

Dynamic analysis of a heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid and with depth-varying permeability under vertical loading

Nima Saraee¹, Kiyumars Sahebkar^{2*} 

1. M. Sc. Graduate Student of Civil Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
2. Assistant Prof., Faculty of Civil and Environmental Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Abstract

The behavior of a saturated porous media depends on the interaction of its various components, primarily the solid and liquid phases. This interaction is effectively described by Poroelastic theory, which integrates the mechanics of solid deformation with fluid flow within the porous structure. In the current study, the governing equations are derived from a simplified version of Biot's theory, as introduced by Zienkiewicz. This formulation employs two primary variables: the displacement of the solid phase and the pore fluid pressure. The medium under investigation is modeled as a heterogeneous porous half-space saturated with an inviscid fluid, with its permeability varying exponentially with depth. Such a configuration is subjected to axisymmetric loading conditions, making it a suitable case for analyzing the dynamic responses of porous media with spatially varying material properties. The heterogeneity of the medium with depth leads to the addition of new terms to the governing equations. These equations are derived for a heterogeneous isotropic medium with depth-dependent permeability in cylindrical coordinates, under axisymmetric conditions. The obtained mathematical equations involve coupled differential equations that are not easily solvable. In this study, a scalar potential function is introduced to solve these equations, and by applying it to the complex and coupled governing equations, a decoupled partial differential equation is obtained. Solving this equation allows for the determination of the unknowns in the problem. This partial differential equation can be solved in the frequency domain using the Hankel transform under axisymmetric conditions. The transformed equations in the Hankel-frequency domain, after being solved using the potential function, are returned to the real domain through the inverse Hankel transform. In this way, the harmonic response of the system can be computed. Due to the necessity of using the inverse Hankel transform, the responses are presented as complex, semi-infinite integrals, which require numerical methods for evaluation due to the presence of poles and branch points along the integration path. These integrals have been computed using the Method of Residues. Three distinct permeability variation indices are utilized to quantify the heterogeneity of the medium. These indices provide insights into how changes in permeability influence the mechanical and hydraulic responses of the porous medium. The results show that as permeability decreases with depth, the range of displacements in the medium becomes limited. At the excitation frequency of $\omega_0 = 0.5$, the damping of responses relative to a homogeneous medium increases with distance from the loading location. At $\omega_0 = 2$, the vertical displacement of both homogeneous and heterogeneous media converges approximately for $z/a \geq 4$. Additionally, the results indicate that the location of the maximum pore fluid pressure shifts closer to the half-space surface in a heterogeneous medium compared to a homogeneous one. For instance, in a homogeneous medium, the maximum pore fluid pressure occurs at a depth of $z/a = 1.7$, while in a medium with a permeability parameter of $\delta_k = -0.5$, it occurs at $z/a = 0.8$. This shift indicates that heterogeneity influences the depth distribution of fluid pressure, potentially affecting the medium's overall stability and fluid flow patterns. The implications of these findings extend to various engineering and geophysical applications, including reservoir engineering, groundwater hydrology, and the design of foundations in porous media. Understanding how permeability variations affect the mechanical and hydraulic behavior of saturated porous media is crucial for predicting and mitigating risks associated with dynamic loading conditions. This study contributes to the broader understanding of poroelastic phenomena in heterogeneous systems and provides a foundation for future investigations into more complex geometries and material behaviors.

Review History

Received: Dec 28, 2024

Revised: Jan 22, 2025

Accepted: Jul 19, 2025

Keywords

Saturated Porous Media
Isotropic Heterogeneous
Poroelastodynamics
Potential Function
Biot's Equations

* Corresponding Author Email: k.sahebkar@modares.ac.ir - ORCID: 0009-0008-2996-7801



تحلیل دینامیکی محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج با نفوذپذیری متغیر در عمق تحت بارگذاری قائم یکنواخت

نیما سارائی^۱ و کیومرث صاحبکار^{۲*} 

۱. دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس.

۲. استادیار، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس.

چکیده

تاریخچه داوری

رفتار محیط متخلخل اشباع تابعی از اندرکنش بخش‌های مختلف این محیط‌ها (فاز جامد و مایع) است که نظریه‌ی پوروالاستیک بر آن حاکم می‌باشد. معادلات حاکم استفاده شده در این پژوهش، حالت ساده‌سازی شده تئوری بیو بوده که توسط زینکوویچ ارائه شده‌است و متغیرهای آن تغییرمکان بخش جامد و فشار منفذی سیال می‌باشد. محیط مسئله به صورت نیم‌فضای متخلخل ناهمگن فرض شده‌است. این محیط، با سیال منفذی غیرلزج اشباع شده و تحت بارگذاری متقارن محوری قرار دارد که نفوذپذیری آن در عمق به صورت نمایی تغییر می‌کند. با توجه به تغییرات پیوسته‌ی نفوذپذیری در عمق، معادلاتی برای محیط ناهمگن همسانگرد با نفوذپذیری متغیر در عمق در مختصات استوانه‌ای و در حالت متقارن محوری به دست آمده‌است. معادلات دیفرانسیلی درگیر با معرفی تابع پتانسیل مناسب به معادلات ساده‌تری تبدیل شده که با اعمال تبدیل هنکل، پاسخ‌ها در دامنه‌ی هنکل - فرکانس تعیین شدند. در نهایت، با استفاده از تبدیل وارون هنکل، پاسخ‌های هارمونیک به دست آمدند. سه مقدار مختلف از شاخص تغییرات نفوذپذیری، برای بیان ناهمگنی محیط در نظر گرفته شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش نفوذپذیری در عمق، دامنه تغییرمکان‌های محیط محدود می‌شود. در فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$ ، با دور شدن از محل بارگذاری، میرایی پاسخ نسبت به محیط همگن افزایش می‌یابد. در فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ ، تغییرمکان قائم محیط همگن و ناهمگن در اعماق $z/a \geq 4$ تا حدودی منطبق هستند. همچنین، نتایج نشان می‌دهند محل بیشینه فشار منفذی سیال، در محیط ناهمگن نسبت به محیط همگن، به سطح نیم‌فضا نزدیک می‌شود؛ به این صورت که در محیط همگن، محل بیشینه‌ی فشار منفذی سیال در عمق $z/a = 1/7$ است. این مقدار، برای محیط با پارامتر نفوذپذیری $\delta_K = -0.5$ در عمق $z/a = 0.8$ رخ می‌دهد.

کلمات کلیدی

محیط متخلخل اشباع

ناهمگن همسانگرد

پوروالاستودینامیک

تابع پتانسیل

معادلات بیو

۱- مقدمه

سازه‌های واقع بر بسترهای متخلخل اشباع چون سدها و سکوهای دریایی و همچنین در علوم زمین‌شناسی و هیدرولوژی کاربردهای فراوانی دارد. امروزه از روابط الاستیک تک‌فاز برای مدل‌سازی این محیط‌ها استفاده می‌شود؛ درحالی‌که وجود سیال و حرکت آن در

پاسخ دینامیکی محیط‌های متخلخل اشباع، به دلیل اندرکنش فازهای سیال و جامد و اثر این اندرکنش بر پاسخ مسئله انتشار امواج، مورد توجه ویژه‌ای قرار دارد. این موضوع در مهندسی

* رایانامه نویسنده مسئول: k.sahebkar@modares.ac.ir - ORCID: 0009-0008-2996-7801

کپی‌رایت © ۲۰۲۵، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس (TMU Press). این مقاله به صورت دسترسی آزاد منتشر شده و تحت مجوز بین‌المللی Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 قرار دارد (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>). بر اساس این مجوز، شما می‌توانید این مطلب را در هر قالب و رسانه‌ای کپی، بازنشر و بازآفرینی کنید و یا آن را ویرایش و بازسازی نمایید، به شرط آنکه نام نویسنده را ذکر کرده و از آن برای مقاصد غیرتجاری استفاده کنید.



در مطالعه محیط‌های متخلخل اشباع، پائول^۷ را می‌توان کسی دانست که به بررسی نیم‌فضای دوبعدی تحت شرایط مرزی بارگذاری در سطح پرداخت. شرایط مرزی به صورت بارگذاری دایره‌ای در سطح نیم‌فضا در نظر گرفته شد که معادلات حاکم، توسط چهار تابع پتانسیل اسکالر حل شده و جابه‌جایی‌های اسکلت جامد و سیال منفذی در دوبعد به دست آمدند [11]. انتشار موج در محیط متخلخل خشک و اشباع لایه‌ای در دامنه فرکانس توسط دگرند^۸ و همکاران بررسی شد. آن‌ها برای جداسازی معادلات درگیر از شش تابع پتانسیل (که پیش از این برای حل محیط الاستیک معرفی شده بودند) استفاده کردند [12]. پن^۹ توابع گرین نیم‌فضای چندلایه را با کمک تبدیل لاپلاس برای انواع مختلف بارگذاری‌ها (بارگذاری وارد بر اسکلت جامد، بارگذاری وارد بر سیال، تغییر مکان جامد و تغییر حجم سیال) به دست آورد. وی با معرفی سه تابع پتانسیل برداری و یک تابع پتانسیل اسکالر، معادلات را جداسازی کرد و سپس توابع گرین انواع بارگذاری‌ها را در مختصات استوانه‌ای ارائه داد [13]. لین^{۱۰} و همکاران، با فرض سیال منفذی غیرلزج، جابه‌جایی‌های سطحی و تنش‌های محیط نیم‌فضا را تحت امواج فشاری صفحه‌ای منتشر کردند [14] که رجوب^{۱۱} تحت بارگذاری مشابه، مسئله را با سیال منفذی لزج حل کرد [15].

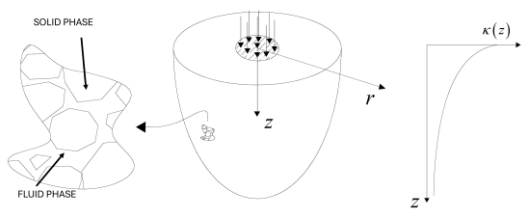
صاحبکار و اسکندری قادی پاسخ هارمونیک مسئله را برای نیم‌فضای متخلخل اشباع همسانگرد جانبی تحت بارگذاری در سطح به دست آوردند [16]. ایشان همچنین در پژوهشی مشابه، پاسخ محیط بی‌نهایت متخلخل اشباع همگن و همسانگرد جانبی را تحت بارگذاری وارد بر حلقه مدفون ارائه دادند [17]. در پژوهشی دیگر، پاسخ مسئله را برای محیط بی‌نهایت متخلخل و اشباع همگن و همسانگرد جانبی تحت جریان و فشار آب وارد به یک حلقه مدفون در دامنه بی‌نهایت به دست آوردند که فضای بی‌نهایت به صورت دو فضای نیمه بی‌نهایت مجاور هم در نظر گرفته شد [18]. تیموری و همکاران با استفاده از توابع پتانسیل موجود، مسئله را برای ارتعاش یک دیسک صلب مدفون در محیط نیمه

میان خلل و فرج محیط، می‌تواند بر پاسخ سیستم تأثیرگذار باشد. تحلیل این محیط‌ها به روش‌های عددی و تحلیلی میسر است. از آنجاکه پاسخ‌های تحلیلی، مراجع قابل اعتمادی برای برآورد پاسخ سیستم، هرچند برای هندسه‌های منظم بارگذاری و شرایط مرزی ساده هستند، اهمیت ویژه‌ای دارند. پس در این پژوهش، حل تحلیلی معادلات دینامیکی حاکم بر نیم‌فضای متخلخل اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج و با نفوذپذیری متغیر در عمق مدنظر قرار گرفته است.

در مطالعات محیط‌های نیمه بی‌نهایت، لمب^۱ را می‌توان از پیشگامان پژوهش انتشار امواج دینامیکی در محیط الاستیک شناخت که معادلات حاکم آن از تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته استخراج شده است [1]. نظریه مکانیک محیط‌های پیوسته برای اولین بار در قرن هجدهم توسط لئونارد اویلر^۲ ارائه شد و برای محیط‌های بیش از یک‌فاز به نظریه محیط مخلوط^۳ گسترش یافت [2، 3]. ترزاقی^۴ و فیلانگر^۵ در این زمینه مطالعاتی انجام دادند که بیو^۶، بر اساس مطالعات ترزاقی معادلات حاکم شبه‌استاتیکی و دینامیکی را برای محیط متخلخل اشباع شده با سیال لزج ارائه داد [4-6].

اسکندری و محمدی شجاع پاسخ محیط الاستیک ناهمگن تک‌فاز را تحت بارگذاری مدفون در محیط نیمه بی‌نهایت به دست آوردند [7]. در این پژوهش پاسخ نیمه‌تحلیلی محیط تک‌فاز الاستیک با فرض توزیع نمایی ضرایب الاستیسیته در نظر گرفته شده است. پاسخ استاتیک محیط نیمه بی‌نهایت، با فرض توزیع نمایی ضرایب الاستیسیته در مرجع [8] ارائه شده است. با فرض توزیع نمایی ضرایب الاستیسیته و توزیع نمایی چگالی در عمق، اسکندری قادی و هزاوه پاسخ این مسئله را با فرض بارگذاری در عمق برای محیط همسانگرد جانبی به دست آوردند [9]. نیم‌فضای تشکیل شده از مواد طبقه‌بندی شده‌ی تابعی توسط چشمه‌کانی و اسکندری قادی بررسی شد [10]. در این پژوهش محیط الاستیک، تک‌فاز در نظر گرفته شد که مدول الاستیسیته آن در عمق متغیر است.

¹ Lamb² L.Euler³ Mixture theory⁴ Terzaghi⁵ Fillunger⁶ Biot⁷ Paul⁸ Degrande⁹ Pan¹⁰ Lin¹¹ Rjoub



شکل ۱. شماتیک محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری ناهمگن

Fig. 1. The schematic representation of a saturated porous medium with heterogeneous permeability

زیروندهای i و j ، بیانگر جهت در مختصات استوانه‌ای هستند و باتوجه به تقارن محوری مسئله، مقدار آن‌ها می‌تواند r (شعاعی) و z (محوری) باشد.

مطابق با فرضیات رابطه ساده‌سازی شده‌ی بیو، معادلات تعادل دینامیکی و قانون دارسی به ترتیب، به صورت زیر به دست می‌آیند [21]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3)$$

$$\dot{w}_i = q_i = \frac{-\kappa}{\eta} (p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i - f_i), \quad (4)$$

در روابط (۳ و ۴)، F_i و f_i نیروی حجمی وارد بر محیط و سیال منفذی هستند. κ و η ، به ترتیب، نفوذپذیری محیط و لزجت سیال منفذی می‌باشند و p ، فشار منفذی سیال است. ρ چگالی محیط است که با رابطه $\rho = \rho_s(1 - \phi) + \phi\rho_f$ تعیین می‌شود. در این رابطه، ϕ ، ρ_f و ρ_s به ترتیب، نسبت تخلخل، چگالی سیال منفذی و چگالی اسکلت جامد می‌باشند.

لازم به ذکر است که در این متن، مشتق‌های مکانی، به شکل اندیسی نوشته شده‌اند؛ به این صورت که برای بردار دلخواه $\mathbf{f}$ ، $f_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$ بوده و مشتق کمیت اسکالر f ، به شکل $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ نوشته شده‌است. همچنین، نقاط روی پارامترها بیانگر مشتق آن‌ها نسبت به زمان است که تعداد نقاط، مرتبه مشتق را نشان می‌دهند. u_i و w_i تغییر مکان‌های اسکلت جامد و تغییر مکان نسبی سیال هستند که w_i به صورت زیر تعریف می‌شود [22]:

$$w_i = \phi(u_i^f - u_i), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

در رابطه (۵)، u_i^f تغییر مکان سیال منفذی است. بدین ترتیب، بیو معادله پیوستگی سیال را مطابق با رابطه (۶) بیان کرد [22]:

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0, \quad (6)$$

تغییرات حجم سیال در واحد حجم است که به صورت زیر

بی‌نهایت، که تمام محیط زیر یک لایه سیال با عمق مشخص قرار گرفته‌است حل کردند [19]. لازم به ذکر است که محیط متخلخل، لایه‌ای در نظر گرفته شد (مانند خاک‌های رسوبی) و جابه‌جایی دانه‌های خاک در دوبعد و فشار سیال منفذی به دست آمد. انتشار موج در محیط همسانگرد جانبی قرار گرفته زیر یک لایه سیال با عمق مشخص توسط تیموری و همکاران مطالعه شد [20].

بررسی مطالعات انجام‌شده در این زمینه، نشان می‌دهد که پژوهشگران به بررسی رفتار ناهمگن محیط متخلخل اشباع کمتر پرداخته‌اند. در این تحقیق، انتشار امواج در بستر متخلخل اشباع با نفوذپذیری ناهمگن مورد بررسی قرار گرفته‌است. منظور از ناهمگنی، تغییرات پیوسته نفوذپذیری در عمق بوده و محیط مورد نظر، نیم‌فضای متخلخل اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج است که نفوذپذیری آن در عمق، به صورت نمایی تغییر می‌کند شکل (۱). این محیط، تحت بارگذاری قائم یکنواخت واقع بر صفحه‌ی دایره‌ای قرار دارد و هدف، ارائه پاسخ گرین و تحلیل اثر این ناهمگنی بر پاسخ محیط است.

معادلات حاکم در نظر گرفته شده برای این محیط، حالت $u - p$ از معادلات بیو بوده که توسط زینکوویچ ارائه شده است [21]. در ادامه، نخست، معادلات حاکم بر این محیط، ارائه شده و سپس به حل آنها پرداخته خواهد شد.

۲- تئوری بیو و معادلات حاکم

بیو بر اساس مطالعات ترزاقی، معادلات دینامیکی حاکم بر محیط متخلخل اشباع را ارائه داد [5, 6]. این روابط که ریشه آزمایشگاهی دارند، با این فرض که با بارگذاری روی محیط متخلخل اشباع، بخشی از نیرو توسط سیال منفذی تحمل می‌شود، رفتار محیط متخلخل را مدل‌سازی می‌کنند. براین اساس، مفهوم تنش مؤثر به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij}, \quad (1)$$

در رابطه (۱)، σ_{ij}^s تنشی است که به اسکلت جامد محیط منتقل می‌شود که بیانگر تنش مؤثر بوده و σ^f تنشی است که توسط سیال منفذی تحمل می‌شود. δ_{ij} نشان‌دهنده‌ی دلتای کرونکر است که طبق رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

تعریف می‌شود [22]:

$$\left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \quad (16)$$

$$+ \left(K + \frac{1}{3}G\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho b_z = 0,$$

$$\kappa(z)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \quad (17)$$

$$+ \left(\kappa(z)\rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial \kappa(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \rho_f b_z\right)$$

$$- \kappa(z)\rho_f \left(\frac{b_r}{r} + \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = 0,$$

در روابط (۱۵) الی (۱۷)، b_i نیروی حجمی محیط است. همچنین، نفوذپذیری محیط با تغییرات نمایی در عمق، $\kappa(z)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa(z) = \kappa_0 e^{\delta \kappa z}, \quad (18)$$

که κ_0 ، نفوذپذیری محیط در سطح نیم فضا بوده و $\delta \kappa$ ، شاخص ناهمگنی نفوذپذیری است که نرخ تغییرات نفوذپذیری محیط در عمق را نشان می‌دهد و علامت آن منفی است. رابطه (۱۷) با کمک رابطه (۱۸)، رابطه پیوستگی، برای محیط با نفوذپذیری متغیر در عمق، مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\kappa_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \quad (19)$$

$$+ \left(\kappa_0 \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

$$+ \delta \kappa \kappa_0 \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right)$$

$$- \kappa \rho_f \left(\frac{b_r}{r} + \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) = 0,$$

روابط (۱۵)، (۱۶ و ۱۹)، معادلات حاکم بر محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج تحت بارگذاری متقارن محوری هستند. با حل این معادلات، پاسخ سیستم شامل تغییر مکان‌های اسکلت جامد در راستاهای شعاعی، r و عمق، z و فشار منفذی سیال تعیین می‌شوند که در ادامه به حل این دستگاه معادله دیفرانسیل درگیر با روش نیمه تحلیلی مبتنی بر معرفی توابع پتانسیل پرداخته می‌شود.

۳- تعیین توابع پتانسیل

روابط (۱۵)، (۱۶ و ۱۹) را در غیاب نیروی حجمی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\zeta = \alpha \varepsilon_{kk}^s + \frac{1}{M} p, \quad (20)$$

در رابطه (۲۰)، α و M ، ضرایب بیهی هستند که از روابط زیر به دست می‌آیند [22]:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K^s}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{M} = \left(\frac{1}{K^s}(\alpha - \varphi) + \frac{\varphi}{K^f}\right), \quad (22)$$

همچنین کرنش اسکلت جامد، ε_{ij}^s ، مطابق با رابطه (۲۰) می‌باشد [21]:

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2}(u_{i,j}^f - u_{j,i}), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (23)$$

در روابط (۸ و ۹)، K ، K^s و K^f به ترتیب، مدول بالک توده، اسکلت جامد و سیال منفذی هستند. باتوجه به این که بارگذاری مسئله، قائم و یکنواخت است، مسئله به یک مسئله متقارن محوری تبدیل می‌شود. در این حالت، معادلات تنش - کرنش حاکم بر مسئله موردنظر در حالت متقارن محوری در مختصات استوانه‌ای (r - z) به شرح زیر خواهند بود:

$$\sigma_{rr} = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{u_r}{r}\right) \quad (24)$$

$$+ \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - \alpha p,$$

$$\sigma_{zz} = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \quad (25)$$

$$+ \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\frac{u_r}{r}\right) - \alpha p,$$

$$\sigma_{rz} = (G)\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \quad (26)$$

$$p = -\alpha M u_{i,i} + M \zeta, \quad (27)$$

در روابط (۱۱) الی (۱۴)، G مدول برشی توده مورد بررسی است. در غیاب نیروی لزجت، $\eta = 0$ ، به کمک روابط (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) و در نظر گرفتن نفوذپذیری متغیر در عمق، $\kappa(z)$ ، با استفاده از روابط (۱۱) الی (۱۴)، معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال غیرلزج به صورت زیر به دست می‌آیند [23]:

$$\left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + G\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (28)$$

$$+ \left(K + \frac{1}{3}G\right)\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) - \alpha \frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \rho b_r = 0,$$

$$LU = 0, \quad (20)$$

شامل تغییر مکان در دو راستای شعاعی و عمقی و فشار سیال منفذی، ضرب می‌شود. شکل باز شده رابطه (۲۰) به صورت زیر است:

در رابطه (۲۰)، L ماتریس عملگر بوده که در بردار مجهولات، U

$$\begin{bmatrix} \nabla_{rz}^2 + \beta_1 \nabla_r^2 - \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \beta_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right) & -\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \\ \beta_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) & \beta_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \nabla_r^2 - \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\tilde{\kappa} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) & \left(\tilde{\kappa} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + \delta_\kappa \tilde{\kappa} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \tilde{\kappa} \nabla_{rz}^2 + \delta_\kappa \tilde{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ p \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

$$\det(L)F = 0, \quad (27)$$

که در آن:

مطابق با رابطه (۲۳)، مجهولات مسئله به شکل زیر به دست

می‌آیند:

$$u_r = \left\{ \left(-\tilde{\kappa} \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right) \left(\nabla_{rz}^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\beta_1} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \delta_\kappa \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial r} \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \tilde{\alpha} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} F, \quad (28)$$

$$u_z = \left\{ \tilde{\kappa} \left[(\square_0^2 + \beta_1 \nabla_r^2) \nabla_{rz}^2 + \tilde{\alpha} \nabla_r^2 \left(\rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] + \delta_\kappa \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla_r^2 (1 + \beta_1) \right) \right\} F, \quad (29)$$

$$p = - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\tilde{\kappa} \rho_f \frac{\partial}{\partial t} \square_0^2 \right) + (\square_0^2 + \beta_1 \nabla_r^2) \left(\delta_\kappa \tilde{\kappa} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} F, \quad (30)$$

که در آن:

$$\square_0^2 = \nabla_{rz}^2 - \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \square_1^2 = \nabla_{rz}^2 - \frac{\tilde{\rho}}{1 + \beta_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (31)$$

$$\square_2^2 = (1 + \beta_1) \left(\nabla_{rz}^2 - \frac{1}{(1 + \beta_1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tilde{\rho} - \tilde{\alpha} \rho_f) \right),$$

همچنین معادله حاکم بر تابع F ، مطابق با رابطه (۲۷)، به صورت زیر است:

$$\det(L)F = \{ \tilde{\kappa} (1 + \beta_1) \nabla_{rz}^2 \square_1^2 \square_0^2 + \left[\tilde{\kappa} \tilde{\alpha} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] [\nabla_{rz}^2 \square_0^2] + \delta_\kappa \tilde{\kappa} \frac{\partial}{\partial z} (\square_0^2 \square_2^2) \} F = 0, \quad (32)$$

توجه شود که معادله (۳۲) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که با حل آن، تابع پتانسیل F به دست می‌آید و پس از آن، مطابق رابطه (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) مجهولات مسئله تعیین می‌شوند. با فرض تحریک هارمونیک با فرکانس ω ، می‌توان متغیرهای مسئله را مطابق با رابطه (۳۳)، هارمونیک در نظر گرفت:

$$\nabla_{rz}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{G}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{G}, \quad (22)$$

$$\nabla_r^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa_0}{G}, \quad \beta_1 = \frac{K + G/3}{G},$$

$$\beta_2 = G, \quad \beta_3 = \frac{K + (4/3)G}{G},$$

حال، یک بردار دلخواه مجهول F با سه مؤلفه، به گونه‌ای تعریف می‌شود که بردار مجهولات در رابطه (۲۱)، به صورت زیر برحسب بردار F بیان شود:

$$U = adj(L)F, \quad (23)$$

که $adj(L)$ ماتریس الحاقی L است و در رابطه (۳۳) صدق می‌کند:

$$\det(L)I = Ladj(L), \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، I ماتریس یک 3×3 است. با جایگزینی (۲۳) در (۲۰) و به کمک رابطه (۲۴)، رابطه (۲۵) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\det(L)F_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25)$$

ملاحظه می‌شود که معادله (۲۵) یک دستگاه معادله غیردرگیر برحسب مؤلفه‌های بردار F است که با حل این معادلات، بردار F معین شده و به کمک آن مجهولات به دست می‌آیند. به منظور ساده‌سازی روند حل، فرض می‌شود که بردار F تنها یک مؤلفه به صورت زیر دارد:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

در این حالت، مجهولات تنها برحسب تابع اسکالر F به دست می‌آیند. همچنین، دستگاه معادلات (۲۵) به یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ۶ تبدیل خواهد شد.

$$\bar{u}_r^{m=1} = \left\{ \left(\bar{\kappa} \beta_1 \xi \frac{d}{dz} \right) \left(\nabla_{rz}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\beta_1} \rho_f \omega^2 \right) + \delta_\kappa \bar{\kappa} \left(\beta_1 \frac{d^2}{dz^2} - \bar{\alpha} \rho_f \omega^2 \right) \right\} \bar{F}^{m=0}, \quad (39)$$

$$\bar{u}_z^{m=0} = \left\{ \bar{\kappa} [(\bar{\alpha}_0^{2m} - \beta_1 \xi^2) \nabla_{rz}^2 + \bar{\alpha} \xi^2 \rho_f \omega^2] + \bar{\kappa} \delta_\kappa \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \bar{\rho} \omega^2 - \xi^2 (1 + \beta_1) \right) \right\} \bar{F}^{m=0}, \quad (40)$$

$$\bar{p}^{m=0} = - \left\{ i \omega \frac{d}{dz} (\bar{\kappa} \rho_f i \omega \bar{\alpha}_0^{2m}) - (\bar{\alpha}_0^{2m} - \beta_1 \xi^2) (\delta_\kappa \bar{\kappa} \rho_f \omega^2) \right\} \bar{F}^{m=0}, \quad (41)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{m=0} = \left(K + \frac{4}{3} G \right) \left(\frac{d}{dz} \bar{u}_z^{m=0} \right) + \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\xi \bar{u}_r^{m=0}), \quad (42)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{m=1} = G \left(\frac{d}{dz} \bar{u}_r^{m=1} - \xi \bar{u}_z^{m=0} \right), \quad (43)$$

در نظر گرفته شود که معادله دیفرانسیل (۳۶) از نوع معمولی و وابسته به z است که به صورت تحلیلی قابل حل بوده و پاسخ آن به شکل زیر است:

$$\bar{F}^{m=0}(\xi, z, \omega) = A(\xi, \omega) e^{-\lambda_1 z} + B(\xi, \omega) e^{-\lambda_2 z} + C(\xi, \omega) e^{-\lambda_3 z} + D(\xi, \omega) e^{\lambda_4 z} + E(\xi, \omega) e^{\lambda_5 z} + G(\xi, \omega) e^{\lambda_6 z}, \quad (44)$$

که در آن $\lambda_i (i = 1 \sim 6) > 0$ قدرمطلق ریشه‌های معادله مشخصه معادله حاکم بر $\bar{F}^{m=0}$ بوده و شامل سه ریشه مثبت و سه ریشه منفی است که در رابطه (۴۴) مشخص شده‌اند. در اینجا رعایت شرط منظم بودن در مرزهای دوردست ضروری است. شرط نخست، شرط منظم بودن در مرزهای دوردست $r \rightarrow \infty$ است که این موضوع توسط تبدیل هنکل، رابطه (۳۴)، رعایت شده‌است. شرط دیگر، منظم بودن پاسخ در مرزهای دوردست $z \rightarrow \infty$ است که باید در رابطه (۴۴) رعایت شود. باتوجه به این که پاسخ مسئله در اعماق دوردست باید به سمت صفر میل کند، ضرایب ریشه‌های مثبت معادله دیفرانسیل در رابطه (۴۴)، صفر در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه پاسخ معادله دیفرانسیل به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{F}^{m=0}(\xi, z, \omega) = A(\xi, \omega) e^{-\lambda_1 z} + B(\xi, \omega) e^{-\lambda_2 z} + C(\xi, \omega) e^{-\lambda_3 z}, \quad (45)$$

با قرار دادن عبارت (۴۵) در رابطه (۳۶)، رابطه (۴۶) حاصل می‌شود:

$$I_6(\xi, \omega) \lambda_i^6 - I_5(\xi, \omega) \lambda_i^5 + I_4(\xi, \omega) \lambda_i^4 - I_3(\xi, \omega) \lambda_i^3 + I_2(\xi, \omega) \lambda_i^2 - I_1(\xi, \omega) \lambda_i + I_0(\xi, \omega) = 0, \quad (46)$$

$$[u_i, p, \sigma_{ij}, F](r, z, t) = e^{i\omega t} [\bar{u}_i, \bar{p}, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{F}](r, z), \quad (i, j = r, z) \quad (33)$$

تبدیل انتگرالی هنکل، یک تبدیل بسیار کاربردی برای محیط‌های نامحدود است که می‌توان به کمک آن مسئله را از راستای شعاعی (r)، مستقل کرد. تبدیل انتگرالی مرتبه m تابع f و همچنین تبدیل معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند [24]:

$$f^m(\xi) = H_m[f(r)] = \int_0^\infty r f(r) J_m(\xi r) dr, \quad (34)$$

$$f(r) = H_m^{-1}[f^m(\xi)] = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_m(\xi r) d\xi, \quad (35)$$

که در آن J_m تابع بسل نوع اول از مرتبه m و ξ پارامتر تبدیل است. با اعمال روابط (۳۳ و ۳۴) بر معادله (۳۲)، معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر تابع پتانسیل F به شکل زیر به دست می‌آید:

$$[I_6(\xi) \frac{d^6}{dz^6} + I_5(\xi) \frac{d^5}{dz^5} + I_4(\xi) \frac{d^4}{dz^4} + I_3(\xi) \frac{d^3}{dz^3} + I_2(\xi) \frac{d^2}{dz^2} + I_1(\xi) \frac{d}{dz} + I_0(\xi)] \bar{F}^{m=0} = 0, \quad (36)$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_6(\xi) &= \bar{\kappa} (1 + \beta_1), \\ I_5(\xi) &= (1 + \beta_1) \delta_\kappa \bar{\kappa}, \\ I_4(\xi) &= -3\bar{\kappa} (1 + \beta_1) \xi^2 + \omega \left((2 + \beta_1) \bar{\kappa} \bar{\rho} \omega - \bar{\alpha} \rho_f \omega \bar{\kappa} \right), \\ I_3(\xi) &= \delta_\kappa \bar{\kappa} \left(\omega^2 \left((2 + \beta_1) \bar{\rho} - \bar{\alpha} \rho_f \right) - 2(1 + \beta_1) \xi^2 \right), \\ I_2(\xi) &= 3\bar{\kappa} (1 + \beta_1) \xi^4 + \phi_1 \xi^2 - i\omega^3 \bar{\rho} (i\bar{\kappa} \bar{\rho} \omega - i\bar{\alpha} \bar{\kappa} \rho_f \omega), \\ I_1(\xi) &= \delta_\kappa \bar{\kappa} (\bar{\rho} \omega^2 - \xi^2) (\omega^2 (\bar{\rho} - \bar{\alpha} \rho_f) - (1 + \beta_1) \xi^2), \\ I_0(\xi) &= -\bar{\kappa} (1 + \beta_1) \xi^6 + \phi_2 \xi^4 + \phi_3 \xi^2, \end{aligned} \quad (37)$$

در رابطه‌ی (۳۷)، ضرایب ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ_3 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2\omega \left((2 + \beta_1) \bar{\kappa} \bar{\rho} \omega + \bar{\alpha} \bar{\kappa} \rho_f \omega \right), \\ \phi_2 &= \omega \left((2 + \beta_1) \bar{\kappa} \bar{\rho} \omega - \bar{\alpha} \bar{\kappa} \rho_f \omega \right), \\ \phi_3 &= \omega^3 \bar{\rho} (-\bar{\kappa} \bar{\rho} \omega + \bar{\alpha} \bar{\kappa} \rho_f \omega), \end{aligned} \quad (38)$$

با حل معادله دیفرانسیل (۳۶) و تعیین $\bar{F}^{m=0}$ تغییرمکان‌ها، فشار منفذی و تنش‌ها که به ترتیب در روابط (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۱۳) ارائه شدند، در فضای هنکل - فرکانس به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} x_i(\xi, \omega) = & \lambda_i^3 [-\tilde{\kappa}(\rho_f \omega^2)] \\ & + \lambda_i^2 [\delta_{\kappa} \tilde{\kappa} \rho_f \omega^2] \\ & - \lambda_i [\omega (\tilde{\kappa} \rho_f \omega) (\tilde{\rho} \omega^2 - \xi^2)] \\ & + \delta_{\kappa} \tilde{\kappa} \omega^2 \rho_f (\tilde{\rho} \omega^2 - (1 + \beta_1) \xi^2), \end{aligned} \quad (51)$$

باتوجه به همسان بودن محیط، تنها دو ضریب الاستیک کافی است که در این راستا، ضرایب C_{1133} و C_{3333} در رابطه‌ی (۵۰)، به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} C_{3333} &= K + \frac{4}{3}G, \\ C_{1133} &= K - \frac{2}{3}G, \end{aligned} \quad (52)$$

با حل دستگاه معادلات (۴۸)، توابع مجهول A ، B و C به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A(\xi, \omega) = \frac{1}{I(\xi, \omega)} \{Z^{m=0}(\xi) [w_2(\xi, \omega)x_3(\xi, \omega) - w_3(\xi, \omega)x_2(\xi, \omega)]\}, \quad (53)$$

$$B(\xi, \omega) = \frac{-1}{I(\xi, \omega)} \{Z^{m=0}(\xi) [w_1(\xi, \omega)x_3(\xi, \omega) - w_3(\xi, \omega)x_1(\xi, \omega)]\}, \quad (54)$$

$$C(\xi, \omega) = \frac{1}{I(\xi, \omega)} \{Z^{m=0}(\xi) [w_1(\xi, \omega)x_2(\xi, \omega) - w_2(\xi, \omega)x_1(\xi, \omega)]\}, \quad (55)$$

که در آن

$$I(\xi, \omega) = v_1(w_2x_3 - w_3x_2) + v_2(w_3x_1 - w_1x_3) + v_3(w_1x_2 - w_2x_1), \quad (56)$$

با یافتن ضرایب مجهول و با جای گذاری (۴۵) در (۳۹)، (۴۰)، (۴۱ و ۴۲)، تغییر مکان‌ها، فشار منفذی سیال و تنش‌ها در دامنه هنکل - فرکانس به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{u}_z^{m=0}(\xi, z, \omega) = & \{\tilde{\kappa}[\lambda_i^4 A e^{-\lambda_1 z} \\ & + \lambda_2^4 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^4 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & + \delta_{\kappa} \tilde{\kappa} [-\lambda_1^3 A e^{-\lambda_1 z} - \lambda_1^3 B e^{-\lambda_2 z} - \lambda_1^3 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & - \left[\tilde{\kappa}(\xi^2) + \tilde{\kappa}(1 + \beta_1) \left(\xi^2 - \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) \right] \\ & [\lambda_1^2 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^2 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & + \delta_{\kappa} \tilde{\kappa} (1 + \beta_1) \left(-\xi^2 + \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) \\ & [-\lambda_1 A e^{-\lambda_1 z} - \lambda_2 B e^{-\lambda_2 z} - \lambda_3 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & + [\tilde{\kappa}(1 + \beta_1) \left(\xi^2 - \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) (\xi^2) \\ & + \tilde{\kappa} \tilde{\alpha} \xi^2 (\rho_f \omega^2)] \\ & \times [A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z} + C e^{-\lambda_3 z}]\}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\bar{u}_r^{m=1}(\xi, z, \omega) = \{\tilde{\kappa} \beta_1 \xi [-\lambda_1^3 A e^{-\lambda_1 z} - \lambda_2^3 B e^{-\lambda_2 z} - \lambda_3^3 C e^{-\lambda_3 z}] \} \quad (58)$$

با حل معادله جبری (۴۶) و با تعریف (۴۵)، مقدار λ_i به دست می‌آید. در معادله (۴۵) ضرایب A ، B و C باتوجه به شرایط مرزی مسئله و بارگذاری به دست می‌آیند. شرط مرزی در $z = 0$ شامل تنش معلوم قائم به مقدار V روی سطح دایره‌ای به شعاع a و فشار منفذی سیال برابر صفر، است. در نتیجه شرایط مرزی مسئله را می‌توان مطابق رابطه (۴۷) نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z=0, t) &= V(r) e^{i\omega t} \\ \sigma_{r\theta}(r, z=0, t) &= 0 \\ \sigma_{\theta z}(r, z=0, t) &= 0 \end{aligned} \right\} r \leq a, \quad (47)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0, \quad r > a, \\ p(r, z=0, t) = 0, \quad r \geq 0,$$

با جای گذاری (۴۵) در (۴۱)، (۴۲ و ۴۳) و به کمک (۴۷) دستگاه معادلات جبری در فضای هنکل - فرکانس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rz}^{m=1}(\xi, z=0, \omega) &= A w_1(\xi, \omega) \\ &+ B w_2(\xi, \omega) + C w_3(\xi, \omega) = 0 \\ \bar{\sigma}_{zz}^{m=0}(\xi, z=0, \omega) &= A v_1(\xi, \omega) \\ &+ B v_2(\xi, \omega) + C v_3(\xi, \omega) = Z^{m=0}(\xi), \\ \bar{p}^{m=0}(\xi, z=0, \omega) &= A x_1(\xi, \omega) \\ &+ B x_2(\xi, \omega) + C x_3(\xi, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

که در آن $Z^{m=0}$ تبدیل یافته‌ی بارگذاری تنش معلوم قائم، V ، در فضای هنکل است. مقدار w_i ، v_i ، x_i برای $i = 1, 2, 3$ به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} w_i(\xi, \omega) = & G \xi \{ \lambda_i^4 \tilde{\kappa} [\beta_1 - 1] \\ & - \lambda_i^3 [\delta_{\kappa} \tilde{\kappa} (\beta_1 - 1)] \\ & + \lambda_i^2 [-\omega (\tilde{\kappa} \tilde{\rho} \omega + \tilde{\kappa} \tilde{\alpha} \rho_f \omega) + 2 \tilde{\kappa} \xi^2] \\ & + \lambda_i [\delta_{\kappa} \kappa (\omega^2 (\tilde{\rho} + \tilde{\alpha} \rho_f) - (1 + \beta_1) \xi^2)] \\ & + [-i \omega (i \tilde{\kappa} \tilde{\rho} \omega - i \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} \omega \rho_f) \xi^2 - (1 + \beta_1) \tilde{\kappa} \xi^4] \}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} v_i(\xi, \omega) = & \lambda_i \{ \lambda_i^4 [-\tilde{\kappa} C_{3333}] \\ & + \lambda_i^3 [C_{3333} \delta_{\kappa} \tilde{\kappa}] \\ & + \lambda_i^2 [C_{3333} i \omega (i \omega \tilde{\kappa} \tilde{\rho}) + \\ & (-\beta_1 C_{1133} + (2 + \beta_1) C_{3333}) \xi^2 \tilde{\kappa}] \\ & + \lambda_i [\delta_{\kappa} \tilde{\kappa} \\ & (C_{3333} \tilde{\rho} \omega^2 - (1 + \beta_1) C_{3333} \xi^2 + C_{1133} \beta_1 \xi^2)] \\ & - C_{3333} \left(\tilde{\kappa} (1 + \beta_1) \left(\xi^2 - \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) \right. \\ & \left. (\xi^2) + \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} \xi^2 (\rho_f \omega^2) \right) \\ & + \xi^2 C_{1133} \left(\tilde{\kappa} \beta_1 (\xi^2) + \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} (\rho_f \omega^2) \right) \\ & \left. - \frac{C_{1133} \tilde{\alpha} \rho_f}{\lambda_i} \xi^2 \omega^2 \delta_{\kappa} \tilde{\kappa} \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

رابطه، پاسخ‌ها به شکل انتگرال‌های نیمه بی‌نهایت با متغیر ξ به دست می‌آیند:

$$\bar{u}_r(r, z, \omega) = \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) \bar{u}_r^{m=1} d\xi, \quad (62)$$

$$\bar{u}_z(r, z, \omega) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \bar{u}_z^{m=0} d\xi, \quad (63)$$

$$\bar{p}(r, z, \omega) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \bar{p}^{m=0} d\xi, \quad (64)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(r, z, \omega) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \bar{\sigma}_{zz}^{m=0} d\xi, \quad (65)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}(r, z, \omega) = \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) \bar{\sigma}_{rz}^{m=1} d\xi, \quad (66)$$

مطابق با روابط بالا، پاسخ هارمونیک قابل محاسبه است. لازم به ذکر است عبارت‌های داخل انتگرال در روابط (۶۲) الی (۶۶)، پیش‌تر در روابط (۵۷) الی (۶۱) تعریف شده‌اند.

نیروی یکنواخت قائم به مقدار R مؤثر بر سطح دایره‌ای به شعاع a را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{R}{\pi a^2}, & r \leq a, \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (67)$$

باتوجه به رابطه‌ی (۴۸)، با اعمال تبدیل هنکل مرتبه صفر طبق رابطه‌ی (۳۴) بر رابطه (۶۷)، تابع بارگذاری قائم یکنواخت روی سطح دایره‌ای در دامنه هنکل به شکل زیر به دست می‌آید [25]:

$$Z^{m=0}(\xi) = \frac{R J_1(\xi a)}{\pi \xi a}, \quad (68)$$

که با قرار دادن $Z^{m=0}$ مطابق با رابطه‌ی (۶۸) در رابطه (۴۸)، پاسخ مسئله تحت بارگذاری قائم یکنواخت به مقدار R به دست می‌آید.

۴- نتایج عددی و تحلیل

با بررسی معادلات (۶۲) تا (۶۶)، مشخص می‌شود که پاسخ محیط به صورت انتگرال‌های نیمه بی‌نهایت با هسته پیچیده شامل توابع بسل ظاهر شده است. وجود توابع نمایی و بسل و پیچیدگی این انتگرال‌ها باعث می‌شود که حل تحلیلی آن‌ها امکان‌پذیر نباشد. در چنین شرایطی، باید از روش‌های عددی برای برآورد انتگرال استفاده کرد. همچنین، با دقت در عبارات زیر انتگرال می‌توان مشاهده کرد در برخی نقاط خاص، مقدار انتگرال به بی‌نهایت میل می‌کند. این نقاط که ریشه‌های منخرج عبارت‌های زیر انتگرال

$$\begin{aligned} & + \delta_\kappa \tilde{\kappa} \beta_1 \xi [\lambda_1^2 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^2 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & + \xi [\tilde{\alpha} \omega (\tilde{\kappa} \rho_f \omega) \\ & + \beta_1 (\tilde{\kappa} \xi^2)] [\lambda_1 A e^{-\lambda_1 z} \\ & + \lambda_2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3 C e^{-\lambda_3 z}] \\ & - \delta_\kappa \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} \rho_f \omega^2 \xi [A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z} + C e^{-\lambda_3 z} \}}, \end{aligned}$$

$$\bar{p}^{m=0}(\xi, z, \omega) = \{-\tilde{\kappa} [\rho_f \omega^2] \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1^3 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^3 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [\delta_\kappa \tilde{\kappa} \rho_f \omega^2] \\ & (\lambda_1^2 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^2 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & - [\omega (\tilde{\kappa} \rho_f \omega) (\tilde{\rho} \omega^2 - \xi^2)] \\ & (\lambda_1 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [\delta_\kappa \tilde{\kappa} \omega^2 \rho_f (\tilde{\rho} \omega^2 - (1 + \beta_1) \xi^2)] \\ & (A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z} + C e^{-\lambda_3 z}) \}, \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{m=1}(\xi, z, \omega) = G \xi \{ \tilde{\kappa} [\beta_1 - 1] \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & \times (\lambda_1^4 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^4 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^4 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & - [\delta_\kappa \tilde{\kappa} (\beta_1 - 1)] \times \\ & (\lambda_1^3 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^3 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [-\omega (\tilde{\kappa} \tilde{\rho} \omega + \tilde{\kappa} \tilde{\alpha} \rho_f \omega) + 2 \tilde{\kappa} \xi^2] \\ & \times (\lambda_1^2 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^2 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [\delta_\kappa \kappa (\omega^2 (\tilde{\rho} + \tilde{\alpha} \rho_f) - (1 + \beta_1) \xi^2)] \\ & \times (\lambda_1 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & - [-i \omega (\tilde{\kappa} \tilde{\rho} \omega - i \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} \omega \rho_f) \xi^2 - (1 + \beta_1) \tilde{\kappa} \xi^4] \\ & \times (A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z} + C e^{-\lambda_3 z}) \}, \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{m=0}(\xi, z, \omega) = \{ [-\tilde{\kappa} C_{3333}] \quad (61)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1^5 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^5 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^5 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [C_{3333} \delta \tilde{\kappa}] (\lambda_1^4 A e^{-\lambda_1 z} \\ & + \lambda_2^4 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^4 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [C_{3333} i \omega (\tilde{\kappa} \tilde{\rho}) + \\ & (-\beta_1 C_{1133} + (2 + \beta_1) C_{3333}) \xi^2 \tilde{\kappa}] \\ & \times (\lambda_1^3 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^3 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & + [\delta_\kappa \tilde{\kappa} \\ & (C_{3333} \tilde{\rho} \omega^2 - (1 + \beta_1) C_{3333} \xi^2 + C_{1133} \beta_1 \xi^2)] \\ & \times (\lambda_1^2 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^2 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & \left(-C_{3333} \left(\tilde{\kappa} (1 + \beta_1) \left(\xi^2 - \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. (\xi^2) + \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} \xi^2 (\rho_f \omega^2) \right) \right) \\ & + \xi^2 C_{1133} (\tilde{\kappa} \beta_1 (\xi^2) \\ & + \tilde{\alpha} \tilde{\kappa} (\rho_f \omega^2)) \left. \right) \\ & \times (\lambda_1 A e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 B e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3 C e^{-\lambda_3 z}) \\ & - C_{1133} \tilde{\alpha} \rho_f \xi^2 \omega^2 \delta_\kappa \tilde{\kappa} \\ & (A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z} + C e^{-\lambda_3 z}) \}, \end{aligned}$$

روابط (۵۷) الی (۶۱) پاسخ سیستم را در فضای تبدیل یافته هنکل نشان می‌دهند و به همین دلیل، متغیرهای مسئله به ξ وابسته شده‌اند. اکنون لازم است که این پاسخ‌ها از فضای هنکل به فضای واقعی انتقال یابند. برای انجام این کار، می‌توان از تبدیل معکوس هنکل استفاده کرد که در رابطه (۳۵) آمده است. براساس این

هستند، باعث ایجاد قطب‌ها و نقاط شاخه‌ای در مسیر انتگرال‌گیری می‌شوند؛ بنابراین، حل عددی این انتگرال‌ها نیز به سادگی امکان‌پذیر نبوده و باید با تمهیدات ویژه‌ای مقدار عددی آن‌ها را محاسبه کرد. روش متداول محاسبات این نوع انتگرال‌ها، انتگرال‌گیری به کمک قضیه مانده‌ها است که پیش‌تر در مرجع [26] استفاده شده است. در این روش، انتگرال به چند بخش تقسیم می‌شود: انتگرال‌گیری روی مسیر از صفر تا نقطه‌ای بلافاصله پیش از قطب، انتگرال‌گیری روی یک نیم‌دایره با شعاع کوچک، ε ، در محل قطب، و انتگرال‌گیری از نقطه‌ای بلافاصله پس از قطب تا یک مقدار بسیار بزرگ یا قطب بعدی. قابل ذکر است که انتگرال‌گیری روی نیم‌دایره که شعاع آن به اندازه‌ی کافی کوچک است، با استفاده از روش مانده‌ها و به صورت نصف مانده در محل قطب با علامت منفی محاسبه می‌شود برای محاسبه مقدار مانده در محل قطب از رابطه (۶۹) استفاده می‌شود.

$$\text{Res}(\xi_{pole}) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_{pole}} \left[\frac{f(\xi)}{\frac{d}{d(\xi)} I(\xi)} \right], \quad (69)$$

در این رابطه، $f(\xi)$ و $I(\xi)$ به ترتیب، صورت و مخرج عبارت زیر انتگرال هستند. ξ_{pole} نقطه تکین یا قطب تابع است که برابر است با ریشه مخرج عبارت زیر انتگرال و $\text{Res}(\xi_{pole})$ مقدار مانده عبارت زیر انتگرال در نقطه تکین است.

در ابتدا برای درستی آزمایشی راه حل ارائه شده و روش‌های به کار رفته برای برآورد عددی انتگرال‌ها، پاسخ محیط الاستیک تک‌فاز تحت بارگذاری دینامیکی قائم یکنواخت محاسبه شده و با پاسخ موجود در مرجع [26] مقایسه می‌شود. در این پژوهش، پاسخ‌ها با استفاده از نرم‌افزار 14 Wolfram Mathematica محاسبه شده‌اند. همچنین، در ارائه نتایج عددی از پارامترهای بی‌بعد استفاده شده است؛ بدین ترتیب، تغییر مکان بی‌بعد $\hat{u}_i$ به صورت $\hat{u}_i = \bar{u}_i a \pi G / R$ و فشار منفذی بی‌بعد، $\hat{p}$ ، به صورت $\hat{p} = \bar{p} \pi a^2 / R$ و فرکانس بی‌بعد، ω_0 ، به صورت $\omega_0 = \omega a \sqrt{\rho / G}$ تعریف می‌شوند.

۴-۱- درستی آزمایشی

با توجه به تشابه معادلات حاکم محیط الاستیک و پوروالاستیک، می‌توان با تمهیداتی پاسخ موجود را به محیط الاستیک تک‌فاز تعمیم داد. این کار با از بین بردن پارامترهای

مربوط به فشار منفذی آب صورت می‌پذیرد. برای محاسبه پاسخ محیط الاستیک، باید به جای صفر قرار دادن همه پارامترهای مربوط به سیال منفذی، مقدار عددی مناسبی را برای آن‌ها در نظر گرفت تا از واگرایی پاسخ اجتناب کرد. در نتیجه، با قراردادن $\varphi, \rho_f, \delta_k = 0$ و همچنین $\eta, \alpha = 10^{-5}$ قراردادن $\kappa, M = 10^5$ می‌توان پاسخ محیط الاستیک را از معادلات پوروالاستیک موجود استخراج کرد. به منظور درستی آزمایشی روش حل ارائه شده، پاسخ دینامیکی نیم‌فضای الاستیک تک‌فاز تحت بارگذاری قائم یکنواخت بر سطح دایره‌ای به دست آمده در مرجع [26] انتخاب شده است. جدول (۲)، مشخصات مصالح محیط مورد نظر را نشان می‌دهد.

باتوجه به این که در روابط و فرمول‌بندی‌های محیط الاستیک تک‌فاز، ریشه مخرج جملات زیر انتگرال به صورت تحلیلی قابل محاسبه است، محل قطب مسیر انتگرال‌گیری برای مصالح همسانگرد و مسئله متقارن محوری، به سادگی به دست می‌آید. بدین ترتیب، با توجه به جدول (۲) در فرکانس تحریک $\omega_0 = 0/5$ ، قطب در محل $\xi_{pole} = 0/5438$ قرار دارد.

شکل (۲)، پاسخ محیط الاستیک تک‌فاز را تحت بار یکنواخت قائم با فرکانس $\omega_0 = 0/5$ نشان می‌دهد. باتوجه به شکل، پاسخ به دست آمده محیط الاستیک همگن از معادلات پوروالاستیک با نتایج به دست آمده در مرجع (۲) منطبق هستند.

برای اعتبارسنجی راه حل تحلیلی ارائه شده در شرایط اشباع، نتایج به دست آمده با پاسخ تحلیلی موجود در مرجع [16] مقایسه شده‌اند. در مرجع مذکور، تحلیل نیم‌فضای متخلخل اشباع، همگن و همسانگرد جانبی با در نظر گرفتن سیال منفذی لزج و اعمال بارگذاری سه‌بعدی ارائه شده است. با این حال، با اعمال شرایط خاص، معادلات حاکم در مرجع با معادلات این پژوهش قابل تطبیق خواهند بود. برای انجام این مقایسه، موارد زیر در مرجع [16] باید در نظر گرفته شود:

- محیط به صورت همسانگرد جانبی در نظر گرفته شده است. با فرض همسانگردی کامل، جملات وابسته به ناهمسانگردی به جملات همسان ساده شده و معادلات مشابه خواهند شد (مشخصات مکانیکی و هیدرولیکی محیط در تمامی راستاها یکسان باشد).

$$\begin{aligned}
 & -\eta \tilde{\alpha}_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\square_{s2}^2 \square_3^2 + \delta_2 \nabla_{r\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Big] F = -\frac{b_z}{C_{1212}}, \\
 & \bar{p} = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \left\{ -\tilde{\kappa}_3 \beta_2 \left(\rho_f \omega^2 + \eta \frac{\tilde{\alpha}_3}{\tilde{\kappa}_3} i\omega \right) \right. \\
 & \times \left(\lambda_1^3 A_0 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2^3 B_0 e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3^3 C_0 e^{-\lambda_3 z} \right) \\
 & + \left[\tilde{\kappa}_3 (1 + \beta_1) \left(\xi^2 - \frac{\tilde{\rho} \omega^2}{1 + \beta_1} \right) \right. \\
 & \left. \left(\rho_f \omega^2 + \eta \frac{\tilde{\alpha}_3}{\tilde{\kappa}_3} i\omega \right) \right. \\
 & \left. - \tilde{\kappa}_1 \beta_3 \xi^2 \left(\rho_f \omega^2 + \eta \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\kappa}_1} i\omega \right) \right] \\
 & \times \left(\lambda_1 A_0 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 B_0 e^{-\lambda_2 z} + \lambda_3 C_0 e^{-\lambda_3 z} \right) \Big\} d\xi,
 \end{aligned} \quad (V1)$$

شایان ذکر است که پارامترهای به کاررفته در این روابط، در شرایط بررسی شده‌ی این پژوهش، مطابق جدول (۱) با یکدیگر تطبیق می‌یابند. در جدول (۱)، معادل‌سازی پارامترهای مرجع [16] با پارامترهای مورد استفاده در این پژوهش، تحت شرایط مذکور، ارائه شده‌است. با اعمال این معادل‌سازی، روابط (۷۰ و ۷۱) که از مرجع [16] برداشت شده‌است، کاملاً مشابه روابط (۳۲، ۵۹ و ۶۴) این پژوهش خواهند بود.

جدول ۱. معادل پارامترهای مرجع [۱۶] در تحقیق حاضر تحت شرایط خاص

مورد بررسی

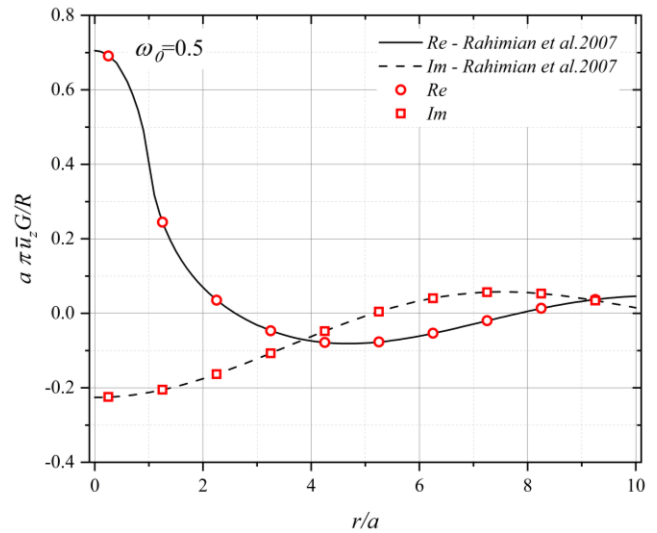
Table. 1 Equivalent Parameters from Reference [16] in the Present Study under Specific Conditions

Ref. [16]	Present study
$\beta_1 = \beta_3$	β_1
β_2	1
$\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_3$	$\tilde{\kappa}$
$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}$
$\nabla_{r\theta}^2$	∇_r^2
$\square_p^2 = \square_{s1}^2 = \square_{s2}^2$	∇_{rz}^2
$\square_1^2$	$\square_1^2$
$\square_2^2 = \square_3^2$	$\square_0^2$
$b_z, \delta_1, \delta_2, \eta$	0
A_0, B_0, C_0	A, B, C
C_{1212}	G

جدول ۲. مشخصات مصالح الاستیک همسانگرد استفاده شده در مرجع [26]

Table.2. Properties of the isotropic elastic materials used in [26]

K (N/m ²)	G (N/m ²)	ρ (Kg /m ³)	$\frac{\xi_{pole} \sqrt{G}}{\sqrt{\rho \omega}}$
33.33×10^9	20×10^9	5000	1.08766



شکل ۲. تغییر مکان قائم محیط الاستیک تک‌فاز، $\tilde{u}_z(r, z=0)$ در راستای

محور r تحت بارگذاری قائم یکنواخت روی سطح دایره‌ای به شعاع a با

فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$

Fig. 2. Vertical displacement of a single-phase elastic medium, $\tilde{u}_z(r, z=0)$, along the r -axis under uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 0.5$

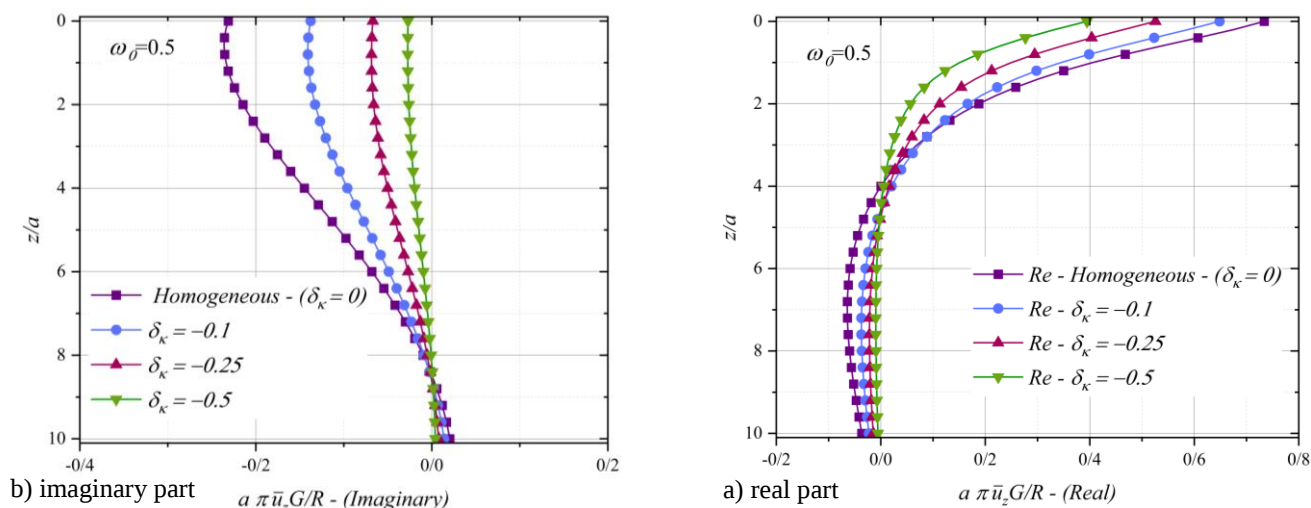
• سیال منفذی لزج است؛ بنابراین، با برابر صفر قرار دادن جملات وابسته به لزجت، معادلات دو پژوهش یکسان می‌شوند ($\eta =$ صفر).

• بارگذاری به صورت سه‌بعدی است؛ درحالی که در این پژوهش، بارگذاری به صورت متقارن محوری مدنظر قرار گرفته‌است. در همان مرجع اشاره شده‌است که پاسخ متقارن محوری نیز با شرایط خاص قابل استخراج است (با چشم‌پوشی از راستای زاویه‌ای θ).

با اعمال این مفروضات و با فرض $\delta_\kappa = 0$ در معادلات این پژوهش، معادله حاکم بر تابع پتانسیل F ، رابطه (۳۲)، با معادله (12a) در مرجع [16] متناظر بوده و ساختار ریاضی آن‌ها یکسان است. همچنین، پاسخ به‌دست آمده برای فشار منفذی سیال، p ، در این پژوهش، روابط (۵۹ و ۶۴)، با رابطه (39d) در مرجع [16] قابل مقایسه است.

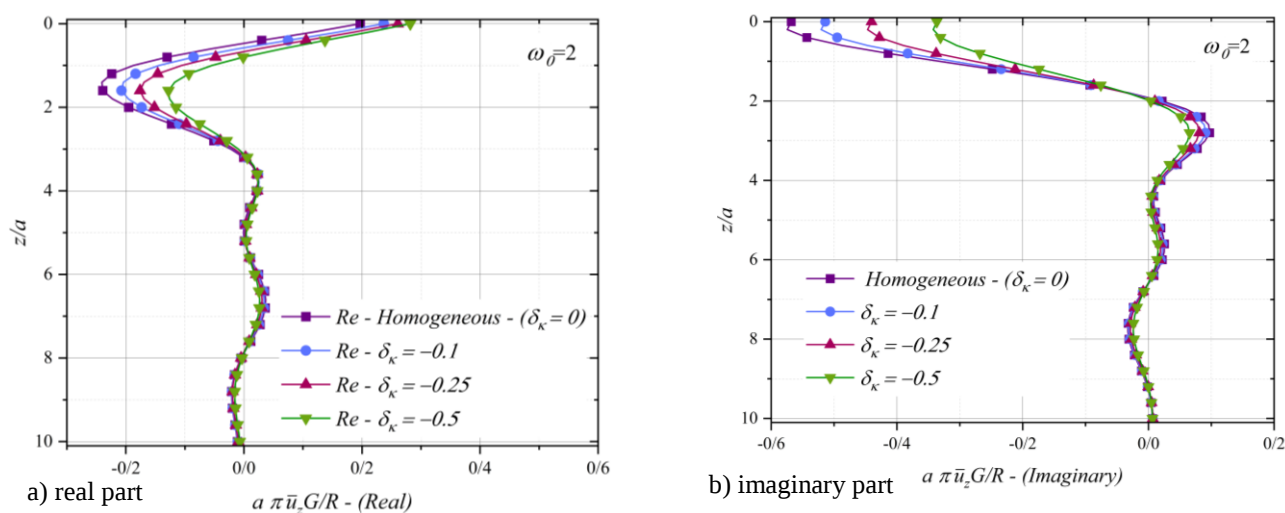
رابطه‌های ذکر شده (12a) و (39d) از مرجع مدنظر به ترتیب در روابط (۷۰ و ۷۱) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 & \beta_2 \left[\tilde{\kappa}_1 (1 + \beta_1) \square_p^2 \left(\square_1^2 \square_2^2 - \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right. \\
 & \left. + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\kappa}_1 \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\square_{s1}^2 \square_3^2 + \delta_1 \nabla_{r\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (V0)$$



شکل ۳. تغییر مکان قائم محیط متخلخل همگن و ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، $\hat{u}_z(r=0, z)$ در راستای محور z تحت بار یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$ در سه شاخص نفوذپذیری $\delta_\kappa = -0.1, -0.25, -0.5$. (الف) بخش حقیقی (ب) بخش موهومی

Fig. 3. Vertical displacement of a homogeneous and heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, $\hat{u}_z(r=0, z)$, Along the z -axis subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 0.5$ at three permeability indices $\delta_\kappa = -0.1, -0.25, -0.5$. (a) Real part (b) Imaginary part



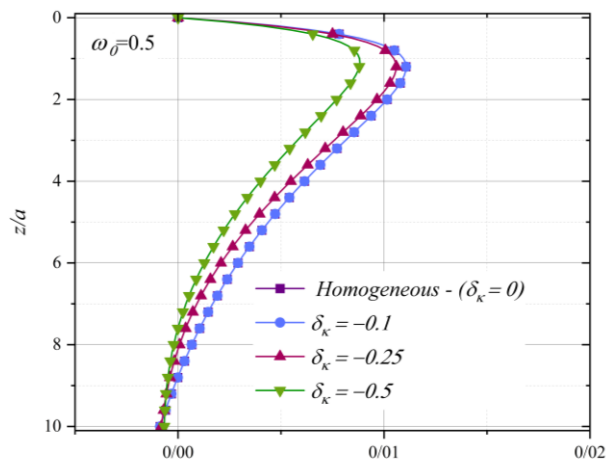
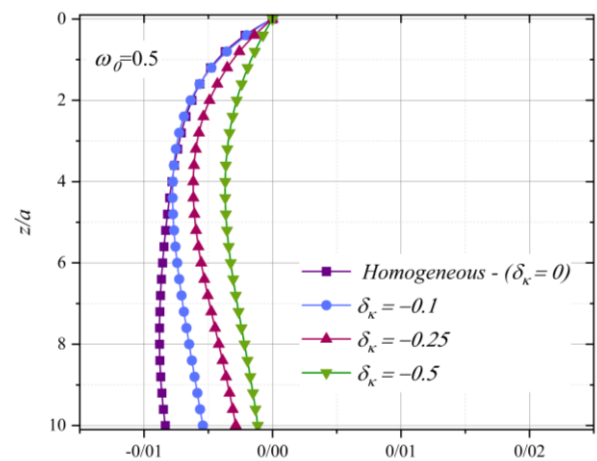
شکل ۴. تغییر مکان قائم محیط متخلخل همگن و ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، $\hat{u}_z(r=0, z)$ در راستای محور z تحت بار یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ در سه شاخص نفوذپذیری $\delta_\kappa = -0.1, -0.25, -0.5$. (الف) بخش حقیقی (ب) بخش موهومی

Fig. 4. Vertical displacement of a homogeneous and heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, $\hat{u}_z(r=0, z)$, Along the z -axis subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 2$ at three permeability indices $\delta_\kappa = -0.1, -0.25, -0.5$. (a) Real part (b) Imaginary part

حقیقی و موهومی تغییر مکان‌های قائم محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج تحت بار یکنواخت قائم موثر بر سطح دایره‌ای در شکل‌های (۳) و (۴) نشان داده شده‌است. باتوجه به شکل (۳)، در فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$ ، مشاهده می‌شود که کاهش نفوذپذیری در راستای عمق، باعث کاهش دامنه تغییر مکان قائم، هم در بخش حقیقی و هم در بخش موهومی، در اعماق مختلف نسبت به محیط همگن می‌شود.

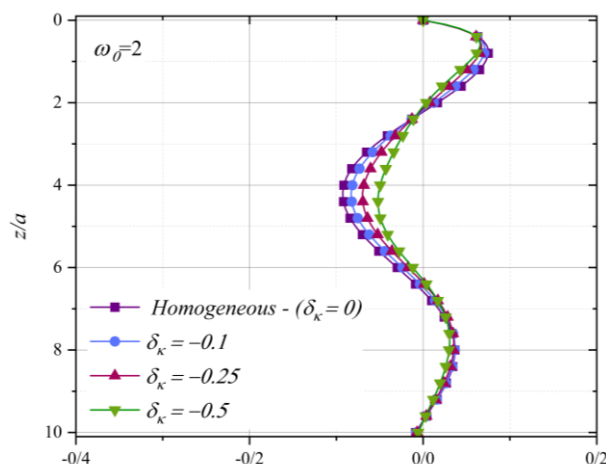
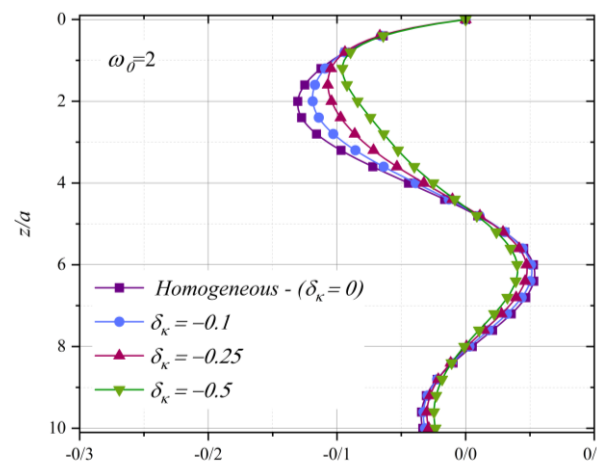
۴-۲ پاسخ محیط متخلخل اشباع ناهمگن

برای استخراج پاسخ محیط متخلخل اشباع ناهمگن، از مصالح با مشخصات مطابق جدول (۳) استفاده شده‌است [16]. با در نظر گرفتن پارامتر ناهمگنی، δ_κ برابر با $0.1, 0.25, 0.5$ و 0.5 با علامت منفی و فرکانس تحریک، ω_0 برابر با 0.5 و 2 ، پاسخ دینامیکی مسئله محاسبه شده‌است. به منظور بررسی تأثیر ناهمگنی محیط و فرکانس تحریک و اندرکنش آن‌ها بر پاسخ مسئله، بخش

a) real part $\bar{p} \pi a^2 / R - (\text{Real})$ b) imaginary part $\bar{p} \pi a^2 / R - (\text{Imaginary})$

شکل ۵. فشار سیال منفذی محیط متخلخل همگن و ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، $\hat{p}(r=0, z)$ در راستای محور z تحت بارگذاری یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$ در سه شاخص نفوذپذیری $\delta_k = -0.1, -0.25, -0.5$ (الف) بخش حقیقی (ب) بخش موهومی

Fig. 5. Pore fluid pressure in a homogeneous and heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, $\hat{p}(r=0, z)$, Along the z -axis subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 0.5$ at three permeability indices $\delta_k = -0.1, -0.25, -0.5$. (a) Real part (b) Imaginary part

a) real part $\bar{p} \pi a^2 / R - (\text{Real})$ b) imaginary part $\bar{p} \pi a^2 / R - (\text{Imaginary})$

شکل ۶. فشار سیال منفذی محیط متخلخل همگن و ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، $\hat{p}(r=0, z)$ در راستای محور z تحت بارگذاری یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ در سه شاخص نفوذپذیری $\delta_k = -0.1, -0.25, -0.5$ (الف) بخش حقیقی (ب) بخش موهومی

Fig. 6. Pore fluid pressure in a homogeneous and heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, $\hat{p}(r=0, z)$, Along the z -axis subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 2$ at three permeability indices $\delta_k = -0.1, -0.25, -0.5$. (a) Real part (b) Imaginary part

به همین ترتیب با دقت در شکل (۶)، با در نظر گرفتن $\omega_0 = 2$ ، مشاهده می‌شود که فشار سیال منفذی غیرلزج در محیط‌های همگن و ناهمگن دارای بخش حقیقی و موهومی قابل توجهی است که این مقادیر، ناشی از شتاب سیال منفذی و ناهمگنی محیط می‌باشند. فشار منفذی ناشی از بارگذاری دینامیکی روی سطح نیم‌فضای متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، در فرکانس‌های تحریک پایین، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با محیط مشابه همگن نداشته و در فرکانس‌های تحریک بالاتر، این اختلاف ملموس‌تر می‌شود.

از سوی دیگر، در شکل (۴)، تغییر مکان قائم محیط متخلخل اشباع ناهمگن، با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ در $z/a \geq 4$ تا حدودی منطبق بر تغییر مکان محیط همگن است. شکل‌های (۵) و (۶) فشار منفذی سیال را در فرکانس تحریک ω_0 برابر با 0.5 و 2 نشان می‌دهند. مطابق با شکل (۵)، در بارگذاری با فرکانس تحریک ω_0 برابر با 0.5 ، بخش حقیقی و موهومی فشار منفذی سیال محیط متخلخل همگن و ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، بسیار ناچیز است که مقدار کم آن به خاطر فرکانس تحریک 0.5 است.

وقوع بیشینه بخش حقیقی و موهومی فشار منفذی سیال، جدول (۵)، به سطح نیم‌فضا نزدیک‌تر می‌شود.

به منظور بررسی اثر سایر پارامترها مانند مدول برشی، مدول بالک و ضرایب بیه در محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، سه محیط با خواص مصالح مختلف جدول (۴) و پارامتر ناهمگنی یکسان $\delta_K = -0.25$ مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. شایان ذکر است که تنها پارامترهای مکانیکی تغییر یافته در این سه محیط در جدول (۴) وجود دارند و سایر پارامترها مطابق جدول (۳) می‌باشند. شکل‌های (۷ و ۸) پاسخ‌های به دست آمده از این سه محیط، که به ترتیب با عناوین *Medium 1* و *Medium 2* و *Medium 3* مشخص شده‌اند، در دو فرکانس تحریک ω_0 برابر با ۰/۵ و ۲ را نشان می‌دهند. مصالح معرفی شده در جدول (۴) با عنوان *Medium 1*، نمایانگر محیط اولیه هستند که تمامی ویژگی‌های آن مطابق با جدول (۳) می‌باشد. در مصالح مربوط به *Medium 2*، مقدار عددی مدول بالک، K ، مدول برشی، G ، و مدول بالک اسکلت جامد، K_s ، نسبت به *Medium 1* کاهش یافته‌است. مدول بالک توده و مدول بالک اسکلت جامد در *Medium 3* نسبت به محیط اولیه افزایش یافته و مدول برشی آن مانند *Medium 2* است.

شکل (۷) نشان می‌دهد که تحت بارگذاری با فرکانس $\omega_0 = 0.5$ ، مقادیر تغییر مکان محیط به صورت $\hat{u}_{z-medium 3} < \hat{u}_{z-medium 2} < \hat{u}_{z-medium 1}$ به دست می‌آید. لازم به ذکر که پاسخ در بخش موهومی در فرکانس تحریک ذکر شده در هر سه محیط، منطبق است.

در شکل (۸) پاسخ این محیط‌ها تحت بارگذاری با فرکانس $\omega_0 = 2$ نمایش داده شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که در این حالت، مقدار تغییر مکان محیط *Medium 2*، بیش از دو محیط دیگر است. در این فرکانس، برخلاف شکل (۷) که تحریک با $\omega_0 = 0.5$ را نشان می‌دهد، بخش موهومی تغییر مکان در محیط‌ها نیز با یکدیگر تفاوت دارد. نکته قابل توجه آن است که میزان میرایی تغییر مکان در اعماق، به ترتیب $Medium 3 > Medium 1 > Medium 2$ است.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، معادلات دینامیکی حاکم بر محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری ناهمگن باتوجه به تعریف (۱۸) و تئوری بیه و فرضیات معادلات ساده‌سازی شده این تئوری، $(u - p)$ ، استخراج

جدول ۳. مشخصات مصالح استفاده شده جهت استخراج پاسخ محیط متخلخل اشباع ناهمگن [۱۶]

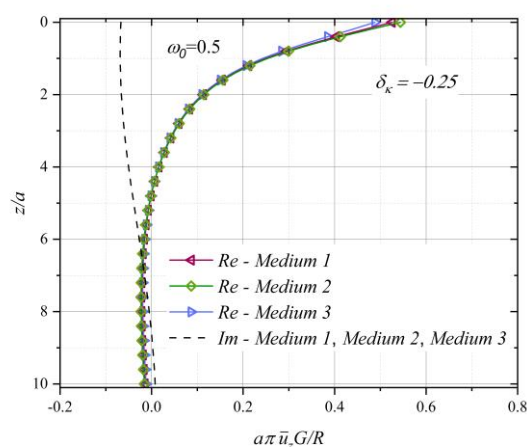
Table 3. Properties of materials used for deriving the response of a heterogeneous saturated porous medium [16]

$K(N/m^2)$	4.32×10^9
$G(N/m^2)$	3×10^9
$K_s(N/m^2)$	35×10^9
$K_f(N/m^2)$	2.25×10^9
$\rho_s(kg/m^3)$	2600
$\rho_f(kg/m^3)$	1000
ϕ	0.2
$\kappa(m^2)$	10^{-13}

جدول ۴. مشخصات مصالح مورد استفاده برای تحلیل حساسیت پاسخ محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج

Table 4. Material properties used for sensitivity analysis of the response of a heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid

	Medium 1	Medium 2	Medium 3
$K(N/m^2)$	4.32×10^9	2.5×10^9	6×10^9
$G(N/m^2)$	3×10^9	2×10^9	2×10^9
$K_s(N/m^2)$	35×10^9	20×10^9	40×10^9



شکل ۷. بخش حقیقی و موهومی تغییر مکان قائم محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزج، $\hat{u}_z(r=0, z)$ در راستای محور z تحت بار یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 0.5$ و پارامتر ناهمگنی $\delta_K = -0.25$ در سه محیط با مشخصات مصالح مطابق جدول ۴

Fig. 7. Real and imaginary parts of the vertical displacement, $\hat{u}_z(r=0, z)$, in the z -direction for a heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 0.5$ and heterogeneity parameter $\delta_K = -0.25$ for three media with material properties listed in Table. 4

باتوجه به شکل (۶) در بارگذاری مشابه با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ ، متناسب با افزایش مقدار پارامتر ناهمگنی، δ_K ، محل

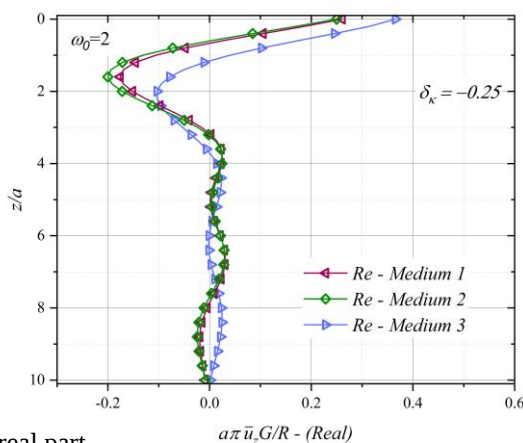
حل شد و پاسخ مسئله به شکل انتگرال‌های نیمه بی‌نهایت به دست آمد. لازم به ذکر است که باتوجه به این که مشتق تابع نمایی، از جنس خود تابع است، فرض تغییرات نمایی نفوذپذیری محیط در عمق، برای حل مسئله استفاده شد که به کمک آن، ضرایب معادله دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل، ثابت به دست آمدند.

بدین ترتیب، پاسخ دینامیکی محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزوج در سه پارامتر نفوذپذیری مختلف، δ_K ، به دست آمد. نتایج نشان می‌دهند که کاهش نفوذپذیری در عمق، موجب میرایی پاسخ و کاهش تغییر مکان اسکلت جامد می‌شود. در فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ و در اعماق $z/a \geq 4$ ، تغییر مکان قائم در محیط متخلخل اشباع همگن تا حدی با تغییر مکان قائم در محیط ناهمگن، در سه پارامتر نفوذپذیری ذکر شده، مطابقت دارد. از نتایج مهم دیگر، می‌توان به محل بیشینه فشار سیال منفذی در محیط متخلخل اشباع ناهمگن اشاره کرد که متناسب با افزایش پارامتر ناهمگنی، محل بیشینه فشار سیال منفذی به سطح نیم‌فضا نزدیک‌تر می‌شود.

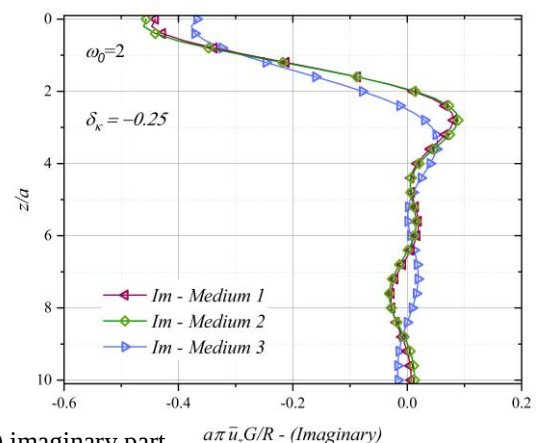
شد و روش مناسب برای حل این معادلات با معرفی تابع پتانسیل مناسب ارائه شد.

محیط موردنظر نیم‌فضای متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزوج در نظر گرفته شد که نفوذپذیری محیط در عمق متغیر بوده و نرخ تغییرات آن به صورت نمایی است. بارگذاری، به صورت یک نیروی قائم یکنواخت هارمونیک واقع بر صفحه دایره‌ای در نظر گرفته شد و پاسخ سیستم شامل تغییر مکان اسکلت جامد و فشار منفذی سیال به دست آمد.

در این تحقیق، پاسخ تحلیلی معادلات حاکم با استفاد از توابع پتانسیل به دست آمد. در این راستا، با تعریف یک تابع پتانسیل اسکالر، معادلات حاکم درگیر به یک معادله مجزای مستقل تبدیل شدند که با حل آن، مقدار تابع پتانسیل به دست آمده و باتوجه به تعریف تابع پتانسیل، مجهولات مسئله محاسبه شدند. معادله مستقل حاکم بر تابع پتانسیل، با فرض تحریک هارمونیک و به کمک تبدیل هنکل و باتوجه به شرایط مرزی مسئله، به روش تحلیلی



a) real part



b) imaginary part

شکل ۸. تغییر مکان قائم محیط متخلخل ناهمگن اشباع شده با سیال منفذی غیرلزوج، $\hat{\mathbf{u}}_z(\mathbf{r} = \mathbf{0}, z)$ در راستای محور z تحت بار یکنواخت قائم روی سطح دایره‌ای به

شعاع a با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$ و پارامتر ناهمگنی $\delta_K = -0.25$ در سه محیط با مشخصات مصالح مطابق جدول ۴. (الف) بخش حقیقی (ب) بخش موهومی

Fig. 8. Vertical displacement, $\hat{\mathbf{u}}_z(\mathbf{r} = \mathbf{0}, z)$, in the z -direction for a heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid, subjected uniform vertical loading on a circular surface with radius a at excitation frequency $\omega_0 = 2$ and heterogeneity parameter $\delta_K = -0.25$ for three media with material properties listed in Table. 4. (a) Real part (b) Imaginary part

جدول ۵. محل وقوع بیشینه فشار سیال منفذی در محیط متخلخل اشباع همگن و ناهمگن تحت بار یکنواخت قائم با فرکانس تحریک $\omega_0 = 2$

Table 5. Location of the maximum pore fluid pressure in a homogeneous and heterogeneous saturated porous medium under uniform vertical loading with non-dimensional excitation frequency $\omega_0 = 2$

δ_K	$ p_{\max} (\text{Real})$	$ p_{\max} (\text{Imaginary})$	$ p_{\max} = \sqrt{p_{\text{real}}^2 + p_{\text{imaginary}}^2}$
0	$z/a = 0.8$	$z/a = 2$	$z/a = 1.7$
- 0.1	$z/a = 0.7$	$z/a = 1.8$	$z/a = 1.2$
- 0.25	$z/a = 0.6$	$z/a = 1.5$	$z/a = 1$
- 0.5	$z/a = 0.5$	$z/a = 1.2$	$z/a = 0.8$

سهم نویسندگان

سهم هر یک از نویسندگان در مقاله حاضر، پنجاه درصد می‌باشد.

منابع مالی

در انجام این پژوهش، از منابع مالی استفاده نشده است.

قدردانی نویسندگان

نویسندگان از حمایت دانشگاه تربیت مدرس قدردانی می‌کنند.

تعارض منافع

موردی گزارش نشده است.

References

- Lamb, H.S. 1903. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London*, 72, pp. 128-130.
- Boer, R.d. 2000. Theory of Porous Media. *Encyclopedia of Continuum Mechanics*.
- Schanz, M. 2009. Poroelastodynamics: Linear Models, Analytical Solutions, and Numerical Methods. *Applied Mechanics Reviews*, 62, 030803-1-030803-15.
- Biot, M.A. 1941. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12, pp. 155-164.
- Biot, M.A. 1956. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, pp. 168-178.
- Biot, M.A. 1956. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, pp. 179-191.
- Eskandari, M. & Shodja, H.M. 2010. Green's functions of an exponentially graded transversely isotropic half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 47(11), pp. 1537-1545.
- Selvadurai, A.P.S. & Katebi, A. 2013. Mindlin's problem for an incompressible elastic half-space with an exponential variation in the linear elastic shear modulus. *International Journal of Engineering Science*, 65, pp. 9-21.
- Eskandari-Ghadi, M. & Amiri-Hezaveh, A. 2014. Wave propagations in exponentially graded transversely isotropic half-space with potential function method. *Mechanics of Materials*, 68, pp. 275-292.
- Cheshmehkani, S. & Eskandari-Ghadi, M. 2016. Dynamic response of axisymmetric transversely isotropic viscoelastic continuously nonhomogeneous half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 83, pp. 110-123.
- Paul, S. 1976. On the disturbance produced in a semi-infinite poroelastic medium by a surface load. *Pure and applied geophysics*, 114, pp. 615-627.
- Degrade, G., De Roeck, G., Van Den Broeck, P. & Vangheluwe, S. 1998. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *International Journal of Solids and Structures*, 35, pp. 4753-4778.
- Pan, E. 1999. Green's functions in layered poroelastic half-spaces. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23, pp. 1631-1653.
- Lin, C.-H., Lee, V.W. & Trifunac, M.D. 2005. The reflection of plane waves in a poroelastic half-space saturated with inviscid fluid. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25, pp. 205-223.
- Rjoub, Y.S.A. 2013. The reflection of P-waves in a poroelastic half-space saturated with viscous fluid. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 49, pp. 218-230.
- Sahebkar, K. & Eskandari-Ghadi, M. 2016. Time-harmonic response of saturated porous transversely isotropic half-space under surface tractions. *Journal of Hydrology*, 537, pp. 61-73.
- Sahebkar, K. & Eskandari-Ghadi, M. 2017. Displacement ring load Green's functions for saturated porous transversely isotropic tri-material full-space. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 41, pp. 359-381.
- Sahebkar, K. & Eskandari-Ghadi, M. 2018. Dynamic behaviour of an infinite saturated transversely isotropic porous media under fluid-phase excitation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 107, pp. 390-406.
- Teymouri, H., Eskandari-Ghadi, M., Esmalil-Falak, M. & Ghassemieh, M. 2021. Rigid disc vibration in a multi-layered transversely isotropic poroelastic half-space underlying a liquid layer. *Applied Mathematical Modelling*.
- Teymouri, H., Eskandari-Ghadi, M., Esmalil-Falak, M. & Ghassemieh, M. 2020. An Analytical Solution of Wave Motion in a Transversely Isotropic Poroelastic Half-Space Underlying a Liquid Layer. *Civil engineering infrastructures journal*.
- Zienkiewicz, O.C. 1984. Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8, pp. 71-96.

22. Biot, M.A. 1962. MECHANICS OF DEFORMATION AND ACOUSTIC PROPAGATION IN POROUS MEDIA. *Journal of Applied Physics*, 33, pp. 1482-1498.
23. Saraee, N. 2024. *Dynamic Analysis of Saturated Porous Medium with Variable Permeability in Depth* [Master Thesis, Tarbiat Modares University].
24. Sneddon, I.N. 1951. *Fourier transforms*. Mc. Grow-Hill Book Company. Inc. New-Toronto-London.
25. Poularikas, A.D. 2010. *Transforms and Applications Handbook, Third Edition*.
26. Rahimian, M., Kianoush, M.R. & Ghassemieh, M. 2007. Elastodynamic potential method for transversely isotropic solid. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(10), pp. 1134-1145.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم؟

Saraee, N., Sahebkar, K. 2026. Dynamic analysis of a heterogeneous porous medium saturated with an inviscid pore fluid and with depth-varying permeability under vertical loading, *Modares Civil Engineering journal*, 25(6), pp. 83-99.

DOI: [10.48311/mcej.2026.27626](https://doi.org/10.48311/mcej.2026.27626)

