

شناسایی آسیب در محیط الاستیک با روش نمونه برداری خطی

هادی دهقان منشادی^۱

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران

h.d.manshadi@iauyazd.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۱۴

تاریخ دریافت: ۹۹/۸/۲۱

چکیده

امروزه، مسائل وارون پراکندگی در حوزه مکانیک جامدات طیف وسیعی از کاربردها را به خود اختصاص داده است که در میان آنها می‌توان به مسائل لرزه‌شناسی و آزمایش‌های غیرمخرب اشاره کرد. در این مقاله روش نمونه‌برداری خطی به عنوان روشی کیفی به منظور شناسایی آسیب در محیط الاستیک دو بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگرچه از این روش به منظور حل مسائل وارون در حوزه‌های الکترومغناطیس، اکوستیک و الاستودینامیک در محیط‌های نامحدود استفاده شده است، اما تا کنون هیچ تلاشی مبنی بر توسعه این روش برای شناسایی آسیب در محیط‌های الاستیک محدود با استفاده از داده‌های ثبت شده در حوزه فرکانس انجام نشده است. روش نمونه‌برداری خطی، تکنیکی به منظور حل مسائل پراکندگی وارون با استفاده از پاسخ موج پراکنده شده است. اساس کار در این روش جستجو در بین نقاطی است که با عنوان نقاط نمونه شناخته می‌شوند. برای هر یک از این نقاط نمونه معادله‌ای خطی حل می‌شود. به عبارت دیگر هدف اصلی یافتن میدان جابه‌جایی از نقاط نمونه‌ای است به گونه‌ای که بر میدان جابه‌جایی تفاضلی ناشی از وجود ناهمگنی داخل قلمرو، هماهنگ باشد. در این پژوهش روش نمونه‌برداری خطی در حوزه فرکانس به همراه روش اجزای محدود طیفی برای شناسایی آسیب مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها سعی شده است تا با حل نمونه‌های متنوع کارایی روش نمونه‌برداری خطی در حوزه فرکانس ارزیابی شود. نتایج به دست آمده از حل این نمونه‌ها، نشان می‌دهد روش نمونه‌برداری خطی در حوزه فرکانس به عنوان یک راهکار کارآمد برای شناسایی پراکنده‌سازها (آسیب) محسوب می‌شود.

واژگان کلیدی: مسائل وارون، الاستودینامیک، شناسایی آسیب، روش نمونه‌برداری خطی، روش کیفی

۱- مقدمه

سازه‌ای ترک پیدا شود. خرابی‌ها ممکن است به صورت پیش‌رونده مانند کاهش سختی و مقاومت در اثر رشد ترک رخ دهند. از این رو پرداختن به جنبه‌های گوناگون پدیده ترک در سازه‌های مهم، گریز ناپذیر است. یکی از چالش‌های همیشگی فرایند کنترل سلامت سازه‌ها، ردیابی آسیب‌های موجود در سازه است. برای تشخیص وجود آسیب، لازم است آثار ناشی از وجود آن بررسی شود. یکی از بهترین روش‌های موجود برای ردیابی ترک و پراکنده‌ساز (مانند حفره، ناهمگنی و ...)

تشخیص عیوب سازه امروزه در سازه‌های زیربنایی صنایع مانند عمران، مکانیک، هوا و فضا و به طور کلی در سازه‌های مرتبط با شریان‌های حیاتی، نقش به‌سزایی دارد و همواره بخشی از مسائل مهم در اولویت به شمار می‌رود. آسیب دیدن چنین سازه‌هایی ممکن است خسارات و تلفات جبران ناپذیری را به بار آورد. به دلایل گوناگون از جمله خستگی، ضربه، نقص در فرایند ساخت المان، وارد شدن بارهای پیش‌بینی نشده یا حتی بارهای معمول و پیش‌بینی شده، ممکن است در المان‌های

استفاده از امواج مکانیکی پراکنده شده در قلمرو سازه آسیب دیده است زیرا این امواج حساسیت زیادی نسبت به ویژگی‌های محیطی که در آن منتشر می‌شوند، از خود نشان می‌دهند. تغییر رفتار و ویژگی‌های امواج منتشر شده در یک سازه به هنگام برخورد با آسیب و پراکنده‌ساز می‌تواند نشانگر مشخصات آسیب، از جمله جای آن باشد. شناسایی آسیب و پراکنده‌سازهای موجود در محیط کاوش با استفاده از امواج منتشر شده ناشی از برخورد با پراکنده‌ساز با عنوان مسائل پراکندگی وارون شناخته می‌شوند. انواع روش‌های حل مسائل پراکندگی وارون بسته به آن‌که چه مشخصاتی از جسم و به چه نحو به دست می‌آیند را می‌توان به دو دسته روش‌های کیفی و روش‌های کمی تقسیم کرد. در روش‌های کیفی معمولاً تنها بخشی از مشخصات پراکنده‌ساز مانند شکل و محل قرارگیری آن به دست می‌آید اما در روش‌های کمی به شناسایی جنس محیط مانند ضرایب لامه پرداخته می‌شود. ایده‌های اصلی روش‌های کیفی از آنالیز تابعی استخراج شده است و معمولاً مبانی ریاضی آن‌ها پیچیده و کاملاً متفاوت با ریاضیات معمول در کاربردهای مهندسی است، اما جالب آن است که فرمولاسیون نهایی این روش‌ها مشابه یکدیگر و بسیار ساده است [1] هرچند آن‌چه یک روش کیفی به دست می‌دهد اطلاعات کمتری نسبت به روش‌های دیگر خواهد داشت اما آن‌چه این روش‌ها را بیش‌تر جذاب می‌کند رسیدن به معادله‌های خطی بدون در نظر گرفتن هیچ تقریب ساده‌کننده در جریان حل مسأله است و تنها پیش‌فرض ما در استفاده از این روش‌ها آن است که بدانیم پراکنده‌ساز در محیط کاوش قرار دارد [2]. از مهم‌ترین روش‌های کیفی می‌توان به روش نمونه برداری خطی [3-4]، روش تجزیه عاملی [5-6]، روش منابع تکین [7]، روش بررسی [8] و روش حساسیت توپولوژی [9-10] اشاره کرد. روش نمونه برداری خطی، اولین این روش‌هاست که در سال ۱۹۹۷ در جریان انجام آزمون‌های عددی توسط کرش کشف و ابداع شد و نخستین بار در ارتباط با مسائل معکوس میدان دور اکوستیک و برای شناسایی موانع قابل نفوذ و غیرقابل نفوذ مورد استفاده قرار گرفت [4]. این روش در سال ۲۰۰۱ برای اولین بار توسط آرنز در زمینه مسائل

معکوس الاستودینامیک حوزه میدان دور در یک محیط بی-نهایت استفاده شد [11]. گیتیدس و همکارانش در سال ۲۰۰۲ با استفاده از روش یاد شده به شناسایی پراکنده‌ساز نفوذپذیر در یک محیط الاستیک بی‌نهایت پرداختند [12]. فاتا و گازینا برای شناسایی پراکنده‌ساز مدفون شده در محیط نیم‌بی‌نهایت و در قلمرو فرکانس از روش نمونه برداری خطی بهره بردند [13]. در این پژوهش روش نمونه برداری برای مسائل حوزه نزدیک الاستودینامیک توسعه داده شد. در سال ۲۰۰۷ نیز این دو پژوهشگر فرم الحاقی روش نمونه برداری خطی را در قلمرو فرکانس و در حوزه میدان نزدیک به منظور شناسایی حفره در محیط نیم‌بی‌نهایت ارائه دادند [14]. گازینا و مادیاروف با استفاده از توابع گرین برای محیط‌های لایه‌ای به شناسایی پراکنده‌ساز در محیط‌های لایه‌ای و ناهمگن پرداختند [15]. دهقان منشادی و خاجی در سال ۲۰۱۴ با استفاده از روش نمونه برداری خطی به حل مسائل وارون الاستواستاتیک و انتقال حرارت پرداختند. نتایج حاصل از این پژوهش‌ها نشان دهنده کارایی این روش در شناسایی آسیب در حوزه مسائل الاستواستاتیک و انتقال حرارت بود [16-17]. آن‌ها در سال ۲۰۱۵ برای نخستین بار روش نمونه برداری خطی را در حوزه زمان برای مسائل الاستودینامیک بسط داده و از آن برای شناسایی آسیب در محیط الاستیک بهره بردند. نتایج حاصل از پژوهش نشان داد شناسایی آسیب در حوزه زمان از دقت بسیار بالاتری نسبت به دیگر حوزه‌ها مانند الاستواستاتیک برخوردار است [18]. در این پژوهش، مسئله وارون الاستودینامیک در محیط محدود و حوزه فرکانس بررسی می‌شود. در بخش ۲، روابط و معادلات حاکم بر مساله پراکندگی مستقیم ارائه می‌شود. بخش ۳، اختصاص به مساله وارون دارد. در بخش ۴ روش نمونه برداری خطی در حوزه فرکانس به عنوان روش حل مساله وارون معرفی می‌شود. حل نمونه‌های عددی برای ارزیابی کارایی روش در بخش ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها نیز به نتایج حاصل از این پژوهش اشاره می‌شود.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6)$$

به طوری که δ_{ij} معرف دلتای کرونکر است.

شکل ۱. قلمرو حفره دار در حالت دو بعدی.

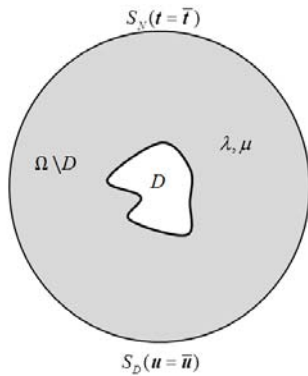


Fig. 1. A sample 2D domain (Ω) with an embedded cavity/inclusion

اثر ناهمگنی موجود در مسأله را می‌توان از طریق پاسخ موج پراکنده شده داخل قلمرو بررسی کرد. به بیانی دیگر، هدف در مسأله پراکندگی مستقیم بررسی انتشار موج داخل قلمرو و یافتن میدان جابه‌جایی پراکنده شده $u^S(x; \omega)$ است به گونه‌ای که معادله ناویه را ارضا کرده و از تفاضل میدان جابه‌جایی قلمرو حفره دار و بدون حفره به دست می‌آید:

$$u^D(x; \omega) = u^P(x; \omega) - u(x; \omega), \quad (7)$$

در رابطه بالا، $u(x; \omega)$ و $u^D(x; \omega)$ به ترتیب معرف جابه‌جایی الاستودینامیک برای محیط الاستیک مرجع (بدون حفره) و حفره دار است. به منظور یافتن میدان جابه‌جایی پراکنده شده از روش عددی اجزای محدود طیفی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله استفاده می‌شود [21].

۳- مسأله وارون

در این بخش هدف شناسایی شکل و موقعیت حفره و یا ترک D است. به عبارت دیگر میدان جابه‌جایی تفاضلی $u^S(x; \omega)$ به دلیل وجود حفره D ناشی از تحریک نقطه‌ای روی مرز، $S_1 \subset S$ روی بخشی از مرز که با عنوان مرز مشاهداتی از آن نام برده می‌شود $S_2 \subset S$ محاسبه شده و از آن به منظور شناسایی آسیب استفاده می‌شود. شکل (۲) توضیحات داده شده را به صورت شماتیک نشان می‌دهد.

۲- مسأله مستقیم

بطور کلی حل مسائل معکوس پراکندگی شامل دو بخش است: گام اول: یافتن تغییرات پاسخ سازه در اثر وجود آسیب و ناهمگنی که این بخش جزء حل مستقیم مسأله محسوب می‌شود. گام دوم: استفاده از نتایج گام قبلی به منظور استفاده در الگوریتم وارون و شناسایی آسیب و ناهمگنی مورد نظر. پس در گام اول به بررسی مسأله مستقیم می‌پردازیم. محیط کران‌دار $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ or 3) معرف بعد مسأله بوده به طوری که $d=2$ نشان دهنده مسأله دو بعدی و $d=3$ بیانگر مسأله سه بعدی است) با مرز $S = S_N \cup S_D$ و ضرایب ثابت لامه λ, μ به عنوان محیط مرجع و محیط $\Omega(D) = \Omega \setminus D$ به عنوان حفره دار در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). D در واقع نشان دهنده قلمرو حفره مطابق شکل (۱) است. S_N و S_D به ترتیب بیانگر بخشی از مرز است که شرایط مرزی از جنس نیرو و جابه‌جایی روی آن مشخص است. میدان جابه‌جایی کل نقطه‌ای داخل قلمرو با مختصات $x = [x_1, x_2]^T \in \Omega \setminus D$ در حضور حفره و یا ترک به صورت $u^D(x; \omega) = [u_1^D(x; \omega), u_2^D(x; \omega)]^T$ نشان داده می‌شود. بطوری که ω فرکانس تحریک این میدان جابه‌جایی در معادله ناویه صدق می‌کند [19-20]:

$$Lu^D(x; \omega) + f = 0, \quad x \in \Omega \setminus D, \quad (1)$$

$$t(x; \omega) = t(x; \omega), \quad x \in S_N \quad (2)$$

$$u^D(x; \omega) = u(x; \omega), \quad x \in S_D \quad (3)$$

$$t(x; \omega) = 0, \quad x \in \partial D \quad (4)$$

به طوری که ∂D مطابق شکل (۲) نشان دهنده مرز قلمرو حفره D است. در رابطه (۱)، f بیانگر نیروی حجمی و L بیانگر عملگر دیفرانسیل لامه- ناویه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Lu(x) = \text{div}[C': \nabla u(x)] + \rho \omega^2 u(x) \quad (5)$$

در رابطه بالا، ρ معرف جرم حجمی و C تانسور مرتبه چهارم ارتجاعی است که مولفه‌های آن بیانگر پارامترهای لازم برای تعیین مشخصات مصالح است و برای مصالح ایزوتروپیک به صورت زیر بیان می‌شود:

با توجه این که معادله ناویه از ترکیب معادلات تعادل و روابط تنش و کرنش معادلات حرکت در محیط ارتجاعی خطی بدست می آیند، پس اصل برهم نهی صادق بوده و میدان جابه جایی آزاد ناشی از تحریک های نقطه ای واحد روی مرز S_1 بر اساس رابطه پتانسیل تک لایه به فرم زیر بیان می شود:

$$\int_{S_1} \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) d(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} \in \Omega \setminus S_1) \quad (13)$$

رابطه فوق یک جواب برای معادله همگن ناویه در محدوده $\Omega \setminus S_1$ محسوب می شود:

$$L\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus S_1 \quad (14)$$

بنابراین با توجه به توضیحات داده شده، رابطه (۱۳)، برهم نهی پاسخ های ایجاد شده ناشی از تحریک های نقطه ای را مدل می کند. برای یک تابع توزیعی مانند $\mathbf{g} \in L_2(S_1)$ معرف L_2 فضای متریک هیلبرت است) میدان جابه جایی تفاضلی که در بردارنده آثار حفره D را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{x} \in (\Omega \setminus D) \setminus S_1 \quad (15)$$

۴- روش نمونه برداری خطی

همان گونه که بیان شد روش نمونه برداری خطی، تکنیکی به منظور حل مسائل پراکندگی وارون با استفاده از پاسخ موج پراکنده شده است. این تکنیک برای اولین بار توسط کُلتن و همکارانش معرفی شد و در حوزه الکترومغناطیس و اکوستیک بکار گرفته شد. اساس کار در این روش جستجو در بین نقاطی است که با عنوان نقاط نمونه شناخته می شوند. برای هر یک از این نقاط نمونه معادله ای خطی حل می شود. به عبارت دیگر هدف اصلی یافتن میدان جابه جایی از نقاط نمونه ای است به گونه ای که بر میدان جابه جایی تفاضلی ناشی از وجود ناهمگنی داخل قلمرو، منطبق باشد (شکل ۳). بنابراین اگر بتوان میدان جابه جایی منتشر شده ای از نقاط نمونه یافت به گونه ای که بر میدان جابه جایی تفاضلی از ناهمگنی منطبق باشد، بدین معنی است که نقطه نمونه مورد بررسی متعلق به مرز پراکنده ساز و یا ناهمگنی است. معیاری که به منظور شناسایی مرز چشمه ثانویه

شکل ۲. تحریک نقطه ای و ایجاد میدان جابه جایی.

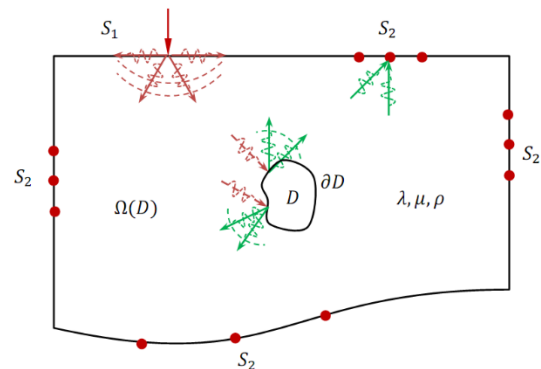


Fig. 2. Point source excitation of a finite domain including a cavity/inclusion

به منظور فرموله کردن مسأله وارون الاستودینامیک، حل اساسی $\hat{\mathbf{U}}_{ik}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \omega)$ به عنوان جوابی برای معادله زیر تعریف می شود:

$$L\mathbf{u}_{ik}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \omega) + \mathbf{o}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k = \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (8)$$

در این رابطه $\mathbf{e}_k (k=1,2)$ معرف پایه های متعامد در فضای دو بعدی Ω و نشان دهنده راستای نیروی حجمی $\mathbf{f} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ معرف تابع دلتای دیراک، $\hat{\mathbf{U}}_{ik}$ مولفه ی جابه جایی در راستای i به دلیل اعمال نیرو در راستای k و $\mathbf{x}_0$ معرف مختصات نقطه تحریک است. در یک سیستم مختصات دوبعدی، حل اساسی جابه جایی $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ به فرم یک تانسور 2×2 به صورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} \hat{u}_{21} & \hat{u}_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

مشابه رابطه (۸)، میدان جابه جایی کل $\mathbf{u}_{ik}^D$ به دلیل وجود حفره پاسخ معادله ی زیر خواهد بود:

$$\mathbf{x} \in \Omega \setminus D \quad (10)$$

با توجه به تعریف های بالا، میدان جابه جایی تفاضلی بر اساس تفاضل جابه جایی میدان کل و جابه جایی میدان آزاد تعریف می شود:

$$\mathbf{u}_{ik}^S(\cdot; \mathbf{x}_0, \omega) = \mathbf{u}_{ik}^D(\cdot; \mathbf{x}_0, \omega) - \hat{\mathbf{u}}_{ik}(\cdot; \mathbf{x}_0, \omega) \quad (11)$$

میدان جابه جایی تفاضلی همچنین معادله همگن ناویه را ارضا می کند:

$$L\mathbf{u}_{ik}^S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, \omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus D \quad (12)$$

$$(Fg)(x; \omega) = \varphi_z(x; \omega) \quad (18)$$

هدف در رابطه بالا یافتن بردار توزیع $g_z(\cdot) \in L_2(S_1)$ برای هر یک از نقاط نمونه $z \in \Omega$ است.

۴-۱- گسسته سازی

به منظور حل معادله بالا، لازم است طرف چپ رابطه گسسته سازی شود. بر این اساس با کمک گرفتن از روش عددی اجزای محدود طیفی، عملگر میدان نزدیک F به فرم زیر گسسته سازی می شود:

$$(F : \mathbf{R}^{N_s} \rightarrow \mathbf{R}^{N_r}) \quad (19)$$

که در آن N_s و N_r به ترتیب بیانگر تعداد چشمه و گیرنده تعبیه شده روی مرز S_1 و S_2 است.

۴-۲- منظم سازی

مسائل وارون بد رفتار بوده و به منظور حل این گونه مسائل باید از روش های منظم سازی بهره گرفت. به وسیله روش های منظم سازی می توان تقریبی از جواب هر معادله بد رفتار به دست آورد که پایدار نیز باشد. معادله انتگرالی (۱۸) از معادلات انتگرالی نوع اول فرد هلم بوده و این نوع معادلات انتگرالی در قالب مسائل بد رفتار دسته بندی می شوند. به منظور حل این معادله و برای پایدار سازی مسأله از روش تیخانوف استفاده می کنیم. در این روش به دنبال جوابی با کمترین مقدار باقی مانده ها هستیم. اما دست یافتن به چنین جوابی فقط با شرط کمترین مربعات در دستگاه های معادلات بد رفتار گسسته به دلیل بدشراطی عملگر F ، امکان پذیر نیست؛ از این رو در روش تیخانوف هم زمان با مینیم کردن نرم بردار باقی مانده ها، با کمینه نمودن خصیصه ای از مجهولات، از بی کرانی جواب جلوگیری می شود [4]

$$\|Fg_{z,d} - \phi_{z,d}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \lambda \|g_{z,d}\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (20)$$

معرفی می شود، نرم دو یا نرم در فضای متریک هیلبرت بردار توزیع $g_z(\cdot) \in L_2(S_1)$ است. در واقع نرم پاسخ برای نقاط نمونه داخل پراکنده ساز مورد نظر دارای مقدار محدود و برای نقاط خارج از محدوده مقداری بزرگ است. با توجه به رفتار خطی معادله حاکم بر سیستم و برقرار بودن اصل برهم نهی، عملگر میدان نزدیک F به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_{S_1} U^s(x-x_0).g(x_0)d(x_0) \quad (16)$$

شکل ۳. جستجو بین نقاط نمونه به منظور شناسایی ناهمگنی داخل محیط

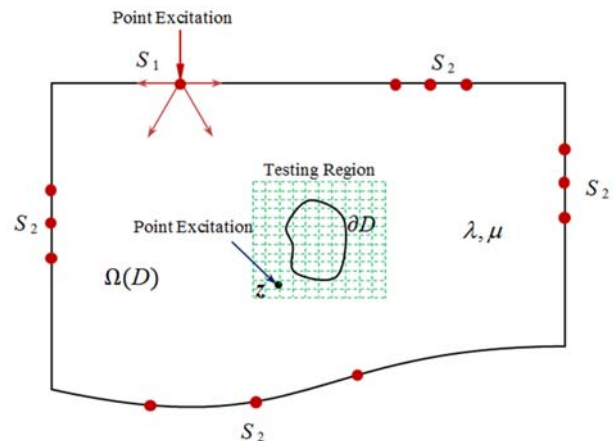


Fig. 3. Investigated region of the finite medium imaging problem.

به بیانی دیگر، عملگر میدان نزدیک F نگاشتی از مجموعه S_1 به مجموعه S_2 تلقی می شود $F : L_2(S_1) \rightarrow L_2(S_2)$. S_1 و S_2 به ترتیب بیانگر مرز تحریک و مشاهداتی هست. رابطه (۱۶) بیانگر برهم نهی میدان جابه جایی تفاضلی است که روی مرز مشاهداتی S_2 محاسبه شده اند. به منظور فرموله کردن روش نمونه برداری، گام بعدی یافتن میدان جابه جایی منتشر شده داخل قلمرو همگن به دلیل وجود تحریک نقطه ای واقع در نقطه نمونه $z \in \Omega$ و در راستای است.

$$\phi_z(x; \omega) = U(x; z, \omega).d, (z \in \Omega, \|d\| = 1) \quad (17)$$

$\phi_z(x; \omega)$ برداری با اندازه N_r و شامل میدان جابه جایی تابشی از نقاط نمونه است که در N_r گیرنده تعبیه شده روی مرز ثبت می شود. با توجه به تعریف ارائه شده، روش نمونه برداری به صورت زیر فرموله می شود:

تقسیم بندی شده است، به طوری که روی هر ضلع صفحه مربعی، ۴۰ المان طیفی جای بگیرد. از آن جایی که روش نمونه برداری خطی روشی کیفی بوده، نیازمند اطلاعات ورودی زیادی است. از سوی دیگر در این روش تعداد و موقعیت سنسورها و موج های ورودی وابسته به مرزهای مشاهداتی قابل دسترس هستند. بدیهی است در صورتی که امکان دریافت پاسخ موج پراکنده شده در چهار سوی قلمروی که آسیب را در برگرفته فراهم باشد، شناسایی دقیق تر صورت می گیرد. از اینرو در تمامی مثال های حل شده، موقعیت نقاط تحریک و سنسورهای دریافت کننده پاسخ روی چهار لبه محیطی قلمرو و منطبق بر هم در نظر گرفته شد.

به منظور مدل سازی و تولید داده از روش اجزای محدود طیفی استفاده می شود. در مسائل پیش رو پارامتر منظم سازی محاسبه شده با استفاده از اصل مروزوف برابر با $\alpha = 2.57 \times 10^{-5}$ و برای تحریک در نقاط نمونه (z) راستای افقی $d = (1, 0)^T$ در نظر می شود.

شکل ۴. سیگنال ارزیابی.

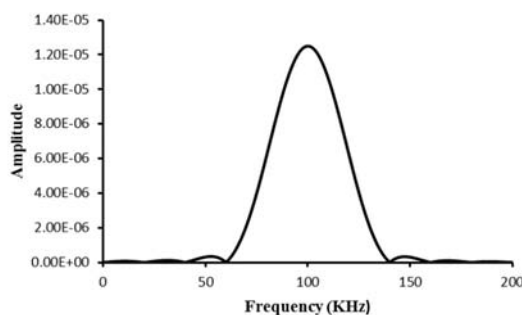


Fig. 4. Evaluator signal

۵-۱- شناسایی حفره تک

نخستین نمونه که در این بخش بررسی می شود، شناسایی حفره تک در صفحه ای مربعی شکل با ابعاد 50x50cm است. جنس صفحه از فولاد با مشخصات مدول یانگ برابر 200Gpa، نسبت پواسون 0.29 و جرم حجمی 7850 kg/m^3 است. هندسه و قلمرو حفره دار در شکل (۵) نشان داده شده است. موقعیت نقاط تحریک و سنسورهای دریافت کننده پاسخ روی چهار لبه محیطی قلمرو و منطبق بر هم در نظر گرفته شد. به

در رابطه ی فوق $\lambda > 0$ با عنوان پارامتر منظم سازی تیخانوف شناخته می شود و با استفاده از اصل مروزو محاسبه می شود و ریشه رابطه زیر است [4].

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\mu_i^2 + \lambda)^2} |U \phi_z| \quad (21)$$

که در آن σ_i مقادیر تکین و U و V به ترتیب بیانگر بردارهای تکین چپ و راست عملگر F هستند و با استفاده از تجزیه مقادیر تکین به صورت زیر تعریف می شود:

$$F = USV^T, \quad S_i = \sigma_{ii} \quad (22)$$

ع در رابطه (۲۱) نشانگر خطای عملگر F است که بر اساس رابطه زیر تعریف می شود:

$$\|F - F_{approx}\| \leq \varepsilon \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۲۰) و منظم سازی تیخانوف نرم بردار g_z که شاخصی برای تعیین مرز پراکنده ساز است با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$\|g_{z,d}\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} |(U \phi_{z,d})_i| \quad (24)$$

با رسم $1/\|g_{z,d}\|$ به عنوان تابع شاخص، شکل و مرز پراکنده ساز بازیابی می شود.

۵- نتایج عددی

در این بخش به منظور ارزیابی روش پیشنهادی به حل نمونه های عددی پرداخته می شود. در تمام نمونه های عددی تحریک نقطه ای با بزرگی ۱۰۰ کیلونیوتن که سیگنال ضریب آن در قلمرو فرکانس در شکل (۴) نشان داده شده است، به عنوان سیگنال ارزیابی روی مرز S_1 در نظر گرفته می شود. برای شبکه بندی صفحه سالم (قلمرو مرجع) و حفره دار از Mesh Generator نرم افزار Ansys استفاده شده و قلمرو مرجع (محیط همگن و سالم) مسئله به ۱۶۰۰ المان طیفی ۳۶ گرهی

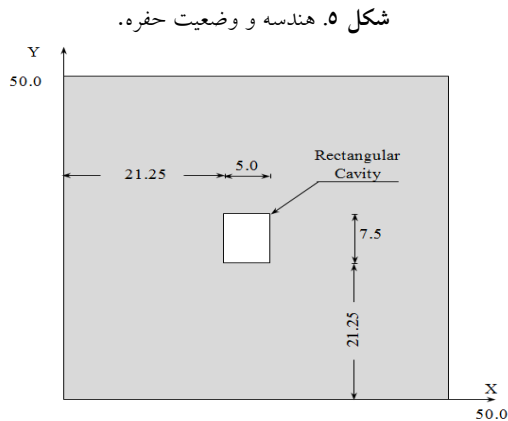


Fig. 5. The geometry of single square cavitated domain (all dimensions in centimeter).

شکل ۶. توزیع تابع شاخص با استفاده از داده الاستودی نامیک به منظور شناسایی حفره، (الف) توزیع دو بعدی (ب) توزیع سه بعدی.

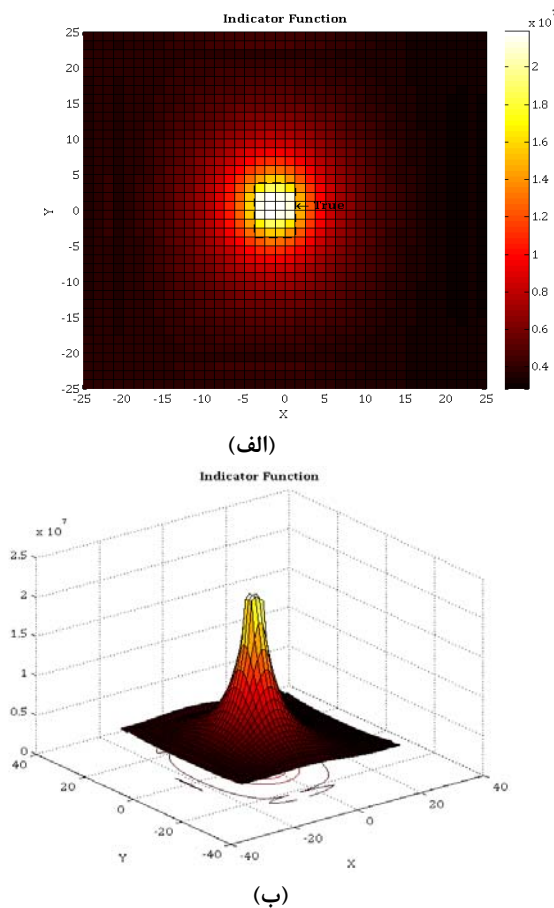


Fig. 6. Contour plot of the indicator function for the identification of the cavity

منظور شناسایی حفره مستطیل شکل مرکزی، ۷۸ موج ورودی بکار گرفته شد. به منظور محاسبه نرُم بردار مجهولات، ۸ مقدار تکنیکی بکار گرفته شد. نمایانگر توزیع تابع شاخص برای شناسایی حفره با استفاده از داده‌های الاستودینامیک است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مقدار تابع شاخص $1/\|g_z\|_{L^2(\Omega)}$ برای نقاط نمونه داخل حفره نسبت به نقاط نمونه خارج از حفره مقدار بزرگ‌تری است به طوری که این شاخص در نقاط نمونه داخلی نزدیک مرز از مقدار عددی 2×10^7 (محدوده روشن تصویر) به مقدار تقریبی $1/8 \times 10^7$ برای نقاط نمونه خارجی مرزحفره (محدوده مشخص شده به رنگ قرمز)، پرش می‌کند شکل (۶ الف). به بیانی دیگر پرش مقدار عددی شاخص در نقاط نمونه نزدیک به مرز معیاری برای شناسایی حفره خواهد بود. این موضوع به خوبی در شکل (۶ ب) قابل مشاهده است. از اینرو چنانچه از شکل برمی‌آید، روش نمونه‌برداری خطی به خوبی شکل و موقعیت نقص موجود در داخل قلمرو را با استفاده از داده‌های الاستودینامیک شناسایی می‌کند. البته قابل توجه است که روش نمونه‌برداری خطی، همان‌گونه که پیشتر عنوان شد روشی کیفی بوده و به صورت تقریبی تخمینی از شکل و موقعیت نقص موجود در قلمرو را به تصویر می‌کشد. در مرجع [16] نیز نمونه مشابهی در قالب مساله وارون الاستواستاتیک توسط دهقان منشادی و همکاران ارائه شده است. بررسی این نمونه نشان می‌دهد که برای شناسایی حفره ۱۵۶ سنسور برای ثبت داده‌های الاستواستاتیک به کار گرفته شده است. در حالی‌که شناسایی حفره در این پژوهش با نصف این تعداد سنسور یعنی ۷۸ صورت گرفته است. از سوی دیگر تعداد تحریک‌های به کار گرفته شده برای تولید موج در این پژوهش نیز نصف مرجع [16] است. از اینرو می‌توان نتیجه گرفت که هزینه محاسبات حل مساله در حوزه فرکانس نسبت به حل مساله در حوزه الاستواستاتیک، کمتر است.

۲-۵- بررسی وجود خطا در داده ها

در این بخش به بررسی اثر خطا در داده ها ناشی از عدم کالیبره بودن وسایل مورد استفاده می پردازیم. به منظور شبیه سازی داده های آغشته به خطا از رابطه زیر استفاده می شود [۱۰]:

$$u^e = u^{comp}(1 + \eta \chi) \quad (25)$$

به شکلی که در آن χ عدد تصادفی یکنواخت توزیع شده در بازه ۱ و ۱- و u^{comp} پاسخ های مشاهداتی است.

مسئله مورد بررسی شناسایی حفره نمونه قبل برای درصد خطاهای $\eta = 1\%, 2\%$ است. شکل (۷) بیانگر رفتار تابع شاخص برای مقادیر مختلف خطا است. همان گونه که مشاهده می شود، با افزایش میزان خطا روش نمونه برداری خطی، شکل و موقعیت ناهمگنی را با دقت بالایی نشان می دهد. این موضوع نشان می دهد، حساسیت روش مذکور نسبت به میزان خطا اندک است. البته در صورتی که خطاهای اندازه گیری زیاد باشد، ممکن است وضوح تصویر مربوط به آسیب کاهش یافته و نیاز به تعداد سنسورهای بیشتری برای شناسایی با دقت بالاتر باشد. شکل ۷. بررسی مقادیر مختلف خطا روی تابع شاخص.

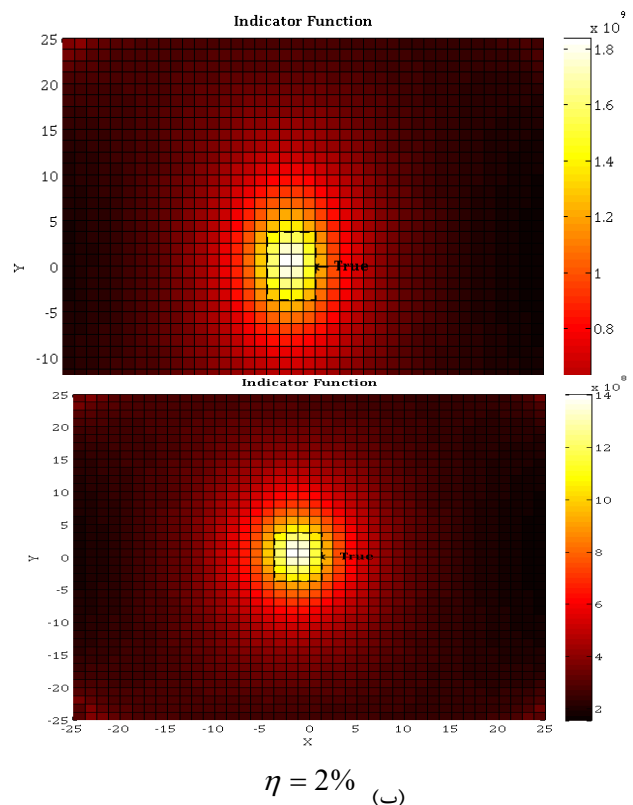


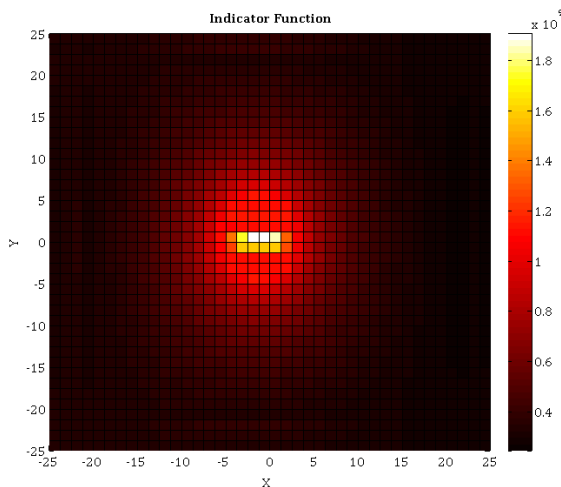
Fig. 7. Influence of data noise on indicator function for various noise levels of (a) $\eta = 1.0$ and (b) $\eta = 2.0$.

۳-۵- شناسایی ترک

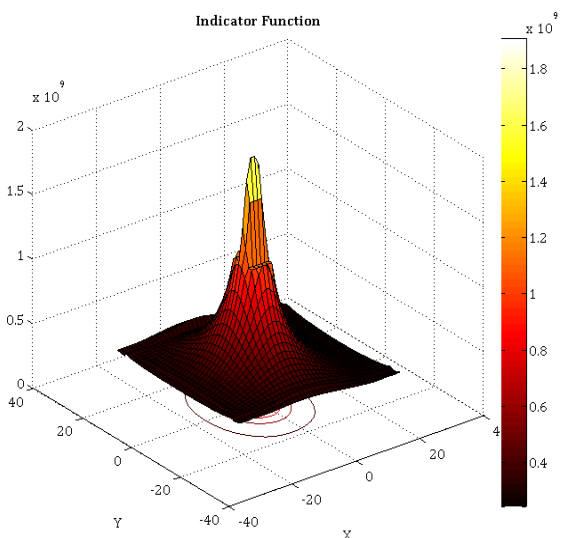
در این بخش توانایی روش نمونه برداری خطی در شناسایی ترک مورد آزمون قرار داده می شود. بدین منظور یک صفحه آلومینیومی به ابعاد $50 \times 50 \text{ cm}$ با یک ترک افقی مطابق شکل (۸) در نظر گرفته می شود. عرض ترک 50 mm است و ترک در تمام ضخامت صفحه وجود دارد. جنس صفحه، آلومینیوم است، مدول یانگ آن برابر با 72.9 GPa و چگالی جرمی آن $2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ است. نسبت پواسون آلومینیوم $\nu = 0.33$ وارد

شده است. چهار ضلع صفحه آزاد است و صفحه در چهار گوشه آن ثابت شده است. تعداد نقاط تکینگی مورد استفاده نیز در این نمونه برابر با ۱۲ اختیار شده است. بیانگر چگونگی تغییرات تابع شاخص برای ترک است. در این حالت نیز، مقدار تابع شاخص $1/\|g_z\|_{L^2(\Omega)}$ برای نقاط نمونه داخل ترک نسبت به نقاط نمونه خارج از ترک مقدار بزرگتری است به طوری که این شاخص در نقاط نمونه داخلی نزدیک مرز از مقدار عددی $1/8 \times 10^9$ (محدوده روشن تصویر) به مقدار تقریبی 1×10^9 برای نقاط نمونه خارجی مرز ترک (محدوده مشخص شده به رنگ قرمز روشن)، پرش می کند (شکل ۹ الف). چگونگی این پرش به خوبی در شکل (۹ ب) نشان داده است. در این مورد نیز، همان گونه که مشاهده می شود با وجود کوچک بودن نقص، روش کیفی نمونه برداری خطی با دقت قابل قبولی قادر به شناسایی ترک است. قابل توجه است که شناسایی ترک با استفاده از ترکیب روش اجزای محدود طیفی و نمونه برداری خطی تنها بر اساس داده های الاستودینامیک در حوزه فرکانس و زمان انجام پذیر است. چرا که استفاده از توابع شکل مرتبه بالا در روش اجزای محدود طیفی، امکان جستجوی نقاط نمونه بیشتری که شامل ترک هم می شود را در اختیار قرار می دهد. از سوی دیگر در مقایسه با پژوهش انجام شده توسط دهقان منشادی و خاجی [۱۸] تعداد سنسورهای لازم برای ثبت داده های الاستودینامیک در حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان بیشتر است. به شکلی که در این پژوهش به منظور شناسایی ترک ۷۸ سنسور مورد استفاده قرار گرفت، در حالی که تعداد سنسورهای مورد استفاده در حوزه زمان مطابق مرجع [۱۸]،

شکل ۹. توزیع تابع شاخص با استفاده از داده الاستودینامیک به منظور شناسایی ترک، (الف) توزیع دو بعدی (ب) توزیع سه بعدی.



(الف)



(ب)

Fig. 9. Contour plot of the indicator function for the identification of the cracked Aluminum plate.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش روش نمونه برداری خطی در حوزه فرکانس به همراه روش اجزای محدود طیفی جهت شناسایی آسیب در یک محیط محدود مورد بررسی قرار گرفت. روش نمونه برداری خطی، تکنیکی به منظور حل مسائل پراکندگی وارون با استفاده از پاسخ موج پراکنده شده می باشد. به طوری که در مقایسه با روش های بهینه یابی سریع تر بوده و در این حالت بر خلاف روش های تکراری نیازی به حل مستقیم مسئله نیست. اما در

۳۰ است. هر چند تعداد سنسورهای استفاده شده در حوزه زمان نسبت به فرکانس کمتر است، اما نکته قابل توجه آن است که در مجموع حل مساله پراکندگی وارون در حوزه فرکانس نیاز به امکانات سخت افزاری کمتری نسبت به حوزه زمان دارد. به بیانی دیگر چنان چه در مرجع [۱۸] اشاره شده است، حل مساله در حوزه زمان نیازمند ثبت اطلاعات در گام های زمانی مختلف در سنسورهای تعبیه شده است و همین امر سبب خواهد شد تا برای ثبت حجم زیادی از داده ها نیاز به پردازشگری با حافظه بالا باشد. از سوی دیگر هر چه گام های زمانی ثبت اطلاعات کوچک تر باشد، این نیاز بیشتر احساس می شود. از اینرو حل مساله در حوزه فرکانس هزینه محاسباتی کمتری را در برخواهد داشت.

شکل ۸. هندسه مدل آلومینیومی ترک خورده.

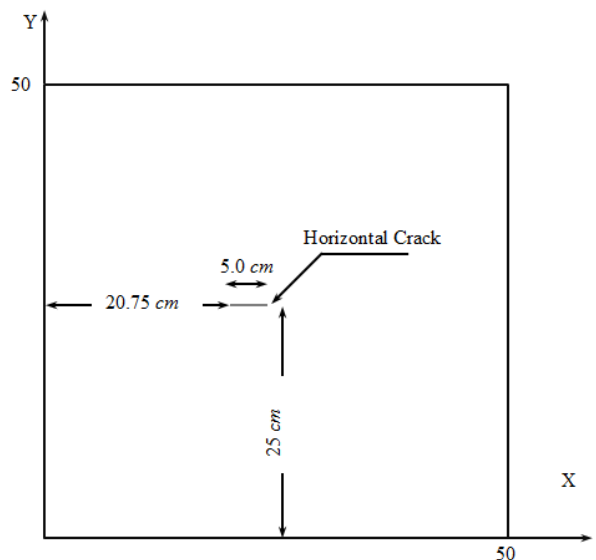


Fig. 8. The geometry of cracked plate.

- [3] Cakoni, F., Colton, D., 2006. Qualitative methods in inverse scattering theory, Springer-Verlag: Berlin, NY.
- [4] Cakoni, F., Colton, D., Monk, P., 2011. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering, SIAM.
- [5] Kirsch, A., Grinberg, N., 2008. The factorization method for inverse problems, 1 edition, Oxford University Press: USA.
- [6] Charalambopoulos, A., Anagnostopoulos, K. A., 2008. On the spectrum of the interior transmission problem in isotropic elasticity. Journal of Elasticity, vol. 90, pp. 295–313.
- [7] Potthast, R., 2001. Point sources and multipoles in inverse scattering theory, 1 edition, Taylor & Francis Group: New York.
- [8] Erhard, K., Potthast, R., 2006. A numerical study of the probe method. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 28, pp. 1597–1612.
- [9] Bonnet, M., 1995. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 15, no. 2, pp. 121–136.
- [10] Bellis, C., Bonnet, M., 2010. A FEM-based topological sensitivity approach for fast qualitative identification of buried cavities from elastodynamic overdetermined boundary data. International Journal of Solids and Structures, vol. 47, pp. 1221–1242.
- [11] Arens, T., 2001. Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering. Inverse Problems, vol. 17, no. 5, pp. 1445–1464.
- [12] Charalambopoulos, A., Gintides, D., Kiriaki, K., 2002. The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity. Inverse Problems, vol. 18, pp. 547–558.
- [13] Nintcheu Fata, S., Guzina, B. B., 2004. A linear sampling method for near field inverse problems in elastodynamics. Inverse Problems, vol. 20, no. 3, pp. 713–736.
- [14] Nintcheu Fata, S., Guzina, B. B., 2007. Elastic scatterer reconstruction via the adjoint sampling method. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 67, no. 5, pp. 1330–1352.
- [15] Guzina, B. B., Madyarov, A. I., 2006. A linear sampling approach to inverse elastic scattering in piecewise homogeneous domains. Inverse Problems, vol. 23, no. 4, pp. 1467–1493.
- [16] Dehghan Manshadi, S.H., Khaji, N. and Rahimian, M., 2014. Cavity/inclusion detection in plane linear elastic bodies using linear

مقابل به اطلاعات بیشتری برای شناسایی آسیب نیاز است. از سوی دیگر به اطلاعات محدود از پیش تعیین شده‌ای نیاز است. به بیانی دیگر در این حالت نیازی به معلوم بودن نوع آسیب (ترک، حفره، ناهمگنی و ...) نیست. اساس کار در این روش جستجو در بین نقاطی است که با عنوان نقاط نمونه شناخته می‌شوند. برای هر یک از این نقاط نمونه معادله‌ای خطی حل می‌شود. به عبارت دیگر هدف اصلی یافتن میدان جابه‌جایی از نقاط نمونه‌ای است به گونه‌ای که بر میدان جابه‌جایی تفاضلی ناشی از وجود ناهمگنی داخل قلمرو، منطبق باشد. معیاری که به منظور شناسایی مرز چشمه ثانویه معرفی می‌شود، نرم دو یا نرم در فضای متریک هیلبرت بردار توزیع $g_z(\cdot) \in L_2(S_1)$ است. در واقع نرم پاسخ برای نقاط نمونه داخل پراکنده‌ساز مورد نظر دارای مقدار محدود و برای نقاط خارج از محدوده مقداری بزرگ است. مسائل حل شده در این پژوهش نشان از کارایی روش نمونه برداری در ترکیب با روش اجزای محدود طیفی برای شناسایی ناهمگنی‌های موجود در سازه در قلمرو فرکانس دارد. بررسی نتایج نمونه‌ها نشان می‌دهد که اطلاعات لازم برای شناسایی آسیب در حوزه فرکانس و مسائل الاستودینامیک نسبت به مسائل الاستواستاتیک کمتر است. از سوی دیگر در مقایسه با حل مساله در حوزه زمان، هر چند تعداد سنسورهای استفاده شده در حوزه زمان نسبت به فرکانس کمتر است، اما نکته قابل توجه آن است که در مجموع حل مساله پراکندگی وارون در حوزه فرکانس نیاز به امکانات سخت افزاری کمتری نسبت به حوزه زمان دارد. به بیانی دیگر هزینه محاسباتی کمتری خواهد داشت. علاوه بر این، روش نمونه برداری خطی در صورت وجود نویز و خطا در داده‌ها با دقت قابل توجهی قادر به شناسایی ناهمگنی موجود در محیط خواهد بود.

منابع

- [1] Aramini, R., 2007. On some open problems in the implementation of the linear sampling method, edition, Ph.D. Thesis, University of Trento.
- [2] Aramini, R., 2011. Computational inverse scattering via qualitative methods, edition, Ph.D. Thesis, University of Trento.

- using spectral element method. Asian J Civil Eng 2009;10:361-80.
- [21] Dehghan Manshadi, S.H., Dehghan Manshadi, S.M., Amiri, H.R. and Hamzehei Javaran, S., 2018. Flaw identification for Laplace equation using the linear sampling method. Mathematics and Mechanics of Solids, 23(8), pp.1225-1236.
- sampling method. Journal of Nondestructive Evaluation, 33(1), pp.93-103.
- [17] Dehghan Manshadi, S.H. and Khaji, N., 2014. Cavity detection in a heat conductor using linear sampling method. Heat and Mass Transfer, 50(7), pp.973-984.
- [18] Khaji, N. and Dehghan Manshadi, S.H., 2015. Time domain linear sampling method for qualitative identification of buried cavities from elastodynamic over-determined boundary data. Computers & Structures, 153, pp.36-48.
- [19] K.F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, New York, 1991.
- J. D Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [20] Khaji N, Habibi M, Mirhashemian P. Modeling transient elastodynamic problems

Damage Detection in Plane Linear Elastic Bodies Using Linear Sampling Method

S.H. Dehghan Manshadi¹

¹ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran

h.d.manshadi@iauyazd.ac.ir

Abstract

In this paper, solution of inverse problems in a plane linear elastic bodies are investigated. In recent years, many studies have been conducted to develop effective approaches for damage detection in structural components. The efforts made over the last decades to overcome the mathematical challenges encountered in non-linear inverse problems may be categorized in two procedures: traditional methods, and qualitative methods. Although satisfactory results can be obtained using traditional approaches, they impose long reconstruction times associated with necessity of an accurate initial guess. These schemes require a priori information that may not be necessarily available. Consequently, the mentioned limitations have led to the conceptually distinct class of inverse scattering solutions, known as “qualitative methods.” These methods are based on non-iterative obstacle reconstruction from far- and/or near-field measurements of the scattered field which avoids incorrect model assumption. Qualitative methods may be considered as probe/sampling methods such as linear sampling method, topological sensitivity, factorization method, and point source method, which seek to determine the geometric properties of scatterers. In this regard, the LSM and the FM introduced in the inverse scattering literature of far-field acoustics for the first time, are particularly attractive. This is due to the abilities of these methods to provide accurate reconstruction of the location and shape of the unknown scatterer from measurements of near- or far-field patterns, by monitoring the behavior of the norm of regularized solution. This norm is bounded inside the targets and unbounded elsewhere. Moreover, the most interesting feature of qualitative methods is that they do not require a priori information/assumption on the scatterer and/or the investigation domain. In addition, these methods may handle multiple scatterers as easily as single ones. Furthermore, these methods involve relatively low computational cost and can be applied to various types of defects such as non-convex and not-connected ones. For this purpose, sampling method in frequency domain is introduced for cavity/crack detection in a structural element such as plate. This goal is followed by partitioning the investigated region into an arbitrary grid of sampling points, in which a linear equation is solved. The main idea of the linear sampling method is to search for a superposition of differential displacement fields which matches with a prescribed radiating solution of the homogeneous governing equation in $\Omega(D)$, for each sampling point. Although this method has been used in the context of inverse problems such as acoustics, and electromagnetism, there is no specific attempt to apply this method to identification of crack/cavities in a structural component. This study emphasizes the implementation of the sampling method in the frequency domain using spectral finite element method. A set of numerical simulations on two-dimensional problems is presented to highlight many effective features of the proposed qualitative identification method.

Keywords: Qualitative inverse problems; linear sampling method; damage detection; elastodynamic; spectral finite element method