

بهبود میدان تنش و برآورد خطا در مسائل مدرج تابعی با تحلیل ایزوژنومتریک

سیدحسین امام^۱، احمد گنجعلی^{۲*}، ابوذر میرزاخانی^۳، ناصر ظریف مقدم باصفت^۴

- ۱- دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران
- ۲- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران
- ۳- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران
- ۴- دکترای سازه، دانشکده فنی و حرفه‌ای شهید منتظری، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، مشهد، ایران

Ahmad.ganjali@iau-shahrood.ac.ir*

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

چکیده

امروزه کاربرد مواد مدرج تابعی در حال افزایش است. در این مصالح خواص مکانیکی به صورت یک تابع پیوسته در سرتاسر دامنه مسأله تغییر می‌کند. به علت این تغییرات پیوسته، مشکلات عدم چسبندگی مصالح، لایه‌لایه شدن و ایجاد تمرکز تنش در محل اتصال که در سازه‌های کامپوزیتی می‌تواند مشکل ساز باشد به وجود نمی‌آید. برای تحلیل مواد مدرج تابعی می‌توان از روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود استفاده نمود، اما به دلیل محدودیت‌هایی همچون عدم وجود یک المان مناسب برای تحلیل مسائلی با تغییرات خواص مصالح و یا عدم توانایی در مدل‌سازی دقیق مرزهای اشکال با هندسه پیچیده، در این پژوهش از روش ایزوژنومتریک استفاده شده است. همچنین از آنجا که خطا بخش جدا نشدنی در هر یک از تحلیل‌های عددی است و همواره قابلیت اطمینان به نتایج دغدغه اصلی محققان بوده است، و در حالت کلی پاسخ دقیق بسیاری از مسائل موجود نیست، یافتن راه حلی برای برآورد خطای موجود در محاسبات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین در این نوشتار برای اولین بار روش ایزوژنومتریک در تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی با رویکرد بهبود میدان تنش و برآورد خطای موجود در آن بسط داده شده است. این برآورد کننده خطا در دسته روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش قرار دارد. از مقایسه نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی برای مسائل نمونه مشاهده می‌شود که برآورد کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی برای برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژنومتریک برخوردار است. همچنین می‌توان به کمک روش برآورد کننده خطای پیشنهادی، مناطقی از دامنه حل ایزوژنومتریک را که دارای خطای زیادی است، شناسایی کرد و به بهبود محلی شبکه در آن مناطق و افزایش دقت حل ایزوژنومتریک دست یافت.

واژگان کلیدی: تحلیل ایزوژنومتریک، مصالح مدرج تابعی، برآورد خطا، بازیافت تنش.

۱- مقدمه

تقریباً هر پدیده‌ای در طبیعت اعم از علوم زیست‌شناسی، زمین‌شناسی یا مکانیکی را می‌توان با کمک قوانین فیزیک برحسب معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی که ارتباط دهنده مقادیر مختلف مورد نظر هستند، توصیف نمود. در تحلیل مدل ریاضی، با وجود اینکه استخراج معادلات حاکم برای بیشتر مسائل چندان مشکل نیست، حل آنها به وسیله روش‌های تحلیلی بس دشوار است. روش اجزای محدود یک روش عددی برای حل مسائل موجود در حوزه مهندسی و ریاضی فیزیک است. در سال‌های پس از معرفی روش اجزای محدود محققان بسیاری در سراسر جهان روی توسعه این روش مطالعه نموده‌اند. اما با بررسی دقیق می‌توان اشکالات و نقاط ضعفی برای آن برشمرد که ناشی از فلسفه برخورد این روش با معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می‌باشد. به عنوان نمونه چگونگی شبکه‌بندی نوع المان مورد استفاده و تعداد المان‌ها، از پارامترهای موثر بر جواب نهایی مساله است [1]. برای بالا بردن دقت در مدل‌سازی هندسه جسم بایستی از تعداد بیشتری المان و یا المان‌های با مرتبه بالاتر و یا ترکیبی از این دو روش استفاده نمود که در تمام حالات سبب افزایش زمان تولید شبکه المان‌ها، زمان حل دستگاه معادلات حاکم بر مساله و حافظه مورد نیاز رایانه خواهد شد. در حالت کلی با پیچیده‌تر شدن مسئله مورد بررسی به ویژه در مسائلی که ویژگی مصالح مانند مواد مدرج تابعی در حال تغییر می‌باشد کلیه موارد فوق به شکل موثرتری آثار منفی خود را نشان می‌دهد. در این پژوهش از تحلیل ایزوژئومتری در حل مسائل با مصالح مدرج تابعی استفاده می‌کنیم. مفاهیم تحلیل این روش در سال ۲۰۰۵ اولین بار توسط هیوز و همکارانش با نام روش ایزوژئومتریک معرفی شد [1]. بعدها افرادی چون کوتزل و همکاران در سال ۲۰۰۷ اثر توابع پایه را بر دقت حل مسائل در روش ایزوژئومتریک بررسی نمودند [2]. در سال ۲۰۱۰ وانگ و همکاران روشی را برای اعمال شرایط مرزی در آنالیز ایزوژئومتریک مطالعه نمودند [3] و در سال ۲۰۱۷ هرما و همکاران با حل نمونه‌هایی، چهارچوبی را برای بهینه‌سازی طراحی پارامتریک با استفاده از تجزیه تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل پیچیده هندسی ارائه نمودند [4]. روش ایزوژئومتریک مبتنی بر درک هندسی از مسئله با استفاده از

اسپلاین‌ها و از فن‌آوری‌های طراحی به کمک رایانه است. دلیل آنکه روش‌های طراحی به کمک رایانه تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است به اختلاف زمانی پیدایش این دو نسبت به یکدیگر است. آغاز پیدایش روش اجزای محدود در سال ۱۹۵۶ میلادی بوده است، در حالی که روش‌های طراحی به کمک رایانه حدود سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ شکل گرفته‌اند [1]. روش ایزوژئومتریک علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، برخی از معایب آن را نیز مرتفع نموده است. در واقع، مدل‌سازی دقیق شکل مسئله در مقایسه با روش اجزای محدود، مدل‌سازی دقیق شرایط تکیه‌گاهی در مقایسه با روش اجزای محدود که شرایط تکیه‌گاهی فقط در محل گرہ‌ها قابل اعمال است، عدم نیاز به تولید شبکه، کاهش چشم‌گیر ابعاد دستگاه معادلات و مدل‌سازی تابع توزیع مصالح در کل دامنه مسئله از مواردی است که در سال ۲۰۰۹ کوتزل، هیوز و همکاران در کتابی با عنوان تحلیل ایزوژئومتریک با ادغام کد و اجزای محدود به آن اشاره نمودند [5].

از آنجا که خطا، بخش جدا نشدنی در هر یک از تحلیل‌های عددی است و روش تحلیل ایزوژئومتریک نیز از این قائده جدا نیست و همواره پژوهشگران را در قابلیت اعتماد به نتیجه‌ها نگران می‌کند. در حالت کلی، روش‌های برآورد خطا در دو دسته روش‌های بازیافت تنش و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [6, 7]. در این مقاله یک روش هندسی برای بازیافت تنش در راستای روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی ارائه شده و در ادامه با حل چند نمونه عددی کارایی روش پیشنهادی با برآورد خطای انجام شده ارزیابی یافته است.

۲- معرفی مواد مدرج تابعی

استفاده از مصالح مدرج تابعی در سال ۱۹۸۴ توسط گروهی از دانشمندان در دانشگاه سندائی ژاپن مطرح شد [8]. ایده استفاده از این مصالح در ابتدا برای تحمل گرادیان‌های حرارتی در المان‌های مکانیکی مطرح شد، اما در ادامه کاربردهای بسیار متنوعی از جمله استفاده در کلیه قطعات مکانیکی و سازه‌ای که تحت گرادیان‌های شدید حرارتی و محیط‌های خورنده و غیره قرار می‌گیرند، برای آنها معرفی شد. در حال حاضر با توجه به

۳- معرفی توابع شکل بی اسپیلاین برای تولید منحنی‌ها و سطوح

بی اسپیلاین‌ها روشی برای توصیف منحنی‌ها و سطوح به روش پارامتری هستند که در یک یا چند ناحیه تعریف می‌شوند. برخلاف منحنی‌های بزیرو، تغییرات در منحنی‌های بی اسپیلاین موضعی است و در اثر تغییر یک فاکتور، مانند گره یا نقطه کنترلی، فقط نواحی تحت اثر آن فاکتور تغییر کرده و بقیه قسمت‌های منحنی بدون تغییر باقی می‌مانند. یک تابع منحنی بی اسپیلاین یک چند جمله‌ای چند تکه ای است که با رابطه (۱) بیان می‌شود [13, 14].

$$C(r) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(r)p_i \quad a \leq r \leq b \quad (1)$$

برای درک این رابطه به توضیح مفاهیم زیر می‌پردازیم.

درجه منحنی. p درجه منحنی پایه در جهت r و $i = 0, \dots, n$ است. p_i چند ضلعی کنترل است که با نقاط کنترل (x_i, y_i, z_i) مشخص می‌شود. مختصات نقاط کنترلی از تکنیک معکوس توابع پایه قابل محاسبه است [13, 14].

بردارگرهی. بردار گره یک بعدی، $r = \{r_0, r_1, r_2, \dots, r_n\}$ را در نظر بگیرید. این بردار شامل مجموعه ای از اعداد حقیقی است که هر یک از این اعداد مقادیر گرهی نامیده می‌شوند و رابطه: $r_i \leq r_{i+1}$ و $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ را یک دهانه گرهی است. لازم به ذکر است بازه $[r_i, r_{i+1})$ را یک دهانه گرهی می‌نامند که می‌تواند طول آن صفر باشد، زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نیستند. اگر فاصله بین گره‌ها مساوی باشد، در این حالت بردار گره را یکنواخت می‌نامیم و در غیر این صورت، این بردار غیر یکنواخت خواهد بود [13, 14].

توابع پایه بی اسپیلاین. i امین تابع پایه اسپیلاین با درجه p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(r)$ نشان داده که روی بردار گرهی مطابق رابطه (۲) با فرض $a = 0$ و $b = 1$ تعریف و به صورت رابطه (۳) نشان داده می‌شود [13, 14].

$$r = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{r_{p+1}, \dots, r_{n-p-1}}_{p+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

$$N_{i,0}(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r_i \leq N \leq r_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

پیشرفت‌های فراوان در توصیف، مدل‌سازی و تجزیه تحلیل این مواد، می‌توان هنگام مقالات مروری نائب و شیروانی مقدم در سال ۲۰۱۶ [9] و وانگ و همکاران در سال ۲۰۱۸ [10]، زمینه‌هایی که برای توسعه و طراحی این مواد نظر محققین را به خود جلب نموده است نام برد.

مصالص مدرج تابعی که گاه از آنها به عنوان مصالح ناهمگن یاد می‌شود، موادی ریز ساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند، این تغییرات به وسیله تغییر تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده‌ی آنها ایجاد می‌شود و قابل توجه است که به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی مشکلات عدم چسبندگی مصالح، لایه‌لایه شدن و ایجاد تمرکز تنش در محل اتصال مصالح که در سازه‌های کامپوزیتی موجود است در مواد تابعی به وجود نمی‌آید [8]. تغییرات توزیع مصالح در حجم ماده سبب می‌شود تا مدول الاستیسیته در کل دامنه تغییر نماید. این تغییرات می‌تواند به صورت خطی، نمایی، لگاریتمی و غیره باشد [11] که به چگونگی فرآیند تولید این مصالح که موضوع بحث این مقاله نیست وابسته است. در خصوص چگونگی تحلیل این مسائل می‌توان از روش اجزای محدود استفاده کرد اما به دلیل محدودیت‌های این روش با مشکلات زیادی مواجه خواهیم شد، از جمله عدم وجود یک المان مناسب برای تحلیل این مسائل که بتواند تغییرات خواص مصالح را در خود جای دهد، یا استفاده از المانی که مشخصات خواص مصالح به صورت میانگین و یکنواخت در سطح المان توزیع شود، که ماهیتاً باعث ایجاد خطا و تقریب در محاسبات خواهد شد لذا فقط برای برخی حالات ساده و خاص تعدادی مسئله با مصالح مدرج تابعی به صورت تحلیلی که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد حل شده است. در این پژوهش برای حل مسائل با مصالح مدرج تابعی از تحلیل ایزوژئومتری که یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل است، استفاده شده که اولین بار توسط حسنی و همکاران در سال ۲۰۰۹ معرفی شده است [12].

شکل ۱. شبکه نقاط کنترلی و سطح بی اسپیلین مربوط به آن با توابع پایه درجه چهار [14].

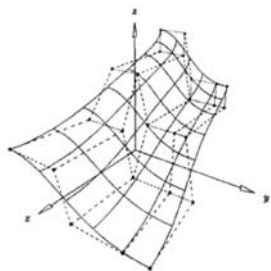


Fig.1. Control points network and its corresponding bispline surface with quadratic basis functions[14].

۴- فرمول بندی روش ایزوژئومتریک در مسائل با مصالح مدرج تابعی

در این بخش ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم در مسائل تنش/کرنش مسطح در تئوری الاستیسیته بیان می شود، سپس مراحل دستیابی به فرمول بندی روش ایزوژئومتریک در حل مسائل با مصالح مدرج تابعی ارائه می شود. معادله دیفرانسیل (۷) به طور همزمان برای مسائل تنش/کرنش مسطح در تئوری الاستیسیته حاکم می باشد [15].

$$\begin{aligned} \Pi = (u(x, y), v(x, y)) = \frac{1}{2} h_e \phi_{\Omega_e} \left[C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dx dy + h_e \phi_{\Omega_e} [u f_x + v f_y - \rho(u \ddot{u} + v \ddot{v})] dx dy + h_e \phi_{\Gamma_e} (u t_x + v t_y) d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه (۷) دو مجهول u و v وجود دارد که آنها را بر حسب توابع پایه بی اسپیلان بسط می دهیم. در اینجا مختصات x و y هر نقطه در دامنه مسئله یک رویه در جهت u و یک رویه در جهت v تولید می کند [12].

$$X(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) X_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) X_{i,j} \quad (8)$$

$$Y(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) Y_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) Y_{i,j} \quad (9)$$

$$U(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) U_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) U_{i,j} \quad (10)$$

$$V(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) V_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r, s) V_{i,j} \quad (11)$$

با توجه به روابط فوق برخی از خواص پارامترهای موجود عبارتند از:

- $N_{i,0}(r)$ یک تابع پله ای بوده و به جز در بازه $r \in [r_i, r_{i+1})$ مقدار آن در سایر نقاط صفر است.
- برای $p > 0$ ، آنگاه $N_{i,0}(r)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p - 1$ می باشد.
- برای محاسبه کلیه توابع پایه، به بردار گره و درجه توابع شکل نیاز داریم.
- اگر p درجه توابع پایه، $c + 1$ شماره نقاط کنترلی و $n + 1$ شماره گره ها باشد، آنگاه می توان رابطه $n = c + p + 1$ را نوشت.

برای تولید سطوح بی اسپیلین از رابطه (۴) استفاده می کنیم [13,14].

$$S(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) P_{i,j} \quad (4)$$

که در آن:

$P_{i,j}$ شبکه نقاط کنترلی است که در جهت r از درجه p و در جهت s از درجه q است.

$N_{i,p}(r)$ و $N_{j,q}(s)$ توابع پایه بی اسپیلین می باشند که در جهت r روی بردار گره رابطه (۵) و در جهت s روی بردار گره رابطه (۶) تعریف می شوند.

$$r = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, r_{p+1}, \dots, r_{n-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (5)$$

$$s = \left\{ \underbrace{e, \dots, e}_{q+1}, s_{p+1}, \dots, s_{m-p-1}, \underbrace{f, \dots, f}_{q+1} \right\} \quad (6)$$

- $c + 1$ شماره نقاط کنترلی در جهت r و $d + 1$ شماره نقاط کنترلی در جهت s است.

- روابط $n = c + p + 1$ و $m = d + q + 1$ به ترتیب برای جهت r و s برقرار است.

در روش ایزوژئومتریک از رابطه (۴) می توان هر گونه سطح و رویه ی پیچیده ای را مدل نمود. شکل (۱) شبکه نقاط کنترلی و سطح بی اسپیلان حاصل از آن را با توابع پایه درجه چهار در دو جهت x و y نشان می دهد.

$$\begin{aligned}
& \left(-\phi_{xs} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} V_{i,j} + \right. \\
& \left. \phi_{xr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} V_{i,j} \right) + \\
& \bar{C}_{22}(r,s) \left(-\phi_{xs} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} V_{i,j} + \right. \\
& \left. \phi_{xr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} V_{i,j} \right)^2 + \\
& \bar{C}_{66} \left(\left(-\phi_{xs} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} U_{i,j} + \right. \right. \\
& \left. \left. \phi_{xr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} U_{i,j} \right)^2 + \right. \\
& \left. 2 \left(-\phi_{xs} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} U_{i,j} + \right. \right. \\
& \left. \left. \phi_{xr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} U_{i,j} \right) \times \right. \\
& \left(\phi_{ys} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} V_{i,j} - \right. \\
& \left. \phi_{yr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} V_{i,j} \right) + \\
& \left(\phi_{ys} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} V_{i,j} - \right. \\
& \left. \left. \phi_{yr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} V_{i,j} \right)^2 \right) \bar{J} dr ds + \\
& h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij}^{p,q}(r,s) U_{i,j} \right) \bar{f}_x(r,s) + \right. \\
& \left. \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij}^{p,q}(r,s) V_{i,j} \right) \bar{f}_y(r,s) - \rho(u\ddot{u} - \right. \\
& \left. v\ddot{v}) \right] \bar{J} dr ds + h_e \oint_{\Gamma_e} (u t_x + v t_y) d\Gamma
\end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) نیاز به داشتن مشتقات تابع Π نسبت به u و v داریم، با انجام نماد سازی زیر مطابق روابط (۲۷ و ۲۸) به روابط (۲۹ و ۳۰) می‌رسیم [12].

$$\chi_{ij}^{(1)} = \phi_{ys} \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} - \phi_{yr} \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \quad (27)$$

$$\chi_{ij}^{(2)} = -\phi_{xs} \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} + \phi_{xr} \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi(U_{ij}, V_{ij})}{\partial U_{ij}} &= h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\bar{C}_{11} \chi_{\alpha}^{(1)} \chi_{\beta}^{(1)} + \right. \\
& \bar{C}_{66} \chi_{\alpha}^{(2)} \chi_{\beta}^{(2)}) U_{ij} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\bar{C}_{12} \chi_{\alpha}^{(1)} \chi_{\beta}^{(2)} + \\
& \bar{C}_{66} \chi_{\alpha}^{(2)} \chi_{\beta}^{(1)}) V_{ij} \bar{J} dr ds + \\
& h_e \int_0^1 \int_0^1 (\partial R_{ij}^{p,q}(r,s) \bar{f}_x) \bar{J} dr ds
\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi(U_{ij}, V_{ij})}{\partial V_{ij}} &= h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\bar{C}_{12} \chi_{\alpha}^{(2)} \chi_{\beta}^{(1)} + \right. \\
& \bar{C}_{66} \chi_{\alpha}^{(1)} \chi_{\beta}^{(2)}) U_{ij} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\bar{C}_{22} \chi_{\alpha}^{(2)} \chi_{\beta}^{(2)} + \\
& \bar{C}_{66} \chi_{\alpha}^{(1)} \chi_{\beta}^{(1)}) V_{ij} \bar{J} dr ds + \\
& h_e \int_0^1 \int_0^1 (\partial R_{ij}^{p,q}(r,s) \bar{f}_y) \bar{J} dr ds
\end{aligned} \quad (30)$$

برای تعریف مشخصات مصالح بر اساس توابع پایه بی اسپیلاین مطابق زیر آنها را گسترش می‌دهیم.

$$\bar{E}_1(r,s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) E_{i,j}^1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) E_{i,j}^1 \quad (12)$$

$$\bar{E}_2(r,s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) E_{i,j}^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) E_{i,j}^2 \quad (13)$$

$$\bar{v}_{12}(r,s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) v_{i,j}^{12} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) v_{i,j}^{12} \quad (14)$$

$$\bar{v}_{21}(r,s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) v_{i,j}^{21} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) v_{i,j}^{21} \quad (15)$$

$$\bar{C}_{11}(r,s) = \frac{\bar{E}_1(r,s)}{1 - \bar{v}_{12}(r,s) \bar{v}_{21}(r,s)} \quad (16)$$

$$\bar{C}_{22}(r,s) = \frac{\bar{E}_2(r,s)}{1 - \bar{v}_{12}(r,s) \bar{v}_{21}(r,s)} \quad (17)$$

$$\bar{C}_{12}(r,s) = \bar{v}_{21}(r,s) \bar{C}_{11}(r,s) = \bar{v}_{12}(r,s) \bar{C}_{22}(r,s) \quad (18)$$

$$\bar{C}_{66}(r,s) = \frac{0.5 \bar{E}_1(r,s)}{1 + \bar{v}_{12}(r,s)} \quad (19)$$

لازم به ذکر است برای نگاشت از فضای X و Y در رابطه (۷) به Γ و S در فضای بی اسپیلاین نیاز به محاسبه ژاکوبین به شکل زیر خواهیم داشت.

$$dx dy = \bar{J} dr ds \quad (20)$$

$$\bar{J} = \bar{J}(r,s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(r,s)}{\partial r} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial X(r,s)}{\partial s} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xr} & J_{yr} \\ J_{xs} & J_{ys} \end{vmatrix} = J_{xr} J_{ys} - J_{yr} J_{xs} \quad (21)$$

با انجام یک نماد سازی مطابق زیر از رابطه (۷) به رابطه (۲۶) خواهیم رسید.

$$\phi_{xr} = \phi_{xr}(r,s) = \frac{J_{xr}}{\bar{J}} \quad (22)$$

$$\phi_{xs} = \phi_{xs}(r,s) = \frac{J_{xs}}{\bar{J}} \quad (23)$$

$$\phi_{yr} = \phi_{yr}(r,s) = \frac{J_{yr}}{\bar{J}} \quad (24)$$

$$\phi_{ys} = \phi_{ys}(r,s) = \frac{J_{ys}}{\bar{J}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\Pi(r,s) &= \\
& \frac{1}{2} h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\bar{C}_{11}(r,s) \left(\phi_{ys} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} U_{i,j} - \right. \right. \\
& \left. \left. \phi_{yr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} U_{i,j} \right)^2 + \right. \\
& 2 \bar{C}_{12}(r,s) \left(\phi_{ys} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial r} U_{i,j} - \right. \\
& \left. \left. \phi_{yr} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{ij}^{p,q}(r,s)}{\partial s} U_{i,j} \right) \times \right.
\end{aligned}$$

می‌تواند بسیار ارزشمند باشد. در سال ۱۹۹۲ زینکوویچ و زو به کمک روش اجزای محدود روشی را بر پایه نقاط فراهمگرا (Superconvergent patch recovery) SPR برای بازیافت تنش و برآورد خطا ابداع نمودند که در آن تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی در نقاط فراهمگرا از دقت بیشتری برخوردار است [17]. در سال ۲۰۱۲ حسنی و همکاران به کمک روشی مبتنی بر نقاط فراهمگرا به برآورد خطا در مسائل همگن با تحلیل ایزوژئومتریکی پرداختند [18]. در این روش میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود [18]. این سطح فرضی از توابع شکل بی اسپیلاینی که در روش ایزوژئومتریکی برای محاسبه توابع جابه‌جایی استفاده شده‌اند، به دست می‌آید. یک سطح بی اسپیلاین زمانی ایجاد می‌شود که مختصات x, y و z نقاط کنترلی آن مشخص باشد. با تعریف مختصات x و y هر نقطه کنترلی برای مدل‌سازی شکل هندسی تنها مولفه مجهول برای تعیین سطح بهبود یافته تنش، مولفه z نقاط کنترلی است. محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به شکلی است که سطح تنش جدید به دست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریکی حاصل شده به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود. برای این کار از کمینه کردن فاصله بین تنش بهبود یافته و سطح تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتریکی در نقاط گوسی با کاربرد روش کمترین مجموع مربعات، استفاده می‌کنیم. سطح تنش بهبود یافته برگرفته از ویژگی نقاط گوسی است که در آن‌ها تنش حاصل از تحلیل تقریبی نسبت به دیگر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی شیب یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل وابسته به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل این نقاط را فراهمگرا می‌نامند که نخستین بار توسط بارلو در سال ۲۰۰۵ مطرح شد [19]. در اینجا برای اولین بار از این روش در تحلیل مسائل مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریکی استفاده می‌شود.

با حل دستگاه معادلات (۳۱) می‌توان مختصات ارتفاع نقاط کنترلی را برای تولید رویه جواب‌های مسئله محاسبه نمود.

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta}^{(1)u} & K_{\alpha\beta}^{(1)v} \\ K_{\alpha\beta}^{(2)u} & K_{\alpha\beta}^{(2)v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_\alpha \\ \vdots \\ V_0 \\ \vdots \\ V_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0^u \\ \vdots \\ F_\alpha^u \\ \vdots \\ F_0^v \\ \vdots \\ F_\beta^v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_0^u \\ \vdots \\ Q_\alpha^u \\ \vdots \\ Q_0^v \\ \vdots \\ Q_\beta^v \end{Bmatrix} \quad (31)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \alpha = 0, 1, \dots, (n+1)(m+1) - 1 \\ \beta = 0, 1, \dots, (n+1)(m+1) - 1 \end{cases}$$

در رابطه (۳۱)، $[K]$ ماتریس ضرایب، $[U]$ بردار تغییر مکان‌ها و $[F]$ ، $[Q]$ بردار نیروها است و به صورت زیر تعریف می‌شوند [12].

$$K_{\alpha\beta}^{(1)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 (\bar{C}_{11} \chi_\alpha^{(1)} \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66} \chi_\alpha^{(2)} \chi_\beta^{(2)}) \bar{J} dr ds \quad (32)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(1)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 (\bar{C}_{12} \chi_\alpha^{(1)} \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66} \chi_\alpha^{(2)} \chi_\beta^{(1)}) \bar{J} dr ds \quad (33)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 (\bar{C}_{12} \chi_\alpha^{(2)} \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66} \chi_\alpha^{(1)} \chi_\beta^{(2)}) \bar{J} dr ds \quad (34)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 (\bar{C}_{22} \chi_\alpha^{(2)} \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66} \chi_\alpha^{(1)} \chi_\beta^{(1)}) \bar{J} dr ds \quad (35)$$

$$F_\alpha^u = h_e \int_0^1 \int_0^1 (R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_x) \bar{J} dr ds \quad (36)$$

$$F_\beta^v = h_e \int_0^1 \int_0^1 (R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_y) \bar{J} dr ds \quad (37)$$

نمادهای استفاده شده در روابط (۳۲) الی (۳۷) مطابق با آنچه توضیح داده شده می‌باشد.

برای حل انتگرال عددی رابطه (۳۱) با استفاده از نقاط گوس [14]، نیاز به محاسبه ژاکوبین دوم به صورت زیر داریم.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\det J = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right| \quad (39)$$

۵- محاسبه تنش بهبود یافته در مسائل با مصالح

مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریکی

همان‌گونه که عنوان شد خطا بخشی ناگزیر در هر یک از انواع تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود، پس یافتن راه حلی مناسب برای به دست آوردن نتایجی نزدیک‌تر به حل دقیق در مسائل

$$2\bar{\epsilon}_{ij}^{xy}(r,s) = \frac{\partial(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ip}(r)N_{jq}(s)U_{ij})}{\partial y} + \frac{\partial(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ip}(r)N_{jq}(s)V_{ij})}{\partial y} \quad (46)$$

همچنین ماتریس خواص مصالح بر اساس توابع پایه بی اسپیلاین مطابق روابط (۱۲) الی (۱۹) تعریف می گردد.

با مشتق گیری از تابع $\mathbf{G(P)}$ نسبت به مولفه سوم نقاط کنترلی و برابر صفر قرار دادن آن، مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته برای هر یک از مولفه های تنش به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} P_{xi-p,j-q}(r,s) \\ P_{xi-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xi-p,j}(r,s) \\ P_{xi-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xi,j}(r,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^{-1} * [(\bar{C}_{11}(r,s) * \bar{\epsilon}_{xx}(r,s) + \bar{C}_{12}(r,s) * \bar{\epsilon}_{yy}(r,s))] \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} P_{yi-p,j-q}(r,s) \\ P_{yi-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{yi-p,j}(r,s) \\ P_{yi-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{yi,j}(r,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^{-1} * [(\bar{C}_{21}(r,s) * \bar{\epsilon}_{xx}(r,s) + \bar{C}_{22}(r,s) * \bar{\epsilon}_{yy}(r,s))] \quad (48)$$

اگر سطح تنش بهینه هر یک از مولفه های بردار تنش با σ^* نشان داد شود، با توجه به توابع شکل بی اسپیلاین می توان این سطح را داخل هر ناحیه به صورت رابطه (۴۰) الی (۴۲) بیان کرد.

$$\sigma_x^* = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} P_{xi-p,j-q}(r,s) \\ P_{xi-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xi-p,j}(r,s) \\ P_{xi-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xi,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\sigma_y^* = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} P_{yi-p,j-q}(r,s) \\ P_{yi-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{yi-p,j}(r,s) \\ P_{yi-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{yi,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\sigma_{xy}^* = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} P_{xyi-p,j-q}(r,s) \\ P_{xyi-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xyi-p,j}(r,s) \\ P_{xyi-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xyi,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (42)$$

که در آن i و j شمارنده نقاط کنترلی در جهت X و Y ، S سطح بی اسپیلاین مطابق رابطه (۴) و P مختصات نقاط کنترلی وابسته به صفحه تنش بهبود یافته می باشد. همان طور که مشاهده می شود تنها عامل مجهول جهت محاسبه سطح تنش بهبود یافته، مختصات سوم نقاط کنترلی، جهت محاسبه هر یک از مقادیر تنش است. برای تعیین این مقادیر همانگونه که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد تابع $\mathbf{G(P)}$ به صورت رابطه (۴۳) بیان می شود.

$$\mathbf{G(P)} = \left(\sigma^* - \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}(r,s) & \bar{C}_{12}(r,s) & 0 \\ \bar{C}_{21}(r,s) & \bar{C}_{22}(r,s) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66}(r,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx}(r,s) \\ \bar{\epsilon}_{yy}(r,s) \\ 2\bar{\epsilon}_{xy}(r,s) \end{bmatrix} \right)^2 \quad (43)$$

در رابطه (۴۳) داریم:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{xx}(r,s) = \frac{\partial(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ip}(r)N_{jq}(s)U_{ij})}{\partial x} \quad (44)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{yy}(r,s) = \frac{\partial(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{ip}(r)N_{jq}(s)V_{ij})}{\partial y} \quad (45)$$

$$Lu + b = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (52)$$

نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط زیر بیان می‌شود [19].

$$\|e_{\text{exa}}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma_{\text{exa}} - \sigma_{\text{iso}})^T D^{-1} (\sigma_{\text{exa}} - \sigma_{\text{iso}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

$$\|e_{\text{app}}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma_{\text{iso}} - \sigma_{\text{rec}})^T D^{-1} (\sigma_{\text{iso}} - \sigma_{\text{rec}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

در این روابط، تنش دقیق (σ_{exa}) با داشتن حل دقیق مسئله محاسبه می‌شود، در خصوص محاسبه تنش ایزوژئومتریکی (σ_{iso})، تنش بهبود یافته (σ_{rec}) و ماتریس خواص مصالح (D) توضیحات لازم در قسمت‌های قبل داده شد.

۷- حل مثال عددی

در این قسمت با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم افزار Compaq Visul Fortran V6.6، رفتار مصالح مدرج تابعی با تحلیل ایزوژئومتریکی طی دو نمونه با راه حل‌های تحلیلی موجود [20, 21] و راه حل‌هایی که در این مقاله به آن‌ها اشاره شد مورد بحث و مقایسه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است در مسائلی که حل دقیق آن موجود است علاوه بر معیار خطای تقریبی می‌توان معیار خطای دقیق را نیز بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی، بیانگر همگرایی روش پیشنهادی به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا است و هر چه به عدد یک نزدیکتر باشد نشان دهنده کارایی بهتر محاسبه‌گر خطا است، به این نسبت، شاخص تأثیر گفته می‌شود که در مثال‌های زیر به آن خواهیم پرداخت. برای نمایش بهتر از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [22] از توابع شکل بی اسپیلاین مرتبه دو بهره گرفته و از نه نقطه گوسی برای انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش استفاده می‌شود. همان‌گونه که در شکل (۲) نشان داده شده است، یک صفحه با مصالح مدرج تابعی مد نظر است که در آن مدول الاستیسیته در راستای محور X ها از مقدار $E_0 = E(0) = 1.0$ تا $E(W) = 8.0$

$$\begin{bmatrix} P_{xy \, i-p, j-q}(r, s) \\ P_{xy \, i-p, j-q-1}(r, s) \\ \vdots \\ P_{xy \, i-p, j}(r, s) \\ P_{xy \, i-p-1, j}(r, s) \\ \vdots \\ P_{xy \, i, j}(r, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i-p, j-q}(r, s) \\ S_{i-p, j-q-1}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i-p, j}(r, s) \\ S_{i-p-1, j}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i, j}(r, s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p, j-q}(r, s) \\ S_{i-p, j-q-1}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i-p, j}(r, s) \\ S_{i-p-1, j}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i, j}(r, s) \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} S_{i-p, j-q}(r, s) \\ S_{i-p, j-q-1}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i-p, j}(r, s) \\ S_{i-p-1, j}(r, s) \\ \vdots \\ S_{i, j}(r, s) \end{bmatrix} * [(\bar{C}_{66}(r, s) * \bar{E}_{xy}(r, s))] \quad (49)$$

در ادامه نشان داده می‌شود که این میدان مولفه تنش نسبت به سطح تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریکی دقیق‌تر است و می‌تواند به عنوان یک برآورد کننده خطا برای تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی به کار رود. با محاسبه معیار خطای انرژی برای دو نمونه عددی که حل دقیق آنها موجود است، کارایی این روش بررسی می‌شود.

۶- معیار بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به یکی از روش‌های عددی بدست آمده است. بنابراین خطای حل تنش دقیق به صورت زیر بدست می‌آید.

$$e_{\text{exa}} = \sigma_{\text{exa}} - \sigma_{\text{iso}} \quad (50)$$

اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش که به آن اشاره شد به دست می‌آید. بنابراین خطای تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$e_{\text{app}} = \sigma_{\text{iso}} - \sigma_{\text{rec}} \quad (51)$$

رابطه اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است [19]. اگر معادله دیفرانسیل یک مسائل الاستیسیته را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$E(x) = E^0 + \gamma x \quad (57)$$

پارامتر مستقل γ از رابطه (۵۸) محاسبه می‌شود [19,20].

$$\gamma = \frac{E(W) - E(0)}{W} \quad (58)$$

در رابطه (۵۸)، W عرض ورق است.

شکل (۵) دقت مدل‌سازی مدول الاستیسیته مصالح مدرج تابعی را در تغییرات خطی به روش ایزوژئومتریک نشان می‌دهد.

شکل ۵. مدل‌سازی تغییرات خطی مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک برای حالت تغییرات خطی مصالح.

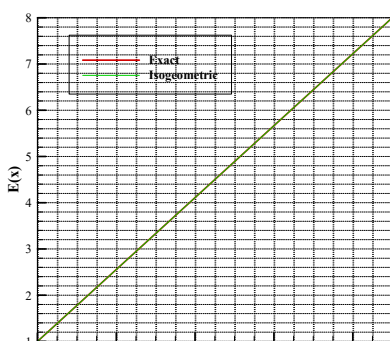


Fig.5. Modeling linear changes of functionally graded materials by isogeometric method for the state of linear changes of materials.

شکل (۶) مقایسه‌ای بین تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک و بهبود یافته با حل دقیق است. تنش حاصل از حل بهبود یافته نتایج نزدیکتری به تنش دقیق نشان می‌دهد، پرش‌های ایجاد شده در این نمودار به حداقل رسیده و تنش یکنواخت‌تری را نشان می‌دهد که حاکی از کارایی روش پیشنهادی دارد.

شکل ۶. مقایسه تنش به دست آمده از حل دقیق، ایزوژئومتریک و بهبود یافته برای حالت تغییرات خطی مصالح.

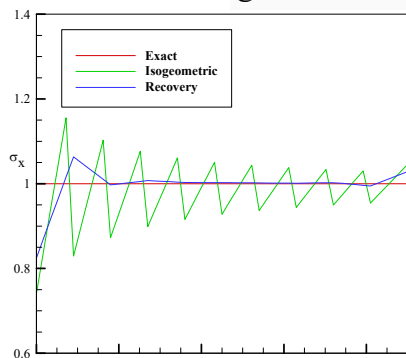


Fig.6. Comparison of the stress obtained from the exact, isogeometric and improved solution for the state of linear changes of materials.

دو حالت خطی و نمایی تغییر می‌کند. شرایط بارگذاری مطابق شکل (۳) است [21, 21].

شکل ۲. صفحه مربع با مصالح مدرج تابعی [20, 21].

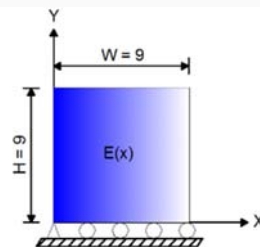


Fig.2. Square plate with functionally graded materials [20, 21].

شکل ۳. شرایط بارگذاری صفحه با مصالح مدرج تابعی [20,21].

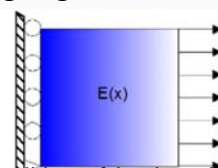


Fig.3. Loading conditions of the plate with functionally graded materials [20, 21].

برای مدل‌سازی این ورق با مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک بردارهای گرهی در دو راستای مختلف مطابق روابط (۵۵ و ۵۶) در نظر گرفته شده است، همچنین نقاط کنترلی و شرایط مرزی مطابق شکل (۴) است.

$$r = \{0,0,0,2,0,4,0,6,0,8,1,1\} \quad (55)$$

$$s = \{0,0,0,2,0,4,0,6,0,8,1,1\} \quad (56)$$

شکل ۴. نقاط کنترلی و شرایط مرزی.

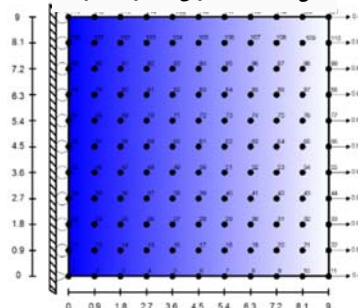


Fig.4. Control points and boundary conditions.

حالت اول تغییرات خطی مصالح. یک صفحه با مصالح مدرج تابعی با ابعاد و شرایط مرزی نشان داده شده در اشکال (۲ و ۳) با ضخامت واحد در نظر است. تغییرات خواص مصالح به صورت خطی مطابق رابطه (۶۱) در راستای محور x است. مقدار تنش دقیق ایجاد شده در راستای محور x در هر نقطه دلخواه برابر واحد است [20, 21].

پارامتر مستقل β از رابطه (۶۰) محاسبه می‌شود [19, 20].

$$\beta = \frac{1}{W} \log \left\{ \frac{E(W)}{E(0)} \right\} \quad (60)$$

در رابطه (۶۰)، W عرض ورق است.

شکل (۹) دقت مدل‌سازی مدول الاستیسیته مصالح مدرج تابعی

را در تغییرات نمایی به روش ایزوژئومتریکی نشان می‌دهد.

شکل ۹. مدل‌سازی تغییرات نمایی مصالح مدرج تابعی به روش

ایزوژئومتریکی برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

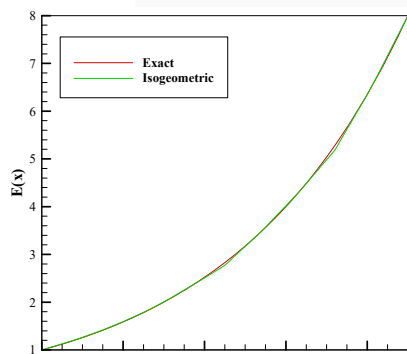


Fig.9. Modeling exponential changes of functionally graded materials by isogeometric method for the state of exponential changes of materials.

شکل (۱۰) مقایسه‌ای بین تنش حاصل از حل ایزوژئومتریکی و

بهبود یافته با حل دقیق است. تنش حاصل از حل بهبود یافته

نتایج نزدیکتری به تنش دقیق نشان می‌دهد، پرش‌های ایجاد شده

در این نمودار به حداقل رسیده و تنش یکنواخت‌تری را نشان

می‌دهد که حاکی از کارایی روش پیشنهادی دارد.

شکل ۱۰. مقایسه تنش به دست آمده از حل دقیق، ایزوژئومتریکی و بهبود

یافته برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

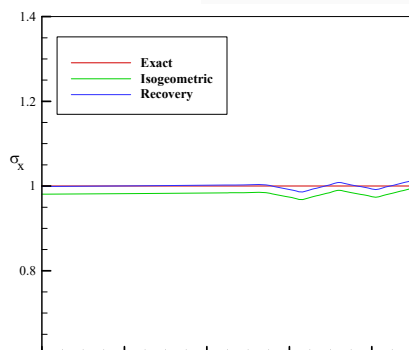


Fig.10. Comparison of the stress obtained from the exact, isogeometric and improved solution for the state of exponential changes of materials.

اشکال (۷ و ۸) توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را نشان

می‌دهد. شاخص تاثیر در این مثال ۰.۶۳ محاسبه شده، شباهت

تغییرات خطای دقیق و تقریبی و کاهش نرم خطای انرژی دقیق

از ۰.۲۴ به ۰.۱۷ در نرم خطای انرژی تقریبی نشان از کارایی

قابل قبول برآورد کننده خطای پیشنهادی دارد. علاوه بر اینکه

نرم خطای انرژی دقیق ۰.۲۴ نشان از کارایی روش

ایزوژئومتریکی در تحلیل مواد مدرج تابعی دارد.

شکل ۷. توزیع نرم خطای انرژی دقیق برای حالت تغییرات خطی مصالح.

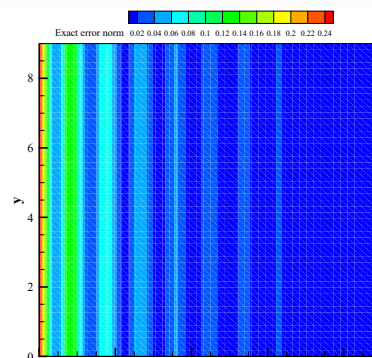


Fig.7. Distribution of exact energy error norm for the case of linear material changes.

شکل ۸. توزیع نرم خطای انرژی تقریبی برای حالت تغییرات خطی مصالح.

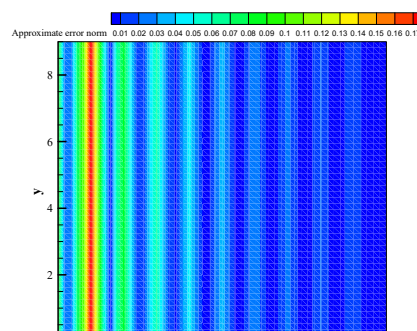


Fig.8. Distribution of approximate energy error norm for the case of linear material changes.

حالت دوم تغییرات نمایی مصالح. یک صفحه با مصالح مدرج تابعی

با ابعاد و شرایط مرزی نشان داده شده در اشکال (۲ و ۳) با

ضخامت واحد در نظر است. تغییرات خواص مصالح به صورت

نمایی مطابق رابطه (۵۹) در راستای محور x ها می‌باشد. مقدار

تنش دقیق ایجاد شده در راستای محور x ها در هر نقطه دلخواه

برابر واحد است [20, 21].

$$E(x) = E^0 e^{\beta x} \quad (59)$$

است. مانند تغییرات خطا، کارایی مناسب برآورد کننده خطای پیشنهادی را نشان می‌دهد.

شکل ۱۳. نرم خطای انرژی دقیق برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

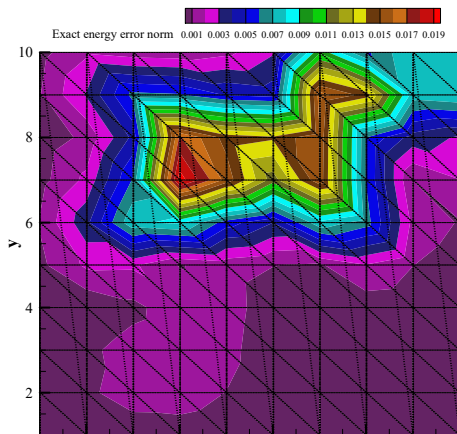


Fig.13. Exact energy error norm for exponential material change mode.

شکل ۱۴. نرم خطای انرژی تقریبی برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

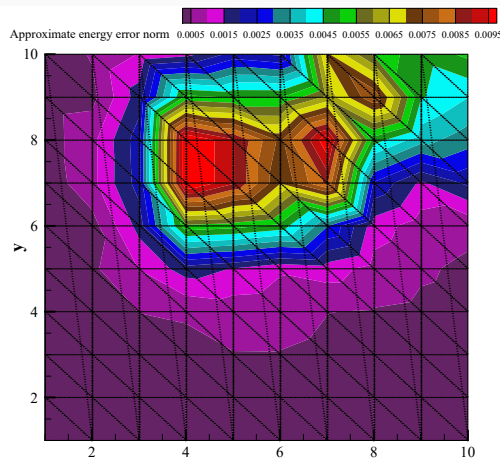


Fig.14. Approximate energy error norm for exponential material change mode.

۸- نتیجه گیری

روش ایزوژئومتریک یک روش توانمند در تحلیل و مدل‌سازی مسائل پیچیده سازه و مکانیک است. با توجه به اینکه هنوز این روش در ابتدای راه است و در هیچ یک از نرم‌افزارهای تجاری جهان مورد استفاده قرار نگرفته، ولی به دلیل پتانسیل بالا به سرعت در حال پیشرفت توسط محققین است. در روش ایزوژئومتریک مانند هر روش تحلیل عددی دیگر خطاهایی

اشکال (۱۱ و ۱۲) توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را نشان می‌دهد. شاخص تاثیر در این مثال ۰.۷۰ محاسبه شده، شباهت تغییرات خطای دقیق و تقریبی و کاهش نرم خطای انرژی دقیق از ۰.۱۵ به ۰.۱ در نرم خطای انرژی تقریبی نشان از کارایی قابل قبول برآورد کننده خطای پیشنهادی دارد. علاوه بر اینکه نرم خطای انرژی دقیق ۰.۱۵ نشان از کارایی روش ایزوژئومتریک در تحلیل مواد مدرج تابعی دارد.

شکل ۱۱. توزیع نرم خطای انرژی دقیق برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

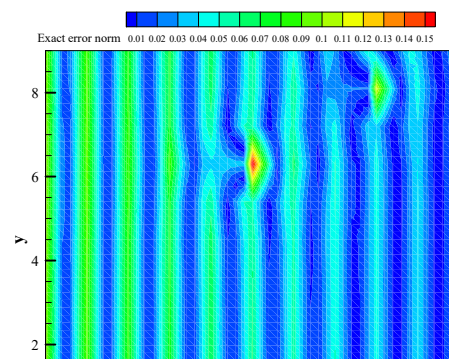


Fig.11. Distribution of exact energy error norm for the case of exponential material changes.

شکل ۱۲. توزیع نرم خطای انرژی تقریبی برای حالت تغییرات نمایی مصالح.

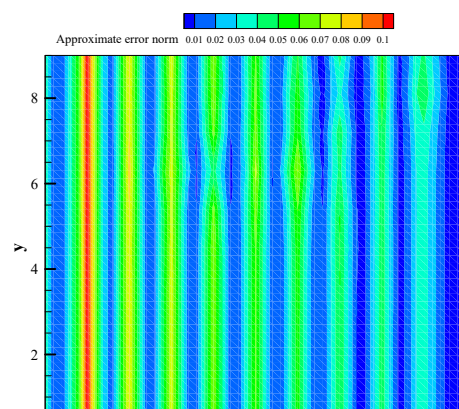


Fig.12. Distribution of approximate energy error norm for the case of exponential material changes.

اشکال (۱۳ و ۱۴) برای درک بهتر از تغییرات خطای دقیق و تقریبی ترسیم شده‌اند. همانطور که قابل مشاهده است میزان تغییرات نرم خطا تقریبی به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته

- [5] Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. 2009. Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons.
- [6] Zienkiewicz, O. C. 2006. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6), 207-213.
- [7] Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C. S., & Gangaraj, S. K. 1995. A model study of element residual estimators for linear elliptic problems: The quality of the estimators in the interior of meshes of triangles and quadrilaterals. *Computers & structures*, 57(6), 1009-1028.
- [8] Shigeru Saito, N. S., Nishida, K., & Kawamura, H. 1997. Preliminary characterization of interlayer for Be/Cu functionally gradient materials. *Functionally Graded Materials* 1996, 215.
- [9] Naebe, M., & Shirvanimoghaddam, K. 2016. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied materials today*, 5, 223-245.
- [10] Wang, Y., Wang, Z., Xia, Z., & Poh, L. H. 2018. Structural design optimization using isogeometric analysis: a comprehensive review. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 117(3), 455-507.
- [11] Lipton, R. 2002. Design of functionally graded composite structures in the presence of stress constraints. *International journal of solids and structures*, 39(9), 2575-2586.
- [12] Hassani, B., Moghaddam, N. Z., & Tavakkoli, S. M. 2009. Isogeometrical solution of Laplace equation.
- [13] Rogers, D. F. 2001. *An introduction to NURBS: with historical perspective*. Morgan Kaufmann.
- [14] Piegl, L., & Tiller, W. 1996. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media.
- [15] Reddy, J. N. 1993. *An Introduction to the Finite Element Method* McGraw-Hill, Inc., New York.
- [16] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. 2005. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier.
- [17] Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z. 1992. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *International Journal for*

وجود دارد. در این پژوهش به برآورد خطای تحلیل مواد مدرج تابعی با روش ایزوژئومتریک و تاثیر نقاط فوق همگرا در تشکیل سطح تنش بهبود یافته پرداخته شد. با توجه به نتایج تحلیل برای شاخص تاثیر و برابری تقریبی نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای دو نمونه حل شده در این مقاله می توان از روش پیشنهادی به عنوان راهکاری برای برآورد خطا و محاسبه سطح میدان تنش بهبود یافته در حل مسائل مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک بهره گرفت.

۹- سپاسگزاری

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود انجام شده است.

۱۰- اعلام تعارض منافع

نویسندگان اعلام می کنند که هیچ نوع تعارض منافع وجود ندارد.

۱۱- مراجع

- [1] Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41), 4135-4195.
- [2] Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., & Reali, A. 2007. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(41-44), 4160-4183.
- [3] Wang, D., & Xuan, J. 2010. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40), 2425-2436.
- [4] Herrema, A. J., Wiese, N. M., Darling, C. N., Ganapathysubramanian, B., Krishnamurthy, A., & Hsu, M. C. 2017. A framework for parametric design optimization using isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316, 944-965.

- Numerical Methods in Engineering*, 33(7), 1331-1364.
- [18] Hassani, B., Ganjali, A., & Tavakkoli, M. 2012. An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 31(1), 101-109.
- [19] Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. 2005. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.
- [20] 20-Kim, J. H., & Paulino, G. H. 2002. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *J. Appl. Mech.*, 69(4), 502-514.
- [21] Burlayenko, V. N., Altenbach, H., Sadowski, T., Dimitrova, S. D., & Bhaskar, A. 2017. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 422-438.
- [22] Dörfel, M. R., Jüttler, B., & Simeon, B. 2010. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(5-8), 264-275.

Improvement of Stress Field and Error Estimation in Functionally Graded Problems with Isogeometrical Analysis

S. H. Emam¹, A. Ganjali^{2,*}, A. Mirzakhani³, N. Z. Moghaddam⁴

1-Ph.D. Student of structural engineering, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

2-Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

3-Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

4-PhD in Structures, Shahid Montazeri Technical and Vocational College, Technical and Vocational University, Mashhad, Iran.

*Ahmad.ganjali@iau-shahrood.ac.ir

Abstract

Today, the use of functionally graded materials is increasing. In these materials, the mechanical properties change as a continuous function throughout the problem domain. Due to these continuous changes, the problems of non-adhesion of materials, delamination and stress concentration at the joint, which can be problematic in composite structures, do not arise. Numerical methods such as the finite element method can be used to analyze functionally graded materials, but due to the limitations of this method, we will face many problems. The most important of these problems are the lack of a suitable element for the analysis of problems that can accommodate changes in the properties of materials, or the inability to accurately model the edges of shapes that have complex geometry, so in this research, the isogeometric method is used in which these weaknesses are eliminated. Also, since the error is an inseparable part of any numerical analysis and the reliability of the results has always been the main concern of the researchers, and in general, there is no exact answer to many problems, finding a solution to estimate the error in the calculations is of special importance. Therefore, in this article, for the first time, the isogeometric method has been developed in the analysis of problems with functionally graded materials with the approach of improving the stress field and estimating the error in it. This error estimator is in the category of error estimation methods based on stress recovery, and the goal is to increase the impact index of the error estimator and more adapt the error distribution method obtained from the proposed error estimator with the exact error estimator in solving problems. In this method, by using superconvergent points, where the order of convergence of the gradient of a function is one order higher than the value expected from the approximation of the shape function related to the approximate solution, a hypothetical surface is made for each stress value. To define this surface, we use the same shape functions used in the isogeometric method to approximate unknown functions. This hypothetical level is created when the coordinates x , y and z of its control points are specified. The x and y coordinates of each control point are used to model the geometric shape. The z component of the control points is calculated by minimizing the distance between this hypothetical level and the stress level obtained from isogeometric solution at the gauss-elements points of each region using the minimum square sum method. From the comparison of the exact error norm and the approximate error norm for sample problems, it can be seen that the proposed error estimation has a suitable efficiency for estimating the error in the analysis of problems with functionally graded materials by isogeometric method, and it can be used as a solution to error estimation and calculate the improved stress field level in solving functionally graded problems by isogeometric method. It is also possible to identify areas of the isogeometric solution domain that have a large error with the help of the proposed error estimator method and achieve local improvement of the network in those areas and increase the accuracy of the isogeometric solution.

Keywords: Isogeometrical Analysis; Functionally Graded Material; Error Estimation; Stress Recovery.