

آنالیز حساسیت طراحی در مسائل مکانیک جامدات تحت بار حرارتی و مکانیکی با روش متغیرهای مختلط

مجتبی شیخی ازغندی^۱، مهدی حسنزاده^{۲*}

۱. استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران،
۲. مربی، گروه مهندسی مکانیک، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، گرگان، ایران

*m.hassanzadeh@gorganiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۹/۰۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۲/۲۷

چکیده

در موارد زیادی از مسائل مکانیک جامدات، جسم به صورت همزمان تحت تاثیر نیروی مکانیکی و بار حرارتی قرار دارد. یکی از پارامترهای مهم در طراحی بهینه مسائل مهندسی استفاده از مقادیر حساسیت رفتار سازه نسبت به مقادیر متغیرهای طراحی است. مهم‌ترین نقص بیشتر روش‌ها برای محاسبه مقادیر حساسیت، عدم استقلال آن‌ها به اندازه طول گام تغییر است که منجر به عدم رسیدن به جواب‌های کارا می‌شود. این روش پیشنهادی با استفاده از بسط سری تیلور در فضای مختلط، این مشکل را برطرف کرده و می‌تواند با انتخاب اندازه گام به دلخواه کوچک به جواب‌های دقیق و مطمئن برسد. علاوه بر این استفاده از روش مذکور محدودیتی نداشته و ایجاد ارتباط بین آن و روش اجزای محدود به راحتی امکان‌پذیر است و در خلال تحلیل مسئله فقط نیاز به تغییر در شبکه‌بندی جسم در طول محور موهومی دارد. در این مقاله برای بررسی کارایی، اعتبار و چگونگی عملکرد روش پیشنهادی، حل چندین نمونه ترمومکانیکی ارائه شده است. جواب‌های به دست آمده به کمک روش متغیرهای مختلط دقیق، پایدار و قابل اطمینان بوده و در مقایسه با دیگر روش‌ها دارای کارایی بهتری است و هیچ وابستگی به اندازه گام تغییر ندارد. مقدار خطای نسبی اعداد حساسیت بر اساس تغییر طول گام از 10^{-1} تا 10^{-20} در مسئله اول $0/01$ درصد، در مسئله دوم در حالت اول و دوم به ترتیب $0/06$ و $0/002$ درصد و در دو حالت در نظر گرفته شده مسئله سوم $0/23$ و $0/69$ درصد به دست آمده است. روش متغیر مختلط ارائه شده در این پژوهش برای حل گسترده‌ای از مسائل مهندسی با حجم محاسبات کم و زیاد و همچنین با متغیرهای ساده و پیچیده می‌تواند به کار برده شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل حساسیت، مسائل ترمومکانیکی، روش متغیرهای مختلط، روش اجزای محدود

۱- مقدمه

حرارتی نوعی تنش است که در اثر وجود اختلاف دما (گرادیان دما) و یا تفاوت مشخصات مکانیکی مانند ضریب انبساط حرارتی در نقاط مختلف سازه مورد بررسی به وجود می‌آید. تنش

یکی از مهم‌ترین پارامترهایی که باید در طراحی سازه‌ها و اجزای ماشین آلات مورد توجه قرار گیرد، تنش‌های حرارتی است^۱. تنش

حرارتی می‌تواند آثار مخربی در سازه داشته باشد که از آن جمله می‌توان به ایجاد ترک و در نهایت خرابی اجزای آن اشاره کرد. از این رو بررسی، تحلیل و طراحی مسائلی که علاوه بر بارهای مکانیکی، تحت بار حرارتی نیز قرار می‌گیرند و به آن مسائل ترمومکانیکی اطلاق می‌شود، دارای درجه اهمیت بالایی است. آنالیز حساسیت یکی از ابزارهای مناسب برای درک درست از چگونگی پیش‌بینی رفتار سازه در اثر تغییر در پارامترهای مختلف و لازمه رسیدن به طرح بهینه سازه‌ها و اجزای ماشین آلات است. در حالت کلی دو دسته روش بهینه‌سازی شامل روش‌های فراابتکاری و کلاسیک وجود دارد [1]. روش‌های فراکاووشی^۱ که به روش‌های مرتبه صفر نیز مشهورند، در هنگام فرآیند بهینه‌سازی نیازی به محاسبه مشتقات توابع هدف و قیود ندارند [2].

روش‌های کلاسیک^۲ روش‌هایی هستند که در هنگام فرآیند بهینه‌سازی مشتقات مرتبه اول و یا مرتبه دوم توابع هدف و قیود به کارگیری شوند. برای طراحی بهینه مسائل مهندسی الگوریتم‌های کلاسیک کارآمد بسیاری مانند جهات امکان پذیر^۳، نیوتن و... وجود دارند [3]. این روش‌ها برای یافتن جهت جستجو در هر مرحله فرآیند بهینه‌سازی، از مشتقات توابع هدف و قیود نسبت به پارامترهای طراحی بهره می‌برند. وجود خطا در تعیین این مشتقات کارایی الگوریتم‌های بهینه‌سازی را به شدت پایین آورده و باعث منحرف کردن مسیر جستجو در داخل فضای طراحی شده و منجر به عدم همگرایی و نرسیدن به جواب قابل قبول می‌شوند.

در هنگام فرآیند طراحی مسائل، تعیین مشتقات توابع قیود و هدف، همان محاسبه حساسیت پارامترهای موثر در رفتار سازه نظیر جابه‌جایی، کرنش، تنش و ... نسبت به متغیرهای طراحی از جمله مشخصات هندسی اجزای سازه مانند سطح مقطع اعضا است. بنابراین استفاده از راهکار دقیق و کارا در انجام آنالیز حساسیت برای فرآیند بهینه‌سازی سازه از اهمیت بالایی برخوردار است.

ساده‌ترین روش محاسبه مشتقات توابع به صورت عددی،

روش تفاضل محدود^۴ (FDM) است. این روش به لحاظ پیاده‌سازی دارای پیچیدگی نیست و بنا به عادت برای ارزیابی مشتقات توابع چند متغیره ضمنی استفاده می‌شود. پیاده‌سازی روش مذکور شامل تغییر پارامتر، تجزیه و تحلیل مجدد و تعیین نسبت تغییر در تابع هدف براساس تغییر در پارامتر ورودی است. با این حال، تخمین مشتقات توابع تنها زمانی دقیق است که اندازه تغییر در پارامتر ورودی (طول گام تغییر) کوچک باشد. از سوی دیگر، هنگام تفریق اعداد نزدیک به مساوی خطای گرد کردن، یکی از منابع تولید خطا در محاسبات است. بنابراین، نتایج به دست آمده با روش تفاضل محدود نسبت به اندازه گام تغییر پارامتر ورودی حساس است و بنابراین باید از انتخاب بیش از حد بزرگ یا خیلی کوچک آن دوری کرد. به طور معمول، برای تعیین اندازه گام نیاز به سعی و خطا است تا مقادیر مشتقات توابع به صورت قابل قبولی به دست آید. بنابراین روشی مانند تفاضل محدود در تحلیل حساسیت مسائل ترمومکانیک دارای کارایی قابل قبولی نیست و پژوهشگران در بیشتر موارد مجبور به استفاده از روابط تحلیلی برای رسیدن به جواب‌های دقیق‌تر می‌شوند که قابل اعمال برای بیشتر مسائل نیست.

یکی از روش‌های قدرتمند و کارا برای محاسبه حساسیت در مسائل مهندسی که نسبت به روش تفاضل محدود دارای مزایای زیادی است، روش متغیرهای مختلطه است. روش متغیرهای مختلط، یک روش قدرتمند برای حل بسیاری از مسائل در زمینه‌های مختلف مهندسی است [4]. در این روش، مشتق مرتبه اول از طریق تغییر پارامتر موردنظر در طول محور موهومی محاسبه می‌شود. از آنجایی که در روش متغیرهای مختلط از عملیات تفریق در هنگام تحلیل مسئله استفاده نمی‌شود، بنابراین بحث وجود خطای گرد کردن مطرح نیست و بنابراین امکان انتخاب هر اندازه گام حتی به مقادیر خیلی کوچک خللی در حل مسئله ایجاد نکرده و روش بسیار دقیق برای محاسبه عددی مشتقات مرتبه اول است. به عبارت بهتر در این روش برای رسیدن به دقت موردنظر می‌توان طول گام‌های کوچکتری را برای حل

مسئله انتخاب کرد.

$$k\mu_i n^i = q \quad \text{روی منحنی } c_\mu^1$$

$$k\mu_i n^i + h(\mu - \mu_\infty) = 0 \quad \text{روی منحنی } c_\mu^2$$

در روابط (۱)، S منبع گرمای داخلی، μ اختلاف بین دمای مطلق و دمای مرجع در حالت بدون تنش جسم، μ_0 دمای معلوم جسم، μ_∞ دمای محیط، n^i مولفه نام برداری که عمود بر مرز، k ضریب هدایت حرارتی، h ضریب انتقال حرارت همرفتی، q بردار شارش گرما، c_μ^0 و c_μ^1 به ترتیب مرزها با دما، شار حرارتی و گرمای همرفتی معلوم است. بالانویس و زیرنویس پارامترها به ترتیب مولفه و مشتق نسبت به متغیر میدان را نشان می‌دهد. شکل ضعیف روابط (۱) با به‌کارگیری دمای مجازی $\bar{\mu}$ و انجام عملیات جبری به صورت رابطه (۲) خواهد شد.

$$\begin{aligned} \int_D k\mu_{,i}\bar{\mu}_{,i}dD + \int_{c_\mu^2} h\mu\bar{\mu}dc \\ = \int_D S\bar{\mu}dD + \int_{c_\mu^1} q\bar{\mu}dc \\ + \int_{c_\mu^2} h\mu_\infty\bar{\mu}dc \end{aligned} \quad (2)$$

برای تمام $\bar{\mu} \in J$ که J فضای دمای مجاز سینماتیکی و H^1 فضای سوبولو از مرتبه یک است، شکل دوخطی انرژی و شکل خطی بار برای دماها به صورت روابط زیر قابل تعریف است. با استفاده از این روابط، معادله (۲) را می‌توان به شکل ساده‌تر به صورت رابطه (۵) بازنویسی کرد.

$$A(\mu, \bar{\mu}) \equiv \int_D k\mu_{,i}\bar{\mu}_{,i}dD + \int_{c_\mu^2} h\mu\bar{\mu}dc \quad (3)$$

$$L(\bar{\mu}) \equiv \int_D S\bar{\mu}dD + \int_{c_\mu^1} q\bar{\mu}dc + \int_{c_\mu^2} h\mu_\infty\bar{\mu}dc \quad (4)$$

$$A(\mu, \bar{\mu}) = L(\bar{\mu}) \quad \bar{\mu} \in U \quad \text{برای تمام } \bar{\mu} \in U \quad (5)$$

از طرفی دیگر معادلات تعادل تنش برای مسائل مکانیک جامدات تحت نیرو در حالت سه بعدی را می‌توان به صورت رابطه (۶) نوشت [21].

$$-\sigma_{,j}^{ij} = f^i \quad \text{روی فضای } D \quad (6)$$

در رابطه (۶)، f^i مولفه نام نیروی حجمی است. علاوه بر این σ^{ij} تانسور تنش بوده و از رابطه (۷) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(u, \mu) &= C^{ijmn}(T)[\epsilon^{mn}(u) \\ &\quad - \delta^{mn}\alpha\mu] \\ &= C^{ijmn}(T)\epsilon^{mn}(u) \\ &\quad - \beta(T)\delta^{ij}\mu \end{aligned} \quad (7)$$

روش متغیرهای مختلط تاکنون در زمینه‌های مختلف مهندسی استفاده شده است. در دینامیک سیالات روش مذکور برای یافتن اعداد حساسیت پارامترهای مربوطه در حل معادله ناویر استوکس مورد استفاده قرار گرفته است [5]. علاوه بر این، پژوهشگران با به‌کارگیری روش متغیرهای مختلط و اجزای محدود در زمینه آیرودینامیک به نتیجه رسیده‌اند [6-7]. روش ذکر شده به منظور محاسبه حساسیت پارامترهای طراحی موثر در رفتار مسائل مختلف در زمینه بهینه‌سازی مسائل دینامیک سیالاتی [8]، سازه‌های فضایی [9]، مقادیر ویژه [10]، جریان سیالات [11]، انتقال حرارت [12]، قابلیت اطمینان سازه‌ها [13]، شناسایی پارامترها [14]، مکانیک شکست [15]، سیستم‌های دینامیکی [16]، رشد ترک [17]، تنش پس‌ماند [18]، شکل سازه [19] و ... استفاده شده است. روش متغیرهای مختلط در پژوهشی دیگر با کمک یک برنامه اجزای محدود در مکانیک جامدات به منظور محاسبه حساسیت‌های شکل با دقت قابل قبول به‌کارگیری شد و مشخص شد که دقت مشتقات، تابعی از شبکه‌بندی اجزای محدود است [20].

بعد از بررسی پیشینه پژوهش در خصوص روش متغیرهای مختلط مشاهده شد که تاکنون از این روش در تحلیل مسائل ترمومکانیکی استفاده نشده است. با توجه به قدرت روش متغیرهای مختلط و همچنین اهمیت تحلیل دقیق مسائل ترمومکانیکی که دارای کاربردهای مهمی در صنعت هستند، در این پژوهش به بررسی این مسائل با استفاده از روش متغیرهای مختلط پرداخته می‌شود.

۲- آنالیز مسائل ترمومکانیکی

همان‌گونه که پیشتر ذکر شد، مسائل ترمومکانیکی مسائلی هستند که هم‌زمان تحت نیروی مکانیکی و بار حرارتی قرار دارند. معادلات حاکم بر این‌گونه مسائل، به صورت روابط (۱) است [21].

$$\begin{aligned} -k\mu_{,ii} &= S & \text{روی فضای } D \\ \mu &= \mu_0 & \text{روی منحنی } c_\mu^0 \end{aligned} \quad (1)$$

نیروی ناشی از بار مکانیکی و F^{th} نیروی ناشی از بار حرارتی است. چگونگی محاسبه بقیه پارامترهای به کار رفته در روابط (۱۲) در روابط (۱۳) بیان شده است.

$$\bar{\Theta}^T K^{th} \Theta = \bar{\Theta}^T Q \quad (12)$$

$$\bar{u}^T K u = \bar{u}^T (F + F^{th})$$

$$K^{th} = \int_D k B_T^T B_T dD + \int_{c_{\mu}^2} h M^T M dc$$

$$Q = \int_D S M^T dD + \int_{c_{\mu}^2} q M^T dc$$

$$+ \int_{c_{\mu}^2} h \mu_{\infty} M^T dc \quad (13)$$

$$K = \int_D B^T C B dD$$

$$F = \int_D f N^T dD + \int_{c^2} t N^T dc$$

$$F^{th} = \int_D \beta B^T g \mu dD$$

بر اساس مدل سازی روش اجزای محدود، روابط فوق برای کل جسم را می توان به صورت روابط (۱۴) خلاصه کرد.

$$K^{th} \Theta = Q \quad (14)$$

$$K u = F + F^{th}$$

مقادیر ماتریس های سفتی و بردارهای نیرویی و جابه جایی K ، Q ، K^{th} و F برای کل جسم، با محاسبه هریک از این پارامترها روی یک المان و سپس روی همگذاری آنها محاسبه می شوند.

۴- روش متغیرهای مختلط

روش متغیرهای مختلط اولین بار توسط لینس و مولر توسعه داده شد [23]. عیب بیشتر روش های معمول مشتق گیری در فضای حقیقی در درجه اول زمان محاسباتی آن و سپس عدم دقت مشتقات به دست آمده است. اولین عیب ذکر شده از این واقعیت سرچشمه می گیرد که استفاده از رابطه مذکور نیاز به حل با همگرایی قابل قبول برای محاسبه توابع دارد. دومین عیب به این علت است که مشتقات توابع به اندازه گام تغییر وابسته بوده و در بیشتر موارد این وابستگی منجر به عدم رسیدن به جواب مطلوب می شود. برای کمینه کردن خطای برش، اندازه گام تغییر باید کوچک انتخاب می شود. اما اندازه گام بیش از اندازه کوچک، ممکن است باعث تولید خطای از بین رفتن ارقام بامعنی شود

در رابطه (۷)، T دمای جسم، ϵ تانسور کرنش، α ضریب انبساط حرارتی، δ^{ij} دلتای کرونکر، C ماتریس ضرایب الاستیک ماده و β مدول حرارتی است. با ساده سازی روابط فوق شکل ضعیف معادله تعادل در فضای جابه جایی مجازی سینماتیکی U می تواند به فرم زیر در آید.

$$\int_D \sigma^{ij}(u, \mu) \epsilon^{ij}(\bar{u}) dD \quad \text{برای} \quad (8)$$

$$= \int_D f^i \bar{u}^i dD \quad \text{تمام} \quad \bar{u} \in U$$

$$+ \int_{c^2} t^i \bar{u}^i dc$$

با تعریف شکل دوخطی انرژی و شکل خطی بار، روابط فوق را می توان برای تمام $\bar{u} \in U$ ، به صورت $a(u, \bar{u}) = l(\bar{u})$ بازنویسی کرد که چگونگی محاسبه پارامترهای ارائه شده در روابط (۹) آورده شده است.

$$a(u, \bar{u}) = \int_D C^{ijmn}(T) \epsilon^{mn}(u) \epsilon^{ij}(\bar{u}) dD$$

$$l(\bar{u}) = \int_D (f^i \bar{u}^i + \beta(T) \mu \bar{u}_i^i) dD \quad (9)$$

$$+ \int_{c^2} t^i \bar{u}^i dc$$

۳- تحلیل مسئله با اجزای محدود

برای یافتن یک جواب قابل قبول به کمک معادلات حاکم بر مسئله، روش اجزای محدود یکی از بهترین گزینه ها است. با فرض مقادیر پیوسته برای جابه جایی و دما (u و μ)، مقادیر این پارامترها در یک المان گره ای بر حسب مقادیر گره ای شامل u_i و θ_i و با استفاده از توابع شکل (M و N) قابل محاسبه است. در این صورت تانسور کرنش را می توان از روی مقادیر جابه جایی به کمک روابط (۱۰) به دست آورد.

$$u = N_i u_i \quad (10)$$

$$\epsilon = B u$$

در این رابطه B ماتریس کرنش جابه جایی است [22]. از طرفی دیگر با استفاده از تعریف تابع شکل می توان مشتق دما را به صورت رابطه (۱۱) بیان کرد. در این رابطه B_T بردار مشتق تابع شکل نسبت به متغیرهای x و y است.

$$\nabla \mu = \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} \right\}^T = B_T \Theta \quad (11)$$

با استفاده از روابط فوق، رابطه (۸) می تواند به صورت روابط (۱۲) بازنویسی شود. در این روابط $F, g = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$

حساسیت پارامترهای هندسی، گام کوچکی باید در مختصات گره‌ای مناسب ایجاد شود. البته این گام باید به صورت موهومی باشد. برای این منظور اولین گره قرار گرفته شده در پارامتر مورد نظر انتخاب می‌شود و تمام گره‌های دیگر در مدل هندسی مسئله بدون تغییر باقی می‌مانند. در صورتی که هدف مسئله محاسبه حساسیت رفتار سازه نسبت به ویژگی‌های مکانیکی باشد، برای همان خاصیت مورد مطالعه گام تغییر در نظر گرفته می‌شود. در این صورت نیز برای محاسبه اعداد حساسیت از رابطه (۱۶) استفاده خواهد شد.

۵- تحلیل حساسیت با متغیرهای مختلط

برای آشنایی با چگونگی کاربرد روش متغیرهای مختلط به منظور یافتن اعداد حساسیت پارامترهای مختلف و همچنین تایید و اعتبارسنجی روش مذکور، در این بخش تحلیل سه نمونه مختلف ارائه شده است. به عنوان نمونه اول، یک تیر طره مرکب به صورت شکل (۱) در نظر گرفته شده است. این سازه دارای دو جنس با ارتفاع‌های برابر بوده و اختلاف دمای تار بالایی و پایینی ۲۰۰ درجه سانتیگراد است به گونه‌ای که دمای تار بالایی آن ۱۰۰ و تار پایینی ۳۰۰ درجه سانتیگراد است. قسمت بالایی این سازه از فولاد با مدول یانگ 210 GPa ، نسبت پواسون 0.3 ، ضریب هدایت و انبساط حرارتی به ترتیب برابر با $27 \times 10^{-6} \text{ W/(mm}^2 \cdot \text{C)}$ و $1/C$ و 10^{-5} است. قسمت پایینی سازه نیز از آلومینیوم با مدول یانگ 70 GPa ، نسبت پواسون 0.3 ، ضریب هدایت و انبساط حرارتی به ترتیب برابر با $27 \times 10^{-6} \text{ W/(mm}^2 \cdot \text{C)}$ و $1/C$ و $2/5 \times 10^{-5}$ است. هدف مسئله محاسبه اعداد حساسیت جابه‌جایی انتهای آزاد سازه نسبت به طول آن است. تحلیل مسئله با استفاده از روش اجزای محدود، جابه‌جایی انتهایی 0.6707 میلی‌متر را تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. در جدول (۱) مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده با استفاده از روش متغیرهای مختلط و مرجع [21] ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، اختلاف ناچیزی بین این نتایج وجود دارد و در دو حالت خطایی نسبی در حدود 0.1 و 0.4 دارد.

[24]. از طرف دیگر مقدار بهینه برای اندازه گام از قبل مشخص نیست و ممکن است از یک تابع به تابع دیگر و از یک متغیر طراحی به متغیر دیگر تغییر کند. برای از بین رفتن مشکل مطرح شده در این پژوهش سری تیلور تابع با استفاده از یک گام مختلط بسط داده شده و رابطه (۱۵) به دست آمده است. با ساده‌سازی این رابطه و در نظر گرفتن قسمت موهومی آن، مقدار مشتق تابع از رابطه (۱۶) قابل محاسبه است. در این رابطه خطای مشتق از مرتبه دو است. بنابراین با محاسبه تابع با آرگومان مختلط، بدون به وجود آمدن خطای تفریق، تابع و مشتق آن به دست می‌آید. در این صورت قسمت حقیقی، مقدار تابع است.

در روش متغیرهای مختلط نیازی به استفاده از عبارت‌های با درجه بالاتر در سری تیلور نیست و می‌توان از آنها چشمپوشی کرد. چرا که درست است که استفاده از درجات بالاتر باعث بالا رفتن دقت نتایج می‌شود، ولی از طرفی دیگر هزینه محاسباتی و پیچیدگی حل مسئله را بیشتر می‌کند. در این روش برای رسیدن به دقت مورد نظر می‌توان طول گام‌های کوچکتری را برای حل مسئله انتخاب کرد. در این صورت تاثیر عبارت‌های با درجات بالاتر تاثیر خیلی ناچیزی در جواب مسئله دارند.

$$f(x + i\Delta x) = f(x) + i\Delta x \frac{df}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{i\Delta x^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (15)$$

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\text{Im}[f(x + i\Delta x)]}{\Delta x} \quad (16)$$

با حل معادله اول (۱۴)، مقادیر پارامترهای θ به دست می‌آید و با داشتن توزیع دمای محاسبه شده در جسم می‌توان آثار آن را روی تحلیل اجزای محدود استاتیک (معادله دوم ۱۴) اعمال کرد. تغییر دمای θ باعث ایجاد کرنش حرارتی می‌شود که اثر آن به صورت بار حرارتی F^{th} در معادله (۱۴) ظاهر شده است. برنامه اجزای محدود نوشته شده از توابع شکل خطی برای المان مربعی چهار گره‌ای دو بعدی استفاده می‌کند. معادلات توابع شکل در این نوع المان را می‌توان در بیشتر کتاب‌های اجزای محدود پیدا کرد [25]. در این پژوهش، بعد از حل سیستم معادلات برای دما و جابه‌جایی‌ها، کرنش‌ها و به تبع آن تنش‌ها در هر گره به صورت المان به المان و با استفاده از روابط حاکمه بر اساس توابع شکل و جابه‌جایی گره‌ها محاسبه می‌شود. به منظور محاسبه اعداد

نسبت به تغییر اندازه طول گام مشاهده نمی‌شود. بنابراین به هر میزان دلخواه می‌توان طول گام را کوچک در نظر گرفت و به جواب مطلوب رسید. حدود تغییرات حساسیت جابه‌جایی نوک تیر نسبت به طول تیر بین تمامی طول گام‌های ارائه شده در جدول (۲) کمتر از ۰/۱ درصد است.

جدول ۱. مقایسه نتایج تحلیل تیر یکسرگردار

Relative error	[21]	Present study	tip displacement sensitivity
0.1	0.6714	0.6707	
0.4	0.02684	0.02695	

Table 1. Comparison of analysis results for cantilever beam

شکل ۲. مقایسه حساسیت جابه‌جایی سر آزاد تیر نسبت به طول تیر با روش‌های مختلف

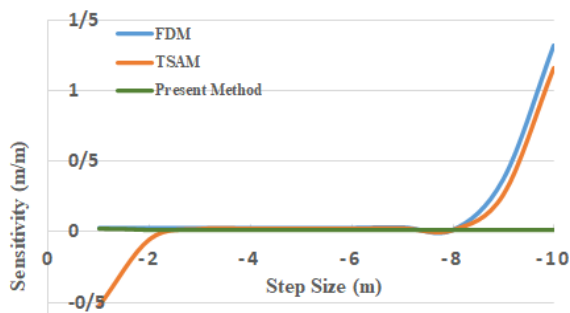


Fig. 2. Comparison of the sensitivity of the head of the beam to the length of it by different methods

برای مقایسه حجم محاسباتی و سرعت روش‌ها قابل ذکر است که زمان اجرای تحلیل این مسئله با استفاده از روش نیمه تحلیلی، تفاضل محدود و روش متغیرهای مختلط به ترتیب برابر ۱۱۰/۸۷، ۱۳۵/۶۱ و ۱۳۱/۱۵ ثانیه روی یک کامپیوتر یکسان طول کشیده است.

به عنوان نمونه دوم، یک دیسک همگن با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o در نظر گرفته شده است. جنس دیسک از نوع الاستیک خطی فرض شده و دارای ویژگی‌های مکانیکی مدول یانگ، ضریب پواسون، ضریب انبساط و هدایت حرارتی به صورت E, ν, α و k است. دمای سطوح داخلی و خارجی $T(r_o) = T^o$ و $T(r_i) = T^i$ و همچنین مقادیر تنش روی این سطوح دیسک $(\sigma_r(r_i) = \sigma_r(r_o) = 0)$ به عنوان شرایط مرزی در نظر گرفته شده است.

شکل ۱. هندسه تیر ساخته شده از دو نوع ماده مختلف

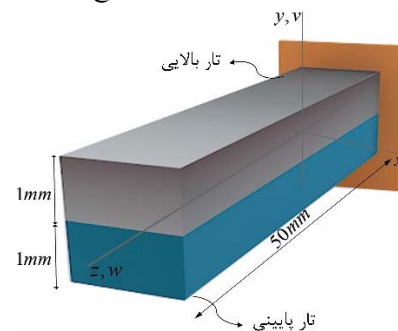


Fig. 1. Beam geometry made of two different types of materials

در جدول (۲) مقادیر اعداد حساسیت جابه‌جایی انتهای آزاد تیر نسبت به طول تیر برای مقادیر مختلف طول گام با استفاده از روش متغیرهای مختلط، تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی مرسوم (TSAM) ارائه شده و به مقایسه نتایج پرداخته است.

نتایج ارائه شده در جدول (۲)، کارایی بالای تحلیل حساسیت طراحی مسائل ترمومکانیکی با استفاده از متغیر مختلط را تایید می‌کند. روش نیمه تحلیلی نیازمند تغییر کوچک به اندازه 10^{-4} برای به دست آوردن حساسیت با دقت قابل قبول است. در این مسئله روش تفاضل محدود نیز دارای نتایج خوبی نیست و با کوچک شدن مقادیر طول گام، اعداد حساسیت دارای خطاهای خیلی زیادی می‌شود. برای درک بهتر دقت روش متغیرهای مختلط، مقادیر اعداد حساسیت به دست آمده با سه روش ارائه شده در این جدول، در شکل (۲) ارائه شده است. روشن است که روش تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی همگرایی قابل اطمینانی نسبت به هر طول گام تغییری ندارند و کارایی مناسب برای روش نیمه تحلیلی مرسوم تنها در محدوده 10^{-3} تا 10^{-6} و برای روش تفاضل محدود در محدوده 10^{-1} تا 10^{-6} دیده می‌شود.

همان‌گونه که در شکل روشن است، افزایش ناگهانی خطا، به ویژه در محدوده طول گام کوچکتر از 10^{-10} به شدت صعودی است. علاوه بر این با کوچکتر شدن طول گام، روش‌های تفاضل محدود و نیمه تحلیلی تغییرات آنالیز حساسیت نوسانی بوده از مقدار مثبت به منفی و بالعکس تغییر پیدا کرده است و با کوچکتر شدن زیاد طول گام قادر به رسیدن هیچ‌گونه جوابی نیست. در نتیجه همگرایی مسئله بسیار نامنظم بوده و در عمل تمایل به واگرایی دارد. در حل این مسئله با روش متغیرهای مختلط، خطای گردکردن دیده نمی‌شود و تغییراتی در شکل برای اعداد حساسیت

واگرایی جواب برای دو روش تفاضل محدود و نیمه تحلیلی رخ داده است.

جهت مقایسه حجم محاسباتی و سرعت روش ها قابل ذکر است که زمان اجرای تحلیل این مسئله با استفاده از روش نیمه تحلیلی، تفاضل محدود و روش متغیرهای مختلط در حالت اول به ترتیب برابر ۶۴/۴۱، ۶۰/۷۶ و ۵۱/۴۵ ثانیه و در حالت دوم ۶۴/۸۷، ۵۹/۴۲ و ۵۲/۹۳ ثانیه بر روی یک کامپیوتر یکسان طول کشیده است.

به عنوان نمونه آخر، یک تیر دو سرگیردار به طول L با اندازه سطح مقطع متغیر که به صورت خطی نسبت به طول آن (x) عوض می شود، در نظر گرفته شده است. ارتفاع تیر از مقدار h_1 در یک سر تیر به مقدار h_2 در طرف دیگر تغییر می کند. عرض تیر (b) در کل طول تیر ثابت بوده و مقادیر مدول یانگ و ضرایب انبساط حرارتی به ترتیب برابر با E و α است. به این سازه درجه حرارتی بین صفر تا ۱۰۰۰ درجه سانتی گراد اعمال می شود. با توجه به مقید بودن تیر در راستای طولی، اعمال این درجه حرارت باعث به وجود آمدن تنش حرارتی در آن می شود. رابطه تنش ناشی از حرارت و همچنین محاسبه اعداد حساسیت تنش نسبت به ارتفاع های دو سر تیر به صورت تحلیلی در [21] آورده شده است. برای تحلیل سازه از شرایط مرزی عایق روی تمامی سطوح به جز دو سر انتهایی استفاده شده است. طول و عرض تیر، به ترتیب برابر با ۵۰ و یک میلی متر انتخاب شده است. تنش و اعداد حساسیت تنش به دست آمده از حل دقیق و تحلیل اجزای محدود برای گام 10^{-5} در جدول (۵) ارائه شده است.

خطای تنش برای مدل اجزای محدود در این حالت کمتر از سه درصد است که مربوط به تنش های محاسبه شده در مرزها است. در سایر نقاط خطا بسیار پایین تر است. مقادیر مدول یانگ، نسبت پواسون و ضریب انبساط حرارتی سازه تیر به ترتیب $200 GPa$ ، 0.3 و $1/C \times 10^{-5}$ است. در این مسئله مقادیر اعداد حساسیت تنش به دست آمده با هر سه روش دارای دقت خوبی است. روش ارائه شده برای محاسبه اعداد حساسیت تنش نسبت به ارتفاع دو سر تیر با تغییر طول نیز دارای نتیجه مطلوبی است.

جدول ۲. تغییرات جابه جایی انتهایی تیر نسبت به تغییر طول آن

Log h	Present study	FDM	TSAM
-01	0.026952846	0.026946346	-0.51679407
-02	0.026950132	0.026950099	-0.04609850
-03	0.026950099	0.02694975	0.02617816
-04	0.0269501	0.026947789	0.02694173
-05	0.026950101	0.026977064	0.02698025
-06	0.026950098	0.026814055	0.02699473
-07	0.026950102	0.031566882	0.03027756
-08	0.026950099	0.012247658	0.01757322
-09	0.026950102	0.372207099	0.26783202
-10	0.0269501	1.320574761	1.16306558
-12	0.026950101	-59.58594729	-168.061922
-14	0.026950101	-14591.23378	8580.98836
-15	0.0269501	0.0	0.0

Table 2. Changes in the displacement of the end of the beam relative to the change in its length

در این مسئله، هدف محاسبه تغییرات انرژی کرنشی نسبت پارامترهای هندسی مسئله شامل شعاع های r_i و r_o است. تحلیل مسئله با استفاده از برنامه نوشته شده و همچنین نرم افزار آباکوس انجام شده است. برای تایید دقت برنامه تحلیلی نوشته شده در نرم افزار متلب، چگونگی توزیع کرنش در نقاط مختلف دیسک در شکل (۳) آورده شده است. با مقایسه دو قسمت این شکل، همخوانی نتایج تایید می شود. بعد از تایید نتایج تحلیل با استفاده از برنامه مذکور، مقادیر اعداد حساسیت به کمک روش متغیرهای مختلط محاسبه می شود.

در جداول (۳ و ۴) مقادیر اعداد حساسیت انرژی کرنشی به ازای مقادیر مختلف اندازه گام با استفاده از روش های متغیر مختلط، تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی ارائه شده است. از مقایسه نتایج ارائه شده، دوباره کارایی بالایی برای محاسبه اعداد حساسیت طراحی با استفاده از روش متغیرهای مختلط دیده می شود. نتایج نشان می دهد که همگرایی مطمئنی صرف نظر از اندازه طول گام تغییر وجود دارد. در این نمونه بازه مطمئن برای طول گام برای دو روش دیگر نسبت به نمونه قبل وسیع تر است. علت این مورد این است که چرخش المان در این مسئله کمتر است. در روش متغیرهای مختلط دامنه تغییرات حساسیت انرژی کرنشی دیسک نسبت به شعاع داخلی و خارجی بین تمامی طول گام های ارائه شده در جدول (۳ و ۴) به ترتیب کمتر از ۰/۰۶ و ۰/۰۲ درصد است. در این حالت نیز با کاهش زیاد طول گام،

شکل ۳. چگونگی توزیع کرنش در دیسک

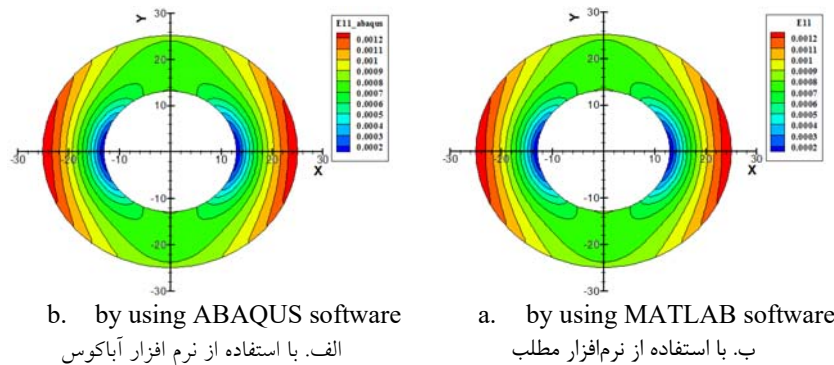


Fig. 3. The distribution of strain on disk

برای بررسی اثر طول گام در مقادیر اعداد حساسیت تنش، در نقطه‌ای به فاصله ۳۰ میلی‌متر از یک سر تیر مقادیر آنها در جداول (۶ و ۷) آورده شده است. در این مورد نیز دوباره برتری روش متغیرهای مختلط نسبت به دو روش دیگر واضح است. نتایج حاکی از این دارد که بازه طول گام مانند مسئله قبلی وسیع بوده و این به دلیل عدم چرخش المان است. در این نمونه خطای برشی برای هر سه روش قابل مشاهده نیست. اما خطای گرد کردن برای دو روش تفاضل محدود و نیمه‌تحلیلی مشهود است. در روش متغیرهای مختلط دامنه تغییرات حساسیت تنش نسبت به ارتفاع ابتدایی و انتهایی تیر بین تمامی طول گام‌های ارائه شده در جدول (۶ و ۷) به ترتیب کمتر از ۰/۲۳ و ۰/۶۹ درصد است.

برای مقایسه حجم محاسباتی و سرعت روش‌ها قابل ذکر است که زمان اجرای تحلیل این مسئله با استفاده از روش نیمه تحلیلی، تفاضل محدود و روش متغیرهای مختلط در حالت اول به ترتیب برابر ۸/۰۱، ۷/۲۳ و ۵/۶۲ ثانیه و در حالت دوم ۶/۲۸، ۷/۳۶ و ۵/۴۹ ثانیه روی یک کامپیوتر یکسان طول کشیده است.

۶- نتیجه‌گیری

هدف از پژوهش حاضر، محاسبه حساسیت طراحی نسبت به پارامترهای هندسی در مسائل ترمومکانیکی با استفاده از روش متغیرهای مختلط بود. مهم‌ترین نقطه ضعف بیشتر روش‌های دیگر، وابستگی مقادیر حساسیت به اندازه طول گام تغییر است. در این مقاله برای برطرف کردن این معضل از روش متغیرهای مختلط بهره گرفت.

جدول ۳. تغییرات انرژی کرنشی نسبت به تغییر شعاع داخلی

Log h	Sensitivity		
	SAM	FDM	Present study
-1	-0.69263583	-0.41821325	-0.417695581
-2	-0.43932132	-0.41795692	-0.417951744
-3	-0.42001759	-0.41795435	-0.417954306
-4	-0.41815991	-0.41795433	-0.417954332
-5	-0.41797488	-0.41795433	-0.417954332
-6	-0.41795637	-0.41795432	-0.417954332
-7	-0.41795452	-0.41795437	-0.417954332
-8	-0.41795473	-0.41795598	-0.417954332
-9	-0.41795100	-0.41796255	-0.417954332
-10	-0.41795900	-0.41768366	-0.417954332
-12	-0.41922021	-0.41122660	-0.417954332
-14	-0.62172489	-0.08881784	-0.417954332
-20	0.0	0.0	-0.417954332

Table 3. Changes in strain energy relative to change in internal radius

جدول ۴. تغییرات انرژی کرنشی نسبت به تغییر شعاع خارجی

log h	Sensitivity		
	CVM	CVM	Present study
-1	1.021915465	1.05882479	1.058784
-2	1.047724898	1.058804725	1.058804
-3	1.057681095	1.058804524	1.058805
-4	1.058692041	1.058804522	1.058805
-5	1.058793271	1.058804521	1.058805
-6	1.058803389	1.058804528	1.058805
-7	1.058804386	1.05880452	1.058805
-8	1.058803978	1.058804866	1.058805
-9	1.058808152	1.058802823	1.058805
-10	1.058770849	1.058868548	1.058805
-12	1.055155963	1.044497822	1.058805
-14	0.976996262	0.976996262	1.058805
-15	0.0	0.0	1.058805

Table 4. Changes in strain energy relative to change in external radius

جدول ۵. تغییرات تنش تیر نسبت به تغییر ارتفاع دو طرف تیر

Present study	Exact sensitivity	(h_2 and h_1) (mm)	Calculated stress (MPa)	Exact stress (MPa)	X (mm)
13.6884	14.0381	0.1	-27.1862	-27.2486	0
-11.3600	-11.6984	2.1			
7.4524	7.4518	0.1	-26.2006	-26.2005	10
-6.2104	-6.2099	2.1			
1.7853	1.7848	0.1	-25.2302	-25.2301	20
-1.4878	-1.4873	2.1			
-3.1057	-3.1061	0.1	-24.3291	-24.3291	30
2.2881	2.5858	2.1			
7.3379	-7.3383	0.1	-23.4902	-23.4901	40
6.1149	6.1153	2.1			
-10.7762	-11.0088	0.1	-22.7586	-22.7071	50
8.9378	9.1740	2.1			

Table 5. Changes in beam stress relative to changes in height of both sides of the beam

جدول ۷. تغییرات تنش در تیر نسبت به تغییر ارتفاع انتهای آن

Sensitivity			Log h
CVM	FDM	Present work	
2.591234	2.582067613	2.593931	-01
2.588082	2.587991315	2.58811	-02
2.588051	2.588050039	2.588051	-03
2.588051	2.588050627	2.588051	-04
2.588051	2.588050574	2.588051	-05
2.58805	2.588050439	2.588051	-06
2.588049	2.588048886	2.588051	-07
2.588041	2.587970549	2.588051	-08
2.587571	2.588146586	2.588051	-09
2.585985	2.595950122	2.588051	-10
2.845724	2.794209308	2.588051	-12
3.907985	-54.88942634	2.588051	-14
0	0	2.588051	-16

Table 7. Stress changes in the beam relative to the change in height of its end

طول گام تغییر از قبل مشخص نیست و نیازمند تکرار شبیه سازی برای اطمینان از دقت نتایج به دست آمده می باشد. استفاده از روش متغیرهای مختلط ارائه شده محدودیتی نداشته و می توان بدون نگرانی از کوچک بودن طول گام و مشکلات ناشی از خطای اشاره شده به جواب های دقیق و پایدار دست پیدا کرد.

مراجع

- [1] Sheikhi Azqandi, M., Ghoddosian, A. 2020 Classical optimization methods for engineering design, Bozorgmehr university of Qaenat press, (in Persian).

جدول ۶. تغییرات تنش در تیر نسبت به تغییر ارتفاع ابتدای آن

Sensitivity			Log h
CVM	FDM	Present work	
-3.107428708	-3.127171471	-3.0844	-01
-3.105705648	-3.105902085	-3.10547	-02
-3.105688388	-3.105690352	-3.10569	-03
-3.105688215	-3.105688238	-3.10569	-04
-3.105688256	-3.105688257	-3.10569	-05
-3.105688307	-3.105688023	-3.10569	-06
-3.105686748	-3.105683746	-3.10569	-07
-3.105668789	-3.105659196	-3.10569	-08
-3.105526503	-3.105606439	-3.10569	-09
-3.108695523	-3.109938973	-3.10569	-10
-3.364419854	-3.56870089	-3.10569	-12
-93.08109838	-25.04663144	-3.10569	-14
-17.76356839	-17.76356839	-3.10569	-16
0.0	0.0	-3.10569	-17

Table 6. Stress changes in the beam relative to the change in height at the beginning

در این روش تغییر در متغیر طراحی در طول محور موهومی انجام می شود. در این صورت می توان هم اندازه گام را به هر اندازه دلخواه کوچک انتخاب کرد و هم با مشکل از دست رفتن ارقام بامعنی هم مواجه نشد. علاوه بر این روش متغیرهای مختلط با تغییر دادن المان بندی فقط در دامنه موهومی، دیگر نیازی به عوض کردن چگونگی المان بندی مسئله ندارد. با بررسی نتایج به دست آمده از حل مسئله های ارائه شده، کارایی بالای روش متغیرهای مختلط نسبت به دو روش تفاضل محدود و نیمه تحلیلی تایید شد. در دو روش تفاضل محدود و روش نیمه تحلیلی باید در انتخاب طول گام دقت زیادی به خرج داد. این در حالی است که اندازه

- frame structures, *Computers structures*, **84**(15), 964-977.
- [15] Voorhees, A., Millwater H., Bagley, R., Golden, P., 2012 Fatigue sensitivity analysis using complex variable methods, *International J Fatigue*, **40**, 61–73.
- [16] Kim, J., Bates D.G., Postlethwaite, I., 2006 Nonlinear Robust performance analysis using complex-step gradient approximation, *Automatica*, **42**(1), 177–82.
- [17] Tamayo, D. R., Montoya, A., Millwater, H., 2018 A virtual crack extension method for thermoelastic fracture using a complex-variable finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, **192**, 328-342.
- [18] Randal Fielder, R., Millwater, H., Montoya, A., Golden, P., 2019 Efficient estimate of residual stress variance using complex variable finite element methods, *International J of Pressure Vessels and Piping*, **173**, 101-113.
- [19] Voorhees, A., Millwater, H., Bagley, R., 2011 Complex variable methods for shape sensitivity of finite element models, *Finite Elements in Analysis and Design*, **47**, 1146–1156.
- [20] Hassanzadeh, M., Safarpour, P., 2018 Employing a new method for computation of design sensitivities for nonlinear FEM, *Modares Mechanical Engineering*, **18**(4), 645-654 (in Persian).
- [21] Yang, R., 1993 Shape design sensitivity analysis of thermo elasticity problems, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **102**(1), 41-60.
- [22] Lund, E., 1994 Finite element-based design sensitivity analysis and optimization, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [23] Lyness, J.N., Moler, C.B., 1967 Numerical differentiation of analytic functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **4**(2), 202-210.
- [24] Sheikhi Azqandi, M., Hasanzadeh, M., Arjmand, M., 2019 Sensitivity analysis based on complex variables in FEM for linear structures, *Advances in Computational Design*, **4**(1), 15-32.
- [25] Koutromanos, I., 2018 Fundamentals of Finite Element Analysis: Linear Finite Element Analysis, Wiley.
- [2] Ghoddosian, A., Sheikhi Azqandi, M., 2013 Meta-heuristic optimization Methods in engineering, Semnan university press, (in Persian).
- [3] Haftka, Raphael T., Gürdal, Z., 1992 Elements of Structural Optimization, Springer.
- [4] Sadd, Martin, 2014 Elasticity Theory, Applications, and Numerics, Third Edition) Pages 283-321, chapter 10 (Complex Variable Methods), Academic Press.
- [5] Anderson, WK, Newman, J.C, Whitfield D.L, Nielsen E.J. 2001 Sensitivity analysis for Navier–Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. *AIAA J*, **39**(1), 56–63.
- [6] Newman J.C, Whitfield, D.L, Anderson, W.K., 2003 Step-size independent approach for multidisciplinary sensitivity analysis, *J Aircraft*, **40**(3), 566–73.
- [7] Burg C.O.E, Newman J.C, 2003 Efficient Computationally. Numerically exact design space derivatives via the complex Taylor’s series expansion method. *Comput Fluids*, **32**(3), 373–83.
- [8] Martins, J., Kroo, I. M., Alonso, J. J., 2001 An automated method for sensitivity analysis using complex variables, *AIAA paper*, 689, 2000-2012.
- [9] Martins, J., P. Sturdza, J., Alonso, J., 2003 The complex-step derivative approximation, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **29**(3), 245-262.
- [10] Wang B.P, Apte A.P. 2006 Complex variable method for eigen solution sensitivity analysis, *AIAA J.*, **44**(12), 2958–61.
- [11] Hassanzadeh, M., 2020 Computation of second-order design sensitivities for steady state incompressible laminar flows using the extended complex variables method, *Euro J Computational Mechanics*, **28**(6), 605-634.
- [12] Gao, X.W, He, M.C., 2005 A new inverse analysis for multi-region heat conduction BEM using complex-variable-differentiation method, *Eng Anal Boundary Elem*, **29**(8), 788–95.
- [13] Araújo, A.L., Soares, C. M., Herskovits, J., Pedersen, P., 2002 Development of a finite element model for the identification of mechanical and piezoelectric properties through gradient optimisation and experimental vibration data, *Composite Structures*, **58**(3), 307-318.
- [14] Haukaas, T., Scott, M. H., 2006 Shape sensitivities in the reliability analysis of nonlinear

Sensitivity Design Analysis of Thermomechanical Problems under Thermal and Mechanical loads with Complex Variables Method

Mojtaba Sheikhi Azqandi¹, Mahdi Hassanzadeh^{2*}

1. Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

2. Department of Mechanical Engineering, Gorgan Branch, Islamic Azad University, Gorgan, Iran

*m.hassanzadeh@gorganiau.ac.ir

Abstract

On the mechanics of solids, in many cases, the body is affected by mechanical force and heat load simultaneously. One of the most widely used and important parameters in the optimal design of engineering problems is the utilization of the sensitivity numbers respect to the values of its design variables. Sensitivity numbers or derivative of a function with respect to a design variable show how a dependent variable responds to the design variables changes. The present paper analyzes sensitivity in thermomechanical problems using the complex variables method (CVM). The most important drawback of past methods for the analysis of sensitivity values such as finite difference method (FDM) and semi-analytical method (SAM) is the dependence of the calculated values of sensitivity numbers on the step size, which leads to unreliable answers. Complex variables method is a new robust approach that uses a Taylor series extension in a complex space and which is not sensitive to step size, disturbance and given that during the computational process, subtraction of two numbers is almost equally avoided, so does not influence from error caused by removing meaningful figures that commonly occur in finite difference method due to subtracting of two near the number. As a result, it is possible to achieve accurate answers by choosing a small step size. Also, it has some potential advantages over other methods. At first order sensitivities using the complex variables method, the implementation is straightforward, only requiring a perturbation of the finite element mesh along the imaginary axis. Implementation of sensitivity using complex variables method requires complex variable finite element code such that complex nodal coordinates can be used to implement a perturbation in the shape of interest in the complex domain. All resulting finite element outputs such as temperature, displacements, strains, stresses, etc. become complex and accurate derivatives of all finite element outputs to the shape parameter of interest are available. So, unlike most methods, using the proposed method does not require calculations to select the appropriate change in step size. However, the value of the change in step size is not known in advance and changes from one problem to another. Therefore, it is necessary to repeat the simulation to ensure the results. The study found that the source of the rounding error was due to the rotation of the element, this also makes it difficult to use two methods, semi-analytical and finite difference. In this case, the use of CVM is not limited and can be achieved by effective answers without worrying about the small step size. In the present study, to examine how efficient and valid the proposed method is, how it works to solve several thermomechanical problems is described. The methodologies are demonstrated using two-dimensional finite element models. Obtained sensitivity derivatives are compared to the semi-analytical solution and also finite difference method and it is shown that the proposed method is effective and can predict the stable and accurate sensitivity results. The complex variable method presented in this study can be used to solve a wide range of engineering problems.

Keywords: Sensitivity analysis, Thermomechanical problems, Complex variables method, Finite element method