوژی گرهی در مش دارد و شامل روش‌هایی از قبیل روش اجزای مرزی<sup>۱</sup> و روش اجزای [13] و دسته دوم شامل روش‌هایی مانند روش پترو-گالرکین<sup>۳</sup> یا روش راه‌حل‌های بنیادین<sup>۴</sup> می‌باشد [14, 15].

BEM یک روش مبتنی بر مش است که به خاطر مزایایی مانند کاهش ابعاد مسئله به گونه‌ای که درصد خطا را در مرزها محدود می‌کند، محبوبیت یافته است [16]. این روش به‌ویژه در دامنه‌های نامتناهی و نیمه‌نامتناهی یا مسائل تمرکز تنش بسیار انعطاف‌پذیر است. به‌طور کلی در این روش، مرز خارجی هندسه مورد نظر گسسته می‌شود، در حالی که در FEM تمام ناحیه باید مش‌بندی شود. سپس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی<sup>۵</sup> در قالب معادلات انتگرال مرزی حل می‌شوند. بنابراین، در پیشینه تحقیقات علمی، از BEM به عنوان یک جایگزین هوشمند برای FEM یاد شده است [13, 17-19].

دو رویکرد مختلف برای حل مسائل ویسکوالاستیک با استفاده از روش اجزای مرزی وجود دارد؛ یک روش - که در سال ۱۹۸۲ توسط کاسوما با استفاده از تبدیل لاپلاس<sup>۶</sup> ارائه شده است [20] که با مشکلاتی در تبدیل عددی مواجه بود و دیگری در سال ۱۹۸۸ با استفاده از قضیه کار متقابل<sup>۷</sup> معرفی شد [21]. راه‌حل دوم از انسجام بیشتری برخوردار بود اما دقت کافی نداشت. با این حال، این رویکردها بنیان‌گذار کارهای بعدی بودند. برای نمونه، برخی از پژوهشگران هر دو روش را برای نوع خاصی از مواد ویسکوالاستیک به کار بردند [22]. بسیاری از پژوهشگران [23-28] از روش کار متقابل در زمینه‌های مختلف ویسکوالاستیک استفاده کردند و در سال ۲۰۱۷ گائول این روش را در دینامیک ویسکوالاستیک به کار برد. اما تعداد کمتری از دانشمندان [29-31] مانند ایگومونوف که به تازگی تحلیل ویسکوالاستیک آنیزوتروپیک را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بررسی کرده است، روش معرفی‌شده اول را استفاده نمودند [32].

با اعمال تغییرات ایزوپارامتریک و در نتیجه، افزایش درجات

<sup>8</sup> Degrees Of Freedom (DOF)

<sup>9</sup> Radial Basis Function (RBF)

<sup>10</sup> Spherical Hankel

<sup>11</sup> Complex Fourier

<sup>12</sup> Non-Oscillatory

<sup>13</sup> Thin Splines

<sup>14</sup> Multi-Quadratics

<sup>15</sup> Kelvin-Voigt

<sup>1</sup> Boundary Element Method (BEM)

<sup>2</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>3</sup> Petrov-Galerkin Method

<sup>4</sup> Fundamental Solutions Method

<sup>5</sup> Partial Differential Equations (PDE)

<sup>6</sup> Laplace Transform

<sup>7</sup> Reciprocal Work Theorem

می‌گیرند تا در روش اجزای مرزی ویسکوالاستیک پیاده‌سازی شده و فرمول‌بندی را به گونه‌ای بهبود بخشند که دقت بیشتر، پوشش فیزیکی بالاتر و همگرایی سریعتری داشته باشد.

### ۳- وفقی کردن توابع شکل

در این بخش، توسعه تابعی به‌عنوان ایده اصلی برای بهبود توابع فوریه مختلط به‌گونه‌ای استفاده می‌شود که بتوان آن‌ها را به‌عنوان توابع شکل برای یک المان مرزی به کار گرفت. در ابتدا،  $\bar{P}(r)$  به عنوان یک تابع پیوسته‌ی تکه‌ای ارائه می‌شود که با اصول سری فوریه مختلط مطابقت دارد:

$$\bar{P}(r) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s e^{i\omega_s r} \quad (5)$$

که در آن پارامترهای سری مختلط فوریه به صورت  $c_s$  و  $\omega_s$  ارائه می‌شوند. یک جمله از معادله بالا می‌تواند به عنوان تابع پایه شعاعی مختلط فوریه تعریف شود:

$$R(r) = a e^{i\omega r} \quad (6)$$

که در آن  $a$  و  $\omega$  پارامترهای شکل توابع مختلط فوریه هستند و  $i^2 = -1$ . بدین ترتیب، فرآیند غنی‌سازی توابع پایه شعاعی مختلط فوریه به‌عنوان توسعه تابعی<sup>۴</sup> RBFها و تعداد معینی از جملات پایه چندجمله‌ای آغاز می‌شود:

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \phi_h(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{nr} R_s(r) \alpha_s + \sum_{r=1}^{np} P_r(\mathbf{x}) \beta_r \quad (7)$$

که در آن تعداد جملات پایه چندجمله‌ای و گره‌ها به ترتیب با  $nr$  و  $np$  نشان داده می‌شوند و سپس، معادله برای  $\phi_h(\mathbf{x})$  بازنویسی می‌شود:

$$\phi_h(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

$$\mathbf{R} = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_{nr}]^T$$

$$\mathbf{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{np}]^T$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{nr}]^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{np}]^T$$

سپس این عبارت در نقاط گرهی ارضا می‌شود:

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\alpha} + \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\beta} \quad (9)$$

که در آن:

عملکرد رضایت‌بخشی به ویژه در مدل‌سازی خزش<sup>۱</sup> است. روش انتخابی برای فرایند BEM، تکنیک باقی‌مانده وزنی<sup>۲</sup> است که معادله دیفرانسیل تعادل را با استفاده از حل اساسی کلونین به عنوان تابع وزنی به صورت زیر تشکیل می‌دهد:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (1)$$

در این فرمول،  $\sigma_{ij}$  نشان‌دهنده تنش و  $b_i$  نیروی کالبدی است. سپس، با استفاده از قضیه دیورژانس، ناحیه انتگرال‌گیری از حوزه به مرز تغییر می‌یابد و انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء در غیاب نیروهای کالبدی منجر به عبارت زیر می‌شود (برای اطلاعات بیشتر به مرجع [24] مراجعه شود):

$$\sigma_{pq}(p) = \int_{\Gamma} \sigma_{piq}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}^* p_{iq} u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}^* p_{iq} u_i d\Gamma \quad (2)$$

که در آن  $p_i$  نشان‌دهنده تنش سطحی<sup>۳</sup> است و  $\bar{p}^*$  حل اساسی می‌باشد. هنگامی که ضرایب ویسکوالاستیک هیدرواستاتیک و انحرافی برابر با یکدیگر در نظر گرفته شوند،  $\gamma$  نشان‌دهنده این اقدام خواهد بود ( $\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma$ ).

مقادیر هر پارامتر مجهول به صورت یک ترکیب خطی از مقادیر گرهی پارامتر و توابع شکل درونیابی شده در نظر گرفته می‌شود و پس از برخی تبدیلات جبری، فرمول‌بندی جابه‌جایی به دست می‌آید:

$$TU(t) + \gamma TU'(t) = GP(t) \quad (3)$$

$G$  و  $T$  ماتریس‌های حل اساسی در روش BEM هستند که در پیوست ب به صورت کامل توضیح و بسط داده شده‌اند و با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه ارزیابی می‌شوند که پایه‌ی اصلی این روش را تشکیل می‌دهند [56].  $t$  نشان‌دهنده زمان است و در نهایت، به عنوان مشتق خطی زمانی جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شود. در نهایت، فرم کاربردی فرمول‌بندی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\bar{T}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s \quad (4)$$

$$\bar{T} = (1 + \frac{\gamma}{\Delta t})T$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t} TU_s$$

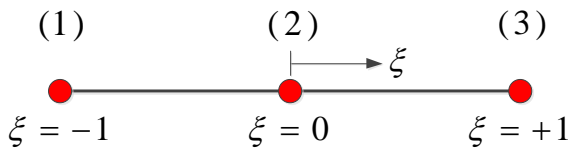
توابع شکل پیشنهادی در بخش بعدی مورد بحث قرار

<sup>1</sup> Creep

<sup>2</sup> Weighted Residual

<sup>3</sup> Traction

<sup>4</sup> Functional Expansion



شکل ۱. المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی

Fig. 1. Three-node element in the natural coordinate system

$$\bar{\mathbf{R}} = a \begin{bmatrix} 1 & e^{i\omega} & e^{2i\omega} \\ & 1 & e^{i\omega} \\ \text{Sym.} & & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

عبارات واسط به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$\mathbf{Z}_\alpha = \frac{1}{2a(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 4 & -2 \\ \text{sym.} & & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{Z}_\beta = \frac{1}{3-e^{i\omega}} \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{i\omega} & 1 \\ -0.5(3-e^{i\omega}) & 0 & 0.5(3-e^{i\omega}) \end{bmatrix}$$

و در نهایت تابع شکل یک المان مرزی مختلط فوریه با ۳ گره در سیستم مختصات طبیعی  $\xi$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{N}(\xi) = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi)] \quad (21)$$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(-\xi + c + k(\xi))$$

$$N_2(\xi) = (1-c) - k(\xi)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + c + k(\xi))$$

که در اینجا:  $c = \frac{2}{3-e^{i\omega}}$  و

$$k(\xi) = \frac{e^{i\omega|\xi+1|} - 2e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega|\xi-1|}}{(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})}$$
 می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، پارامتر  $a$  در فرآیند غنی‌سازی حذف می‌شود. این تابع ویژگی‌های توابع شکل مختلط فوریه را حفظ می‌کند، به طوری که پارامتر شکل مختلط  $\omega$  به دلیل بخش موهومی خود، میدان نمایی را پوشش می‌دهد و بخش حقیقی این پارامتر مختلط به میدان توابع مثلثاتی را شامل می‌شود و در نتیجه خاصیت تطبیق‌پذیری را به سایر مزایای ارزشمند این دسته از توابع شکل اضافه می‌کند. به طور کلی، ویژگی‌هایی که این توابع را به نامزدهای مناسبی برای این منظور تبدیل می‌کنند، به شرح زیر است:

• ویژگی دلتای کرونیگر: این ویژگی به ارضا شرایط مرزی

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \phi(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & P_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\mathbf{x}_m) & \cdots & P_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

به دلیل بیشتر بودن تعداد مجهولات از تعداد معادلات، عبارت زیر

پیشنهاد می‌شود تا یکتایی معادله (۹) تضمین شود [53, 57, 58]:

$$\sum_{s=1}^{nr} P_t(\mathbf{x}_s) \alpha_s = 0, \quad t = 1, 2, \dots, np \quad (11)$$

بنابراین، مجموعه نهایی معادلات به دست می‌آید که می‌توان به

صورت جبری مورد بررسی قرار گیرد:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \bar{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{P}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\phi}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

عبارات واسط  $(\mathbf{Z}_\beta$  و  $\mathbf{Z}_\alpha)$  برای در نظر گرفتن مقادیر

گره‌ی در محاسبات استفاده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Z}_\alpha \bar{\boldsymbol{\phi}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{Z}_\beta \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (13)$$

$$\mathbf{Z}_\beta = [\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}]^{-1} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{Z}_\alpha = \bar{\mathbf{R}}^{-1} - \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{Z}_\beta$$

پس از جایگزینی  $\mathbf{Z}_\alpha$  و  $\mathbf{Z}_\beta$ ، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\phi_n(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(r) \mathbf{Z}_\alpha + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Z}_\beta] \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (15)$$

که در آن  $[\mathbf{R}^T(r) \mathbf{Z}_\alpha + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Z}_\beta]$ ، که همچنین به عنوان

$\mathbf{N}(\mathbf{x})$  نیز شناخته می‌شود، عبارتی است که مقادیر گره‌ی را به

میدان تابع مرتبط می‌سازد و این دقیقاً تعریف یک تابع شکل

درون‌یاب است. این فرمول اکنون شفاف‌سازی شده تا در یک المان

مرزی سه گره‌ی در مختصات طبیعی پیاده‌سازی شود (شکل ۱).

$$\mathbf{R}(r) = \begin{bmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \\ R_3(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a e^{i\omega|\xi+1|} \\ a e^{i\omega|\xi|} \\ a e^{i\omega|\xi-1|} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{P}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix} \quad (17)$$

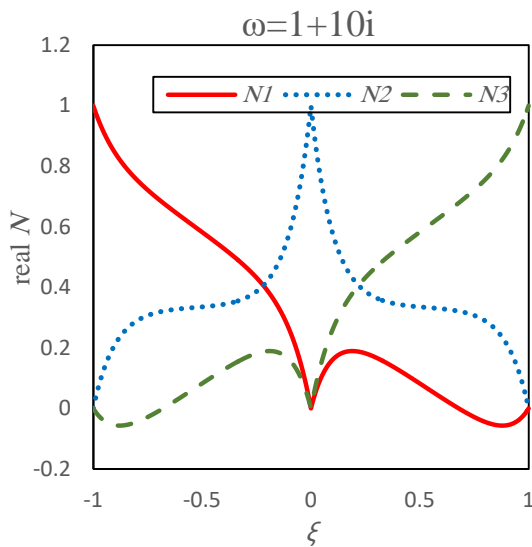
در این مرحله پروسه غنی‌سازی انجام می‌شود:

محاسبه مشتقات  $k(\xi)$  به دست می آید.

فرمول‌بندی‌های این ویژگی‌ها در جدول (۱) نشان داده شده است و شکل (۲) نمونه‌هایی از توابع شکل پیشنهادی برای المان ۳-گره‌ای نشان می‌دهد. شکل‌های ۲.الف و ۲.ب) تأثیر افزایش بخش موهومی  $\omega$  را نشان می‌دهند که رفتار تابع پیشنهادی را به سمت توابع نمایی تغییر می‌دهد، در حالی که شکل ۲.ج) و ۲.د) مقادیر بالاتری در بخش حقیقی نشان می‌دهند که در نتیجه آن، ویژگی‌های نوسانی به دلیل مشارکت بیشتر میدان توابع مثلثاتی آشکارتر می‌شود.

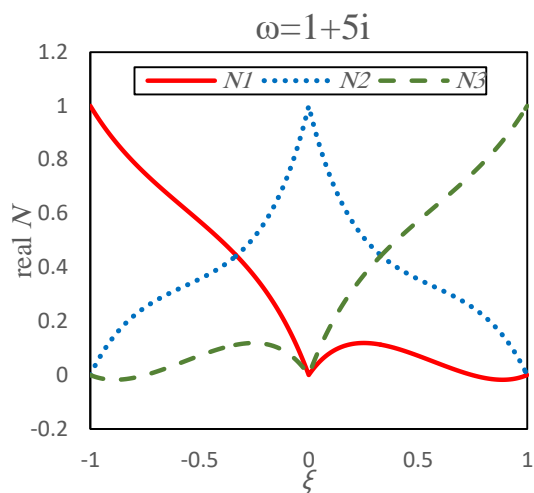
منجر می‌شود و بدین معناست که وقتی یک گره مقدار یک دارد، مقادیر سایر گره‌ها صفر است.

- افزایش واحد: در روش‌های مبتنی بر مش، این ویژگی به همگرایی سریع‌تری منجر می‌شود.
- استقلال خطی: که می‌توان آن را از خاصیت دلتای کرونگر نتیجه گرفت (جدول ۱).
- پیوستگی تکه‌ای بی‌نهایت: با استخراج مشتقات مرتبه اول، دوم و مراتب بالاتر از توابع شکل، یک الگوی تکراری برای



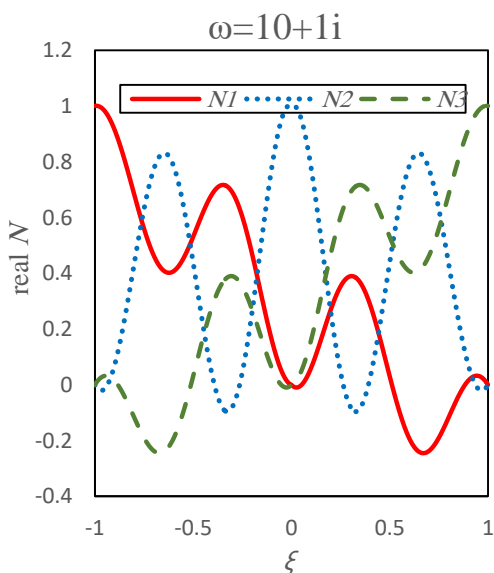
(ب)

(b)



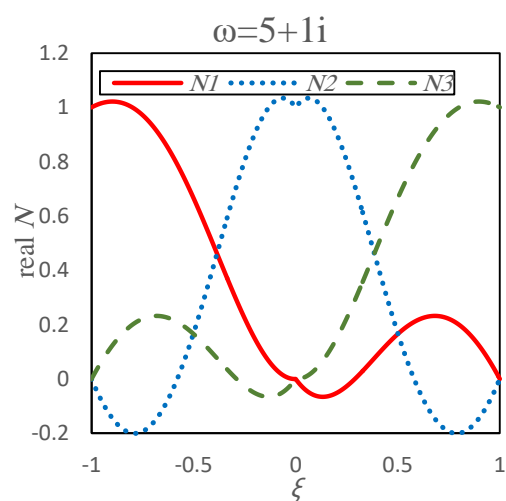
(الف)

(a)



(د)

(d)



(ج)

(c)

شکل ۲. توابع شکل فوریه مختلط برای یک المان سه گره‌ای در مختصات طبیعی. (الف و ب) تأثیر افزایش بخش موهومی، (ج و د) تأثیر افزایش بخش حقیقی

Fig. 2. The complex Fourier shape functions for a 3-node element in natural coordinates.

(a) and (b) Effect of increasing the imaginary part, (c) and (d) Effect of increasing the real part

$$\nu = 0.3 \quad (22)$$

$$\gamma = 4$$

$$E_{\text{elastic}} = 0.1 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{viscous}} = 0.4 \text{ MPa}$$

$$E_0 = E_{\text{el}} + E_{\text{v}}$$

نیروی خزش<sup>۱</sup> در دو مرحله محاسبه می‌شود: در زمان

بارگذاری (معادله (۲۳)) و پس از باربرداری (معادله (۲۴)):

$$D(t) = D_0(1 - \exp(-\frac{t}{\gamma})) \quad (23)$$

$$D(t - t_1) = D_0(1 - \exp(-\frac{(t - t_1)}{\gamma})) \quad (24)$$

که در آن:

$$D_0 = \frac{1}{E_0} \quad (25)$$

حل تحلیلی در هر نمونه از طریق ضرب جابه‌جایی الاستیک

محاسبه شده از دانش مقاومت مصالح و تطابق خزش تعیین

می‌شود. گام زمانی برای تحلیل عددی به عنوان  $\frac{1}{80}$  از زمان کل

تحلیل در نظر گرفته می‌شود و تنظیمات مش برای هر دو روش

BEM کلاسیک و مختلط فوریه به‌عنوان یک المان سه‌گره‌ای در هر

طرف هندسه مسئله در نظر گرفته می‌شود. نمودارهای مقایسه‌ای

برای ارزیابی نمونه‌ها به‌کار می‌روند تا توافق نزدیک BEM

فوریه‌ای و حل تحلیلی را با استفاده از کمترین درجه آزادی نشان

دهند و هر مقایسه شامل سه نمودار تاریخچه زمانی جابه‌جایی

است:

• حل تحلیلی

• BEM کلاسیک

• BEM مختلط فوریه

در اولین نمونه، یک تیر با طول ۱۵ و عرض ۵ شکل (۳ الف)

با تکیه‌گاه ساده و تحت بار نوسانی در طول مدت ۴۰ ثانیه قرار

می‌گیرد شکل (۳ ب). این تیر با استفاده از BEM با یک المان در

هر طرف هندسه تحلیل شده است شکل (۳ ج) و همین روش

برای تمامی نمونه‌های عددی به‌کار گرفته شد.

جدول ۱. فرمولاسیون خصوصیات توابع مختلط فوریه

Table 1. Formulations of complex Fourier function properties

Formulation	Properties
$N_m(\xi_n) = \begin{cases} 1+0i & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$	Kronecker Delta
$\sum_{j=1}^3 N_j(\xi) = 1+0i$	Partition of Unity
$\sum_{j=1}^3 c_j N_j(\xi; \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ $\rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$	Linear Independence
$0 = \sum_{n=1}^3 c_n N_n(\xi_k) = \sum_{n=1}^3 c_n \delta_{nk}$ $\rightarrow c_n = 0, n = 1, 2, 3$	
$\frac{d^m N_1(\xi)}{d\xi^m} = \frac{1}{2} \left( l + \frac{d^m k(\xi)}{d\xi^m} \right),$ $l = -1 \text{ if } m = 1,$ $l = 0 \text{ if } m = 2, 3, \dots$	
$\frac{d^m N_2(\xi)}{d\xi^m} = -\frac{d^m k(\xi)}{d\xi^m},$ $m = 1, 2, \dots$	
$\frac{d^m N_3(\xi)}{d\xi^m} = \frac{1}{2} \left( l + \frac{d^m k(\xi)}{d\xi^m} \right),$ $l = +1 \text{ if } m = 1,$ $l = 0 \text{ if } m = 2, 3, \dots$	Infinite Piecewise Continuity
$\frac{d^m k(\xi)}{d\xi^m} = -\omega^2 \frac{d^{m-2} k(\xi)}{d\xi^{m-2}}$	
(برای جزئیات بیشتر به پیوست الف مراجعه شود.)	

#### ۴- مسائل مرجع

در این قسمت مجموعه‌ای از نمونه‌های عددی ارائه می‌شود تا

درستی و برتری توابع شکل المان مختلط فوریه را نشان دهد.

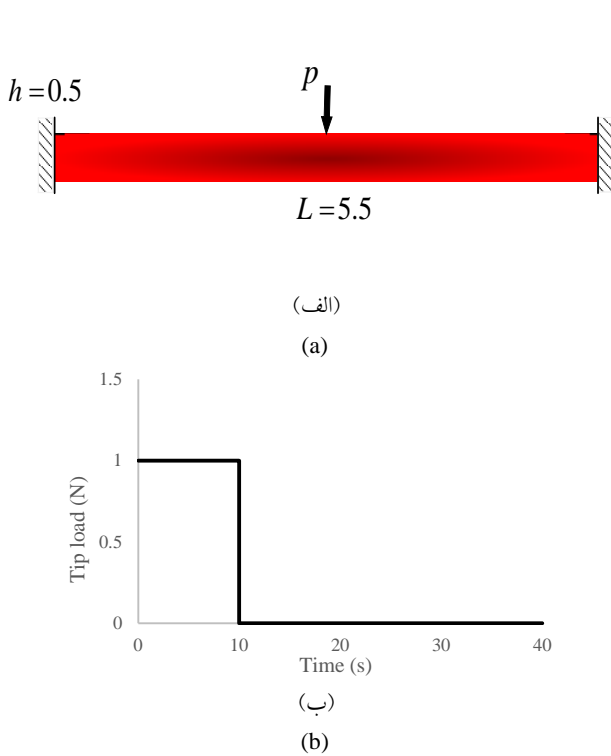
همان‌طور که قبلاً بحث شد مدل کلون-وویت به دلیل مزایای بارز

در مدلسازی خزش برای شبیه‌سازی ویسکوالاستیک انتخاب شده

است. ویژگی‌های مواد برای تمامی نمونه‌ها یکسان بوده و به شرح

زیرمی‌باشد:

<sup>1</sup> Creep Compliance



شکل ۴. (الف) هندسه تیر دو سر گیردار، (ب) تاریخچه بارگذاری مثال دوم

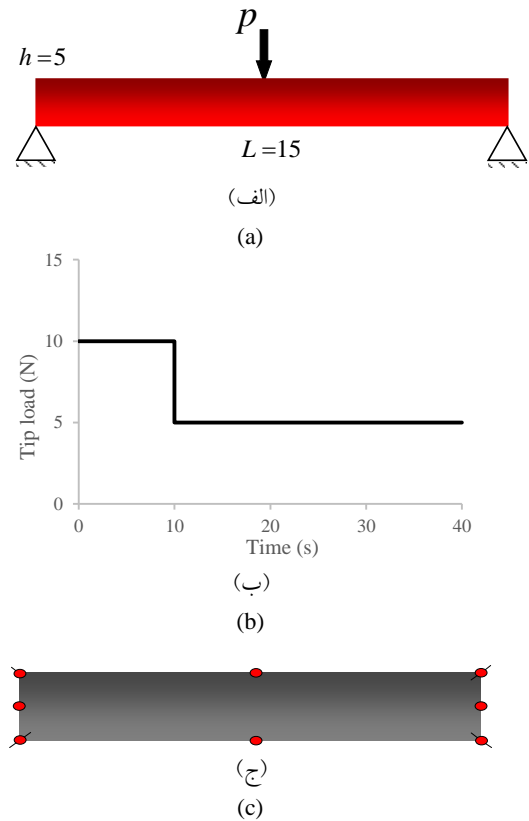
Fig. 4. (a) Geometry of the fixed ended beam, (b) 2<sup>nd</sup> example's history of loading

#### ۵- نتایج نمونه‌های عددی

نتایج به صورت نمودارهای مقایسه‌ای برای ارزیابی BEM فوریه و BEM کلاسیک و مقایسه آن‌ها با حل تحلیلی نشان داده می‌شود شکل‌های (۶ تا ۸). همان‌طور که از دیاگرام‌ها مشهود است، زمانی که تعداد المان‌های مشابه در هر دو روش پیاده‌سازی شود، توافق نزدیکی بین BEM فوریه و نتایج تحلیلی حاصل می‌شود و این در حالی است که اگرچه هر سه نمودار نمایش داده شده از یک نقطه شروع می‌شوند، اما BEM کلاسیک در طول دوره زمانی از حل تحلیلی فاصله قابل ملاحظه‌ای می‌گیرد. استفاده از توابع شکل فوریه خطا را به گونه‌ای کاهش می‌دهد که تقریباً با پاسخ‌های تحلیلی هم‌راستا می‌شود.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش معرفی شده برای تحلیل عددی مواد ویسکوالاستیک تحت بارگذاری و هندسه‌های مختلف به کار گرفته شد تا دقت را بهبود بخشیده و فرایند تحلیل را اقتصادی‌تر کند. ابتدا، یک فرمول‌بندی برای روش اجزای مرزی در نظر گرفته شد



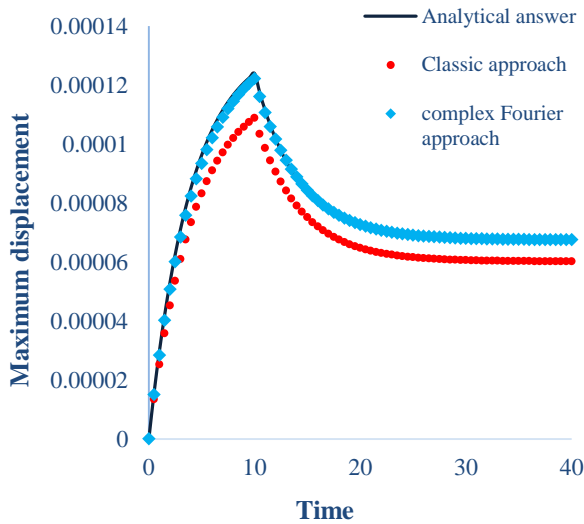
شکل ۳. (الف) هندسه تیر با تکیه گاه ساده، (ب) تاریخچه بارگذاری نمونه اول،

(ج) مش‌بندی نمونه اول

Fig. 3. (a) Geometry of the simply supported beam, (b) 1<sup>st</sup> example's history of loading, (c) 1<sup>st</sup> example's meshing

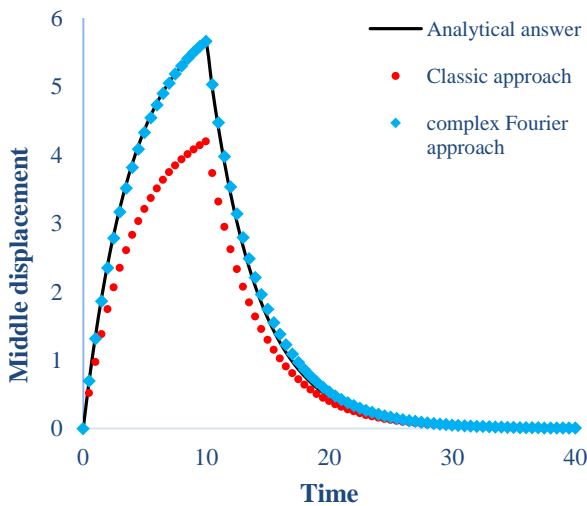
نمونه دوم شامل یک تیر با انتهای گیردار است که ویژگی‌های هندسی آن شامل طول ۵/۵ و ارتفاع ۰/۵ شکل (۴ الف) می‌باشد که تحت بار موقتی در وسط هندسه شکل قرار دارد شکل (۴ ب). تاریخچه زمانی بارگذاری و هندسه مسئله نشان داده شده و مش‌بندی مشابه نمونه قبلی انجام شده است.

در هر دو نمونه، جابه‌جایی حداکثر با استفاده از سه روش مختلف ذکر شده محاسبه می‌شود و در نهایت در نمونه نهایی، جابه‌جایی شعاعی یک موتور راکت با شعاع داخلی ۲ و شعاع خارجی ۴ شکل (۵ الف) زمانی که تحت فشار ثابت ۱۰۰ پاسکال قرار دارد شکل (۵ ب) تخمین زده می‌شود. به دلیل تقارن کامل راکت، تنها یک چهارم از هندسه نیاز به مش‌بندی دارد شکل (۵ ج).



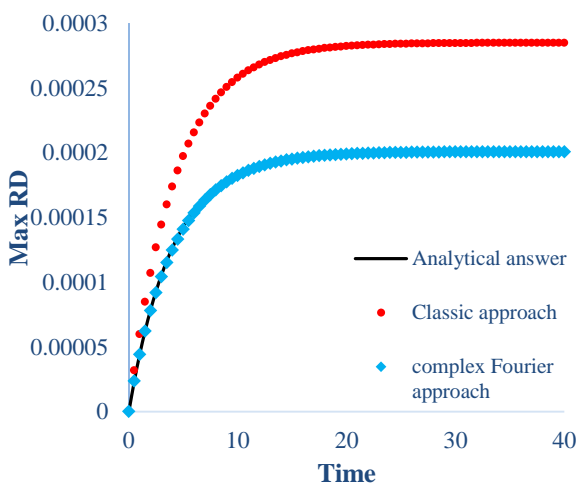
شکل ۶. نمودارهای ارزیابی نمونه اول

Fig. 6. The first example evaluation graphs.



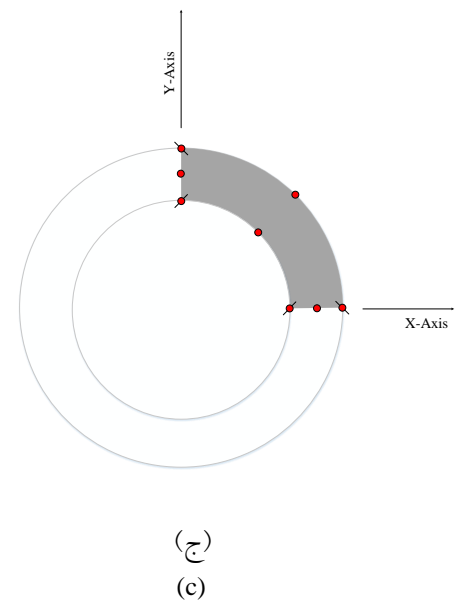
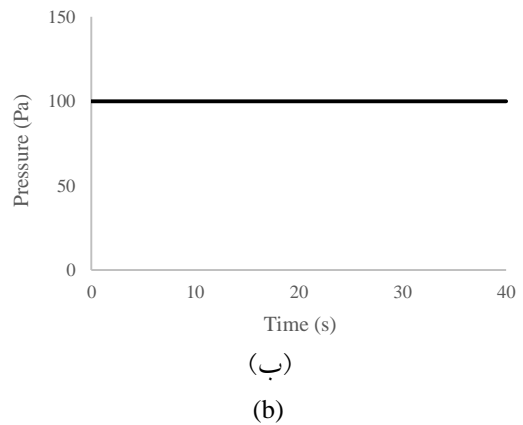
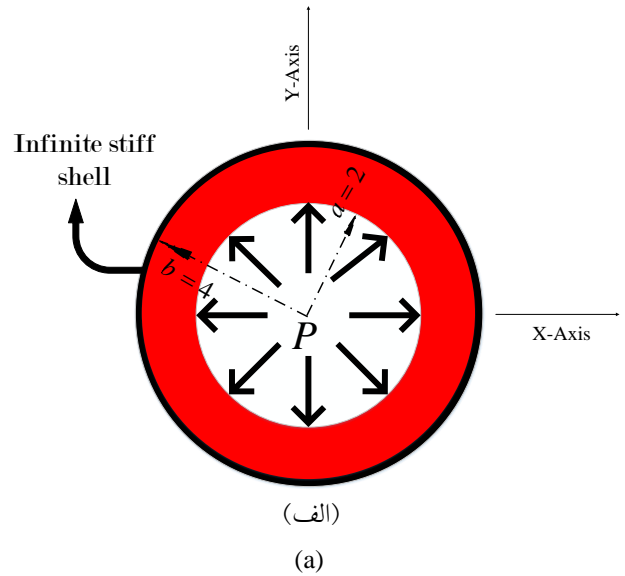
شکل ۷. نمودارهای ارزیابی نمونه دوم

Fig. 7. The second example evaluation graphs.



شکل ۸. نمودارهای ارزیابی نمونه سوم

Fig. 8. The third example evaluation graphs.



شکل ۵. (الف) هندسه موتور راکت، (ب) تاریخچه بارگذاری مثال آخر، (ج) مش بندی مثال سوم

Fig. 5. (a) Geometry of the rocket's motor, (b) last example's history of loading, (c) 3<sup>rd</sup> example's meshing

### قدردانی نویسندگان

از حمایت دانشگاه شهید باهنر کرمان قدردانی می‌شود.

### تعارض منافع

نویسندگان مقاله اعلام می‌کنند که هیچ گونه تعارض منافع در چاپ مقاله حاضر وجود ندارد.

### سهم نویسندگان

مهدیه بهرامپور ۴۰ درصد، صالح حمزه جواران ۳۰ درصد و سعید شجاعی ۳۰ درصد.

### منابع مالی

در انجام مقاله حاضر از منابع مالی استفاده نشده است.

### References

- [1] Haddad, Y.M., 1995. Viscoelasticity of engineering materials.
- [2] Gutierrez-Lemini, D., 2014. Engineering viscoelasticity. *Springer*, 910.
- [3] Owens, R.G. and Phillips, T.N., 2002. Computational rheology. *World Scientific*.
- [4] Courtois, A. and et al., 2019. Numerical multiscale homogenization approach for linearly viscoelastic 3D interlock woven composites. *International Journal of Solids and Structures*, 163, pp.61-74.
- [5] Haj-Ali, R.M. and Muliana, A.H., 2004. A multi-scale constitutive formulation for the nonlinear viscoelastic analysis of laminated composite materials and structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(13), pp.3461-3490.
- [6] Koutsawa, Y. 2007. Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26), pp.8735-8750.
- [7] Mesquita, A.D., Coda, H.B. and Venturini, W.S., 2001. Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(10), pp.1157-1173.
- [8] Pallicity, T.D. and Böhlke, T., 2011. Effective viscoelastic behavior of polymer composites with regular periodic microstructures. *International Journal of Solids and Structures*, 216, pp.167-181.
- [9] Saito, R. and et al., 2020. Decoupled two-scale viscoelastic analysis of FRP in consideration of dependence of resin properties on degree of cure. *International Journal of Solids and Structures*, 190, pp.199-215.
- [10] Tong, X. and et al., 2020. A nonlinear viscoelastic constitutive model for cyclically loaded solid composite propellant. *International Journal of Solids and Structures*, 198, pp.126-135.
- [11] Rezaei Balouchi, M. and Saleh Jalali, R., 2015. Pounding response of adjacent buildings with non-equal height under near-fault strong ground motion. *Modares Civil Engineering journal*, 15(1), pp.35-46.
- [12] Taherkhani, H. and Jalali Jirandehi, M., 2017. Investigation of Top-Down Cracking in Asphalt Pavements Using FEM. *Modares Civil Engineering journal*, 17(1), pp.127-135.
- [13] Manolis, G.D. and Beskos, D.E., 1988. Boundary element methods in elastodynamics.
- [14] Ma, Q., 2005. Meshless local Petrov–Galerkin method for two-dimensional nonlinear water wave problems. *Journal of Computational Physics*, 205(2), pp.611-625.
- [15] Naffa, M. and Al-Gahtani, H.J., 2007. RBF-based meshless method for large deflection of thin plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 31(4): pp.311-317.
- [16] Sládek, V. and Sladek, J., 1998. Singular integrals in boundary element methods.
- [17] Becker, A., *The Boundary Element Method in Engineering, a Complete Course*. 1992, McGraw-Hill.
- [18] Beer, G., Smith, I., and Duenser, C., 2008. The boundary element method with programming: for engineers and scientists. *Springer Science & Business Media*.
- [19] yazdani, M., 2017. Sensitive Analysis of Nodal Force Function in the Elastostatic Problems in Decoupled Equations Method. *Modares Civil Engineering journal*, 17(3), pp.247-257.
- [20] Kusama, T. and Mitsui, Y., 1982. Boundary element method applied to linear viscoelastic analysis. *Applied*

- Mathematical Modelling*, 6(4), pp.285-290.
- [21] Sim, W.J. and Kwak, B.M., 1988. Linear viscoelastic analysis in time domain by boundary element method. *Computers & structures*, 29(4), pp.531-539.
- [22] Syngellakis, S., 2003. Boundary element methods for polymer analysis. *Engineering analysis with boundary elements*. 27(2), pp.125-135.
- [23] Anacleto, F.E.S., de Oliveira Ribeiro, G., and Ribeiro, T.S.A., 2009. Application of the boundary element method to viscoelastic and viscoplastic analysis. in *Proc., 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics*. Rio de Janeiro, RJ, Brazil: Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.
- [24] Fareed, M. and Ashrafi, H., 2010. A general boundary element formulation for the analysis of viscoelastic problems. *International Journal of Engineering*, 23(2), pp.153-168.
- [25] Lee, S., 1995. Boundary element analysis of linear viscoelastic problems using realistic relaxation functions. *Computers & structures*. 55(6), pp.1027-1036.
- [26] Mesquita, A.D. and Coda, H.B., 2003. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, 27(9), pp.885-895.
- [27] Sensale, B., Partridge, P., and Creus, G., 1970. The dual reciprocity boundary element method in viscoelasticity. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 14.
- [28] Sensale, B., Partridge, P., and Creus, G., 2001. General boundary elements solution for ageing viscoelastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6), pp.1455-1468.
- [29] Chen, Y. and Hwu, C., 2011. Boundary element analysis for viscoelastic solids containing interfaces/holes/cracks/inclusions. *Engineering analysis with boundary elements*, 35(8), pp.1010-1018.
- [30] Lee, S.S., Sohn, Y.S., and Park, S.H., 1994. On fundamental solutions in time-domain boundary element analysis of linear viscoelasticity. *Engineering analysis with boundary elements*, 13(3), pp.211-217.
- [31] Zhu, X. and et al., 2011. A fast multipole boundary element method for 2D viscoelastic problems. *Engineering analysis with boundary elements*, 35(2), pp.170-178.
- [32] Igumnov, L. and Markov, I., 2016. Boundary-element modeling of three-dimensional anisotropic viscoelastic solids. in *Advanced materials: Manufacturing, physics, mechanics and applications*. Springer.
- [33] Bahrampour, M., Hamzeh Javaran, S., and Shojaee, S., 2018. New insight into viscoelastic finite element modeling of time-dependent material creep problems using spherical Hankel element framework. *International Journal of Applied Mechanics*, 10(08), pp.1850085.
- [34] Javaran, S.H., Khaji, N., and Noorzad, A., 2011. First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. *Acta mechanica*, 218(3), pp.247-258.
- [35] Hamzehei-Javaran, S., 2018. Approximation of the state variables of Navier's differential equation in transient dynamic problems using finite element method based on complex Fourier shape functions. *Asian Journal of Civil Engineering*, 19(4), pp.431-450.
- [36] Hamzehei-Javaran, S. and Khaji, N., 2018. Complex Fourier element shape functions for analysis of 2D static and transient dynamic problems using dual reciprocity boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 95, pp.222-237.
- [37] Izadpanah, E., Shojaee, S., and Hamzehei-Javaran, S., 2018. A time-dependent discontinuous Galerkin finite element approach in two-dimensional elastodynamic problems based on spherical Hankel element framework. *Acta Mechanica*, 229, pp.4977-4994.
- [38] Hamzehei-Javaran, S. and Khaji, N., 2014. Dynamic analysis of plane elasticity with new complex Fourier radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, 38(14), pp.3641-3651.
- [39] Khaji, N. and Hamzehei-Javaran, S., 2013. New complex Fourier shape functions for the analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(2), pp.260-272.
- [40] Mohammadi Nia, M., Shojaee, S., and Hamzehei-Javaran, S., 2020. Utilizing new spherical Hankel shape functions to reformulate the deflection, free vibration, and buckling analysis of Mindlin plates based on finite element method. *Scientia Iranica*, 27(5), pp.2209-2229.
- [41] Mordouei, F., Shojaee, S., and Hamzehei-Javaran, S., 2019. Development of Novel Spherical Hankel Shape and Radial Basis Functions in Structural Topology Optimization by Level Set Method. *Modares Civil Engineering journal*, 19(2), pp.183-196.
- [42] Mai-Duy, N. and Tran-Cong, T., 2001. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis function networks. *Neural networks*, 14(2), pp.185-199.
- [43] Shu, C., Ding, H., and Yeo, K., 2003. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(7-8), pp.941-954.

- [44] Aziz, I. and Khan, W., 2012. Numerical integration of multi-dimensional highly oscillatory, gentle oscillatory and non-oscillatory integrands based on wavelets and radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(8), pp.1284-1295.
- [45] Bahrapour, M., Hamzehei-Javaran, S., and Shojaee, S., 2020. Spherical Hankel-Based Creep Analysis of Time-Dependent Materials Using Boundary-Element Theories. *Journal of Engineering Mechanics*, 146(6), p. 04020050.
- [46] Farmani, S., Ghaeini-Hessaroeeyeh, M., and Hamzehei-Javaran, S., 2019. Increasing the solution accuracy in the numerical modeling of boundary value problems using finite element method based on Hankel shape functions. *International Journal of Applied Mechanics*, 11(07), p.1950062.
- [47] Farmani, S., Ghaeini-Hessaroeeyeh, M., and Hamzehei-Javaran, S., 2019. Developing new numerical modeling for sloshing behavior in two-dimensional tanks based on nonlinear finite-element method. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(12): p.04019107.
- [48] Farmani, S., Ghaeini-Hessaroeeyeh, M., and Javaran, S.H., 2018. The improvement of numerical modeling in the solution of incompressible viscous flow problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 87(2), pp.70-89.
- [49] Fornberg, B., Larsson, E., and Wright, G., 2006. A new class of oscillatory radial basis functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8), p.1209-1222.
- [50] Hamzehei Javaran, S. and Shojaee, S., 2017. The solution of elastostatic and dynamic problems using the boundary element method based on spherical Hankel element framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(13), pp.2067-2086.
- [51] Hamzehei-Javaran, S. and Shojaee, S., 2018. Improvement of numerical modeling in the solution of static and transient dynamic problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(10), pp.1241-1265.
- [52] Izadpanah, E., Shojaee, S., and Hamzehei-Javaran, S., 2018. Time-discontinuous finite element analysis of two-dimensional elastodynamic problems using complex Fourier shape functions. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(Special Issue: Applied and Computational Issues in Structural Engineering), p.442-456.
- [53] Hamzehei-Javaran, S., Khaji, N., and Moharrami, H., 2011. A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1), pp.85-95.
- [54] Malekzadeh, M., Hamzehei-Javaran, S., and Shojaee, S., 2019. Novel insight into high-order numerical manifold method using complex Fourier element shape functions in statics and dynamics. *International Journal of Applied Mechanics*, 11(06), pp.1950058.
- [55] Power, H. and Barraco, V., 2002. A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5), pp.551-583.
- [56] Ali, A. and Rajakumar, C., 2004. The boundary element method: Applications in sound and vibration. *Crc Press*.
- [57] Samaan, M.F. and Rashed, Y.F., 2007. BEM for transient 2D elastodynamics using multiquadric functions. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26), pp.8517-8531.
- [58] Wang, J. and Liu, G., 2002. On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(23-24), pp.2611-2630.

### پیوست الف - مشتقات متوالی توابع شکل پیشنهادی

برای یک المان مختلط فوریه سه گرهی برآورد مشتقات متوالی از عبارات ذیل توسط یک عملیات جبری به دست می‌آیند:

$$\phi_1'(\xi) = \frac{1}{2}(-1 + k'(\xi)) \quad (26)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

$$\phi_1^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2}k^{(n)}(\xi)$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$\phi_2^{(n)}(\xi) = -k^{(n)}(\xi)$$

$$\phi_3'(\xi) = \frac{1}{2}(1 + k'(\xi)) \quad (28)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

$$\phi_3^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2}k^{(n)}(\xi)$$

جالب آن که به دلیل خواص توابع نمایی حقیقی مختلط، می‌توان یک رابطه بازگشتی میان مشتقات  $k(\xi)$  برقرار کرد که در زیر آمده است:

$$k^{(n)}(\xi) = -\omega^2 k^{(n-2)}(\xi) \quad (29)$$

به طور مثال، تا چهارمین مشتق  $k(\xi)$  در زیر ارائه شده است:

به ذکر می‌باشد که  $c_{ij}$  ضریب هندسی است که مقدار آن برای گره

روی مرز برابر با  $\frac{1}{2} \delta_{ij}$  می‌باشد.

### ب-۲- گسسته‌سازی مرز و تشکیل ماتریس‌های BEM

مرز دامنه به المان‌های مرزی تقسیم شده و انتگرال‌گیری روی هر جزء انجام شده است. برای هر گره میدان و هر المان مرزی، مقادیر  $T_{ij}$  و  $U_{ij}$  محاسبه و انتگرال‌گیری عددی (گوس کوادراچر) انجام می‌شود. خروجی این مرحله، به صورت رابطه زیر قابل بیان است.

$$\{t\}.[G] = \{u\}.[H] \quad (32)$$

که در این رابطه ماتریس‌های اساسی  $H_{ij} = \int_{\Gamma_j} T_{ij}(x_i, y) d\Gamma(y)$  همان ماتریس جابجایی پایه است که از انتگرال‌گیری عددی عناصر حاصل از حل اساسی جابجایی تشکیل می‌شود. این ماتریس نشان‌دهنده تأثیر تنش سطحی روی مرز بر جابجایی در نقطه میدان است بعلاوه،  $G_{ij} = \int_{\Gamma_j} U_{ij}(x_i, y) d\Gamma(y)$  ماتریس تنش سطحی می‌باشد که از انتگرال‌گیری حل اساسی تنش سطحی در مرز به دست می‌آید. این ماتریس نمایانگر تأثیر جابجایی روی مرز در تولید تنش سطحی در نقطه میدان می‌باشد.

(۳۰)

$$\begin{aligned} (e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3)k'(\xi) &= i\omega[e^{i\omega(1+\xi)} - 2(H(\xi) - H(-\xi))e^{i\omega|\xi|} - e^{i\omega(1-\xi)}], \\ (e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3)k''(\xi) &= -\omega^2[e^{i\omega(1+\xi)} - 2(H(\xi) + H(-\xi))e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega(1-\xi)}], \\ (e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3)k'''(\xi) &= -i\omega^3[e^{i\omega(1+\xi)} - 2(H(\xi) - H(-\xi))e^{i\omega|\xi|} - e^{i\omega(1-\xi)}], \\ (e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3)k^{(4)}(\xi) &= \omega^4[e^{i\omega(1+\xi)} - 2(H(\xi) + H(-\xi))e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega(1-\xi)}], \end{aligned}$$

که در آن  $H(\xi)$  بیانگر تابع هوی ساید می‌باشد.

### پیوست ب- ساختار جواب‌های اساسی در روش اجزای مرزی

روش اجزای مرزی بر پایه‌ی معادلات انتگرال مرزی بنا شده که در آن از جواب‌های اساسی معادلات الاستیسیته به عنوان هسته‌های انتگرال استفاده می‌شود. این توابع پایه، پاسخ تحلیلی محیط پیوسته بی‌نهایت به بارگذاری متمرکز هستند.

### ب-۱- معادله انتگرال مرزی الاستیسیته خطی

معادله‌ی انتگرال مرزی برای یک محیط دوبعدی الاستیک خطی ایزوتروپ به صورت زیر است:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(x, y) t_j(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} T_{ij}(x, y) u_j(y) d\Gamma(y) + c_{ij}(x) u_j(x) \quad (31)$$

که در آن  $x$  نقطه میدان،  $y$  نقطه منبع (محل اعمال بار متمرکز) و  $u_j$  مؤلفه‌ی جابه‌جایی می‌باشد. همچنین،  $t_j$  نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌ی تنش سطحی،  $(t_j = n_{jk} \sigma_k)$ ، جواب اساسی جابه‌جایی و  $U_{ij}$  جواب اساسی تنش سطحی است. لازم

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم؟

Bahrampour, M. and Hamzehei-Javaran, S., 2026. Solving Viscoelastic Problems Using Complex Fourier Boundary Element Method. *Modares Civil Engineering journal*, 26(2), pp.65-77.

