

تحلیل قابلیت اعتماد در سازه‌های یک بعدی به کمک تابع چگالی احتمال صریح پاسخ استاتیکی در اجزاء محدود تصادفی

ریزان چوبداریان^{۱*}، آزاد یزدانی^۲، هوشنگ دباغ^۳

- ۱- دانشجوی دکتری مهندسی عمران - سازه، دانشگاه کردستان
- ۲- استاد گروه مهندسی عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان
- ۳- استادیار گروه مهندسی عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان

r.chobdarian@eng.uok.ac.ir*

تاریخ پذیرش [۱۳۹۹/۱۰/۲۳]

تاریخ دریافت [۱۳۹۸/۰۳/۲۳]

چکیده

تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها با در نظر گرفتن تصادفی بودن متغیرهای هندسه، مصالح و بارگذاری راهنمای مناسبی برای طراحی در مهندسی سازه است. از روش اجزاء محدود تصادفی به منظور تحلیل سیستم سازه‌ای با در نظر گرفتن عدم قطعیت در سیستم‌های تصادفی، استفاده می‌شود. حل معادلات اجزاء محدود تصادفی منجر به محاسبه تمامی پاسخ‌های محتمل سازه با در نظر گرفتن همه متغیرهای تصادفی سیستم سازه‌ای می‌شود. به دلیل تأثیر عدم قطعیت در پاسخ سیستم‌های سازه-ای، انجام تحلیل قابلیت اعتماد ضروری به نظر می‌رسد. با این وجود به دلیل محدودیت روش‌های کلاسیک تحلیل قابلیت اعتماد، نیاز به محاسبه شاخص قابلیت اعتماد بر اساس تابع چگالی احتمال پاسخ وجود دارد. در این پژوهش با ترکیب روش اغتشاش و تغییرمتغیر و بدون وجود محدودیت نوع توزیع آماری متغیرهای تصادفی، تابع چگالی احتمال صریح پاسخ سازه محاسبه می‌شود. با محاسبه تابع چگالی احتمال پاسخ استاتیکی سازه، احتمال خرابی و شاخص قابلیت اعتماد به طور مستقیم به دست می‌آید.

در اجزاء محدود تصادفی، به دلیل ثابت نبودن ویژگیهای متغیرهای تصادفی در سازه، نیاز به تعریف یک تابع همبستگی بین متغیر تصادفی در المان‌های مختلف لازم است. بنابراین شاخص قابلیت اعتماد به عنوان معیار همگرایی مش‌بندی با در نظر گرفتن مقیاس نوسانات و تابع همبستگی متغیرهای تصادفی در المان‌های مجاور، در نظر گرفته می‌شود. در هر تعداد المان، شاخص قابلیت اعتماد سازه با استفاده از تابع چگالی احتمال صریح پاسخ و تابع ظرفیت سازه محاسبه شده تا در تعداد مشخصی از المان‌ها به همگرایی برسد. در این مطالعه تحلیل اجزاء محدود تصادفی در حالت استاتیکی خطی برای یک نمونه تیر و یک نمونه ستون طره انجام می‌گیرد و متغیرهای هندسه، مصالح و بارگذاری به صورت تصادفی با توزیع‌های آماری واقعی مطابق پیشینه موضوع در نظر گرفته می‌شوند. همان‌گونه که مطابق اجزاء محدود کلاسیک قابل انتظار است، با افزایش تعداد المان‌ها و مش‌بندی ریزتر، شاخص قابلیت اعتماد مقادیر بزرگتری دارد. در نظر گرفتن مقیاس نوسانات کمتر برای متغیرهای تصادفی، موجب می‌شود شاخص قابلیت اعتماد در مقدار بزرگتری همگرا شود. درحالی‌که در مقیاس نوسانات بزرگتر به دلیل همبستگی بیشتر متغیر تصادفی در المان‌های مجاور، در تعداد کمتری از المان‌ها، همگرایی اتفاق می‌افتد. همچنین نتایج تابع چگالی احتمال پاسخ با روش صریح در مقایسه با روش شبیه‌سازی

مونت کارلو هماهنگی مناسبی را نشان می‌دهد. مزیت استفاده از شاخص قابلیت اعتماد به عنوان معیار همگرایی در مش‌بندی اجزاء محدود تصادفی، در نظر گرفتن همه پاسخ‌های محتمل سازه به جای استفاده از پاسخ متوسط سازه در طراحی است.

واژگان کلیدی: تابع چگالی احتمال، اجزاء محدود تصادفی، شاخص قابلیت اعتماد

۱- مقدمه

هدف از تحلیل سازه محاسبه پاسخ سازه در مقابل بارهای اعمال شده در حالت‌های مختلف است. از آنجایی که عدم قطعیت در ویژگی‌های مربوط به مصالح، هندسه و نوع بارگذاری سیستم‌های سازه‌ای اجتناب ناپذیر است، استفاده از روش‌های تحلیل تصادفی مطرح می‌شود [1-3]. از جمله روش‌های پرکاربرد در تحلیل سازه‌ها استفاده از روش اجزاء محدود است. با در نظر گرفتن ویژگی تصادفی پارامترها و عدم قطعیت در سیستم‌های تصادفی، روش اجزاء محدود تصادفی معرفی می‌شود [4-7]. حل معادلات اجزاء محدود تصادفی شامل استفاده از روش‌های شبیه‌سازی و غیر شبیه‌سازی است. از جمله روش‌های شبیه‌سازی، مونت-کارلو است [8-9]، که با استفاده از تولید داده در محدوده تغییرات متغیرهای تصادفی، تحلیل اجزاء محدود قطعی به تعداد دفعات زیاد وابسته به تعداد داده‌های تولیدی، تکرار می‌شود. روش‌های غیر شبیه‌سازی شامل بسط سری‌ها از جمله بسط نیومن [10] و روش اغتشاش است [11-12]. روش اغتشاش با استفاده از مفهوم بسط سری تیلور تعریف می‌شود و طبق مطالعات انجام شده چون افزایش مراتب بسط از مرتبه اول به بعد از لحاظ دقت جواب‌ها در مقایسه با حجم محاسبات، تاثیر چندانی ندارد، می‌توان تنها مرتبه اول بسط تیلور متغیرهای تصادفی را در نظر گرفت که منجر به کاهش حجم و زمان محاسبات می‌شود [13]. به دلیل تاثیر عدم قطعیت در پاسخ سیستم‌های سازه‌ای، انجام تحلیل قابلیت اعتماد ضروری است. کاربرد روش قابلیت اعتماد به صورت آماری در محاسبات سازه‌ای اولین بار توسط فرودنتال در سال ۱۹۴۷ مطرح شد [14]. تحلیل قابلیت اعتماد پاسخ معادلات اجزاء محدود سیستم‌های سازه‌ای توسط پژوهشگران بسیار مورد توجه قرار گرفت که از جمله می‌توان به پژوهش‌های درکیورقیان، ماهادوان، اسپانوس، ون مارک و گرگوریو، اشاره کرد

[15-21]. مباحث مربوط به قابلیت اعتماد روی مسائل ایمنی سازه، آسیب‌ها، تعداد و نوع المان‌های به کار رفته در معادلات اجزاء محدود، حساسیت پارامترهای تصادفی و مسائل بهینه‌سازی دارای اهمیت است [22-26]. با توجه به اهمیت موضوع، در دهه اخیر نیز پژوهش‌های گسترده‌ای در این حوزه انجام گرفته است [27-32]. در بسیاری از موارد محاسبه شاخص قابلیت اعتماد به دلیل دشواری محاسبه تابع چگالی احتمال به آسانی مقدور نیست. پس تحلیل قابلیت اعتماد با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی مانند مونت-کارلو و روش‌های غیر شبیه‌سازی مانند روش‌های مرتبه اول^۱ و مرتبه دوم^۲، یا روش رویه‌های پاسخ و شبکه‌های عصبی انجام می‌شود که مونت-کارلو با افزایش تعداد داده‌ها به شدت با افزایش حجم و زمان محاسبات مواجه می‌شود و روش‌های غیر شبیه‌سازی نیز نیاز به در نظر گرفتن مشتقات جزئی توابع عملکردی دارند به ویژه زمانی که تعداد متغیرهای تصادفی زیاد باشد، امکان انجام صحیح تحلیل قابلیت اعتماد وجود ندارد [33]. به همین دلیل نیاز به محاسبه شاخص قابلیت اعتماد از رابطه کلی بر اساس تابع چگالی احتمال وجود دارد.

هدف از محاسبه تابع چگالی احتمال، به دست آوردن احتمال تمام پاسخ‌های ممکن به منظور انجام تحلیل قابلیت اعتماد و محاسبه احتمال خرابی در طراحی سازه‌ها است. استفاده از روش‌هایی مانند مونت-کارلو با افزایش تعداد متغیرهای تصادفی با افزایش زمان و حجم محاسبات همراه است و از این لحاظ دچار ضعف است. با این حال، در کنار روش‌های دیگری که استفاده می‌شود، روش مونت کارلو همواره به عنوان یک ابزار قوی در درستی‌آزمایی نتایج سایر روش‌های پیشنهادی، مورد استفاده قرار می‌گیرد [34-37]. از روش‌های غیر شبیه‌سازی نیز به منظور

1 FORM

2 SORM

مطلعه، تعیین تعداد بهینه المان‌های اجزاء محدود تصادفی سازه های مورد نظر و معیار همگرایی مش بندی بر این اساس است.

۲- روش تحقیق

۲-۱- محاسبه تابع چگالی احتمال

مهمترین مشخصه‌ای که در محاسبه شاخص قابلیت اعتماد باید محاسبه شود، تابع چگالی احتمال پاسخ سازه (probability density function) است که به اختصار با pdf در قسمت‌هایی از متن به آن اشاره شده است. محاسبه تابع چگالی احتمال مطابق با مطالعاتی که در پیشینه موضوع به آن‌ها اشاره شد، در سیستم‌های سازه‌ای با محدودیت‌هایی روبه‌رو می‌شود. از جمله اینکه در بسیاری از موارد، توزیع تمامی متغیرهای تصادفی به صورت نرمال در نظر گرفته می‌شود که در این حالت قطعاً توزیع تابع پاسخ نیز به صورت نرمال خواهد بود. در موارد دیگری که محدودیت توزیع نرمال از متغیرهای تصادفی برداشته می‌شود، از روش‌هایی استفاده شده است که از معکوس تابع پاسخ استفاده می‌کند که ضعف عمده این روش‌ها این است که ممکن است تابع پاسخ معکوس‌پذیر نباشد یا محاسبه معکوس تابع به آسانی مقدور نباشد. از این‌رو باید از روشی استفاده شود که تا می‌شود بتواند این محدودیت‌ها را برطرف کند.

در مورد سیستم‌های استاتیکی خطی روشی بر مبنای ترکیب اغتشاش و روش تغییرمتغیر در سیستم‌های سازه‌ای پیشنهاد شده است. این روش نیازی به در نظر گرفتن توزیع نرمال تمام پارامترهای تصادفی ندارد و همچنین نیازی به استفاده از معکوس تابع نیست، چراکه با تکنیک تغییر متغیر، به جای استفاده از پاسخ $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از تمامی متغیرهای تصادفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ در یک معادله مشخص و صریح استفاده می‌شود. در معادله استاتیکی اجزاء محدود به فرم $Ku = F$ ، ماتریس سختی K و بردار نیروها F بر اساس متغیرهای تصادفی، طبق بسط مرتبه اول تیلور بیان می‌شوند. به عبارتی برای ماتریس سختی که شامل متغیرهای هندسی و مصالحی سازه است و بردار نیروها که بارهای وارد بر سازه را تشکیل می‌دهد، علاوه بر در نظر گرفتن یک مقدار متوسط مطابق تحلیل اجزاء محدود

محاسبه تابع چگالی احتمال، استفاده می‌شود. روش اغتشاش بر اساس بسط تیلور، با بیان پارامترهای تصادفی بر اساس مقادیر میانگین و انحراف از معیار داده‌ها، هر متغیر تصادفی را به صورت مجموعه‌ای از جملات بسط یک سری در معادلات وارد می‌کند. در این حالت تابع چگالی احتمال را فقط می‌توان زمانی که توزیع همه‌ی پارامترهای تصادفی به صورت نرمال باشد و تابع پاسخ نیز توزیعی نرمال داشته باشد، به دست آورد [28-40]. در حالت واقعی توزیع متغیرها همیشه نرمال نیست و باید در محاسبات، توزیع واقعی پارامترهای تصادفی را لحاظ کرد. از این‌رو در نظر گرفتن روش اغتشاش در حالتی که متغیرها از حالت گاوسی خارج شوند برای محاسبه تابع چگالی احتمال مناسب نیست.

در محاسبه تابع چگالی احتمال، می‌توان از ترکیب روش اغتشاش بر اساس بسط مرتبه اول از سری تیلور و روش ریاضی تغییر متغیر استفاده کرد [41]. در این روش که برای معادله حرکت در حالت استاتیکی و خطی در نظر گرفته شده است، با بیان ماتریس سختی و بردار نیروها بر اساس بسط مرتبه اول سری تیلور، معادله اجزاء محدود در حالت استاتیکی و خطی بیان می‌شود، سپس با استفاده از روش تغییر متغیر، به جای استفاده از تابع پاسخ، از تمام پارامترهای تصادفی موثر در پاسخ سازه به منظور محاسبه تابع چگالی احتمال استفاده می‌شود. مطالعات مربوط به استفاده از ترکیب دو روش اغتشاش و تغییرمتغیر، در محاسبه تابع چگالی احتمال در سیستم‌های مکانیکی اکوستیک انجام گرفته است [42-44] و در پژوهش دیگری بازه‌ای بودن متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده است [45].

در این مطالعه، شاخص قابلیت اعتماد سازه با استفاده از معادلات بخش ۲ از مفهوم تابع چگالی احتمال صریح پاسخ در دو نمونه سازه‌ای شامل یک تیر ساده و یک ستون طره محاسبه می‌شود. اهمیت این پژوهش در نظر گرفتن تمام پاسخ‌های محتمل سازه بدون محدودیت نوع توزیع آماری متغیرهای تصادفی و استفاده از معادله مستقیم شاخص قابلیت اعتماد بدون استفاده از روش‌های کلاسیک است. کاربرد محاسبه شاخص قابلیت اعتماد در این

$$f_{u_j}(u_j) = \int_{x_n=\underline{a}_n}^{\bar{a}_n} f_{x_n}(x_n) f_{Y_{n-2j}}(u_j - A_{0,j} - A_{n,j} x_n) dx_n \quad (7)$$

این معادلات بیانگر تابع چگالی احتمال پاسخ، اما نه بر اساس استفاده از معادله پاسخ بلکه بر مبنای تمامی متغیرهای تصادفی موجود در سیستم سازه‌ای هستند و کران انتگرال در هر معادله، محدوده تغییرات تک تک متغیرهای تصادفی تا رسیدن به پاسخ نهایی را نشان می‌دهد.

با استفاده از معادلات بیان شده در این بخش، تابع چگالی احتمال به صورت صریح محاسبه، و مشاهده می‌شود که تابع چگالی احتمال پاسخ تمامی پاسخ‌های ممکن سازه و احتمال وقوع هر کدام را محاسبه می‌کند. از طرفی در تحلیل تصادفی، علاوه بر اهمیت پاسخ متوسط سازه، نیاز به بررسی همه پاسخ‌های ممکن در گستره تغییرات متغیرهای تصادفی است. بنابراین استفاده از تابع چگالی احتمال در تحلیل تصادفی و به ویژه در مباحث طراحی سازه بسیار حائز اهمیت است.

۲-۲-۲- مش‌بندی

در اجزاء محدود تصادفی، به دلیل ثابت نبودن ویژگی‌های متغیرهای تصادفی در سازه، نیاز به تعریف یک تابع همبستگی بین یک متغیر تصادفی در المان‌های مختلف است. توزیع متغیرهای تصادفی در المان‌ها و همبستگی آن‌ها در یک المان نسبت به المان مجاور با مفهوم تابع واریانس بیان می‌شود. برای تعیین مقدار تابع واریانس و تابع همبستگی بین متغیرهای تصادفی در المان‌های مجاور توابع مختلفی پیشنهاد شده است. در مسائل یک بعدی شامل تیر یا ستون که موضوع بررسی در این مقاله هستند، مش‌بندی را می‌توان فقط در جهت طول عضو سازه‌ای در نظر گرفت می‌توان از تابع همبستگی مثلثی معادله (۸)، پیشنهاد شده توسط Vanmark 1983[46] استفاده کرد.

کلاسیک، یک مقدار انحراف از معیار نیز مطابق با توزیع آماری متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شود و در نهایت پاسخ استاتیکی معادله به شکل معادله (۱) است که K^e و F^e بیانگر مقادیر میانگین و ΔK و ΔF نشان دهنده مقدار انحراف از معیار ماتریس سختی و بردار نیروها است. در نهایت می‌توان بسته به تعداد المان‌ها در سازه مورد نظر معادله اجزاء محدود را به صورت معادلات (۲ و ۳) بیان کرد.

$$u = (K^e + \Delta K)^{-1} (F^e + \Delta F) \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{0,1} \\ \vdots \\ A_{0,j} \\ \vdots \\ A_{0,m} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} A_{i,1} \\ \vdots \\ A_{i,j} \\ \vdots \\ A_{i,m} \end{Bmatrix} x_i \quad (2)$$

$$u_j = A_{0,j} + \sum_{i=1}^n A_{i,j} x_i, \quad j = 1, \dots, m \quad (3)$$

در این معادله

$$A_0 = (K(x^e))^{-1} F(x^e) - \sum_{i=1}^n (K(x^e))^{-1} \times \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^e} - \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^e} (K(x^e))^{-1} F(x^e) \right) x_i^e \quad (4)$$

$$A_i = (K(x^e))^{-1} \times \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^e} - \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^e} (K(x^e))^{-1} F(x^e) \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

بیان معادله اجزاء محدود به روش بسط تیلور و روش اغتشاش مطابق معادلات فوق منجر به محاسبه پاسخ‌های معادله اجزاء محدود به دست آمده می‌شود. در نهایت، با استفاده از تکنیک تغییر متغیر، می‌توان تابع چگالی احتمال را مطابق روابط (۶ و ۷) به دست آورد.

$$f_{Y_{1,j}}(Y_{1,j}) = \frac{1}{|A_{2,j}|} \int_{\underline{a}_1}^{\bar{a}_1} f_{x_1}(x_1) f_{x_2} \left(\frac{Y_{1,j} - A_{1,j} x_1}{A_{2,j}} \right) dx_1 \quad (6)$$

روش‌ها استفاده از مشخصه‌های آماری متوسط و انحراف از معیار است که در نتیجه آن تعدادی سازه با متغیرهای تصادفی متفاوت و توزیع آماری مختلف، می‌توانند دارای یک پاسخ شاخص قابلیت اعتماد باشند. به دلیل محدودیت‌هایی که در روش‌های کلاسیک محاسبه شاخص قابلیت اعتماد وجود دارد، از تعریف شاخص قابلیت اعتماد بر اساس معادله کلی احتمال خرابی مطابق معادله (۱۰) استفاده می‌شود.

$$P_F = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(V) F_S(V) dV = \int_{-\infty}^{\infty} f_{P_F}(V) dV \quad (10)$$

در این رابطه P_F احتمال خرابی، R ظرفیت سازه، S آثار بارهای وارد بر سازه، V متغیرهای تصادفی، F_R تابع چگالی احتمال پارامترهای تصادفی سازه شامل مصالح، هندسه و F_S تابع چگالی احتمال پارامترهای تصادفی بارگذاری است. با توجه به معادله (۱۰)، شاخص قابلیت اعتماد β از معادله (۱۱) به دست می‌آید.

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_F) \quad (11)$$

در این پژوهش با استفاده از معادلات بخش ۲، تعداد بهینه المان‌ها در سازه‌های یک بعدی مورد مطالعه در حالت استاتیکی خطی به دست می‌آید. هدف این پژوهش، تحلیل قابلیت اعتماد سازه با محاسبه مستقیم تابع صریح چگالی احتمال پاسخ می‌باشد. تابع چگالی احتمال پاسخ از معادله (۷)، بدون محدودیت نوع توزیع آماری متغیرهای تصادفی و عدم نیاز به معکوس تابع پاسخ و بدون استفاده از روش‌های شبیه‌سازی عددی که در مقدمه موضوع به آن‌ها اشاره شد، به صورت صریح محاسبه می‌شود. با استفاده از احتمال خرابی سازه از محاسبه مستقیم تابع چگالی احتمال پاسخ، شاخص قابلیت اعتماد با استفاده از معادله (۱۱) به دست می‌آید. در این مطالعه، در هر تعداد المان، شاخص قابلیت اعتماد محاسبه شده و با همگرایی شاخص قابلیت اعتماد، تعداد المان بهینه در سازه محاسبه می‌شود. به منظور بیان بهتر روش پژوهش، در شکل (۱)، مراحل محاسبه شاخص قابلیت اعتماد به صورت فلوچارت نشان داده شده است.

$$\gamma_v(T) = 1 - \frac{T}{3\theta_v}, \quad T < \theta_v \quad (8)$$

$$\gamma_v(T) = \frac{\theta_v}{T} [1 - \frac{T}{3\theta_v}], \quad T > \theta_v$$

که در این معادله $\gamma_v(T)$ تابع واریانس متغیر تصادفی v ، T اندازه المان و θ_v مقیاس نوسانات است. تابع واریانس به صورت معادله (۹) برای بیان مقدار متوسط و واریانس متغیرهای تصادفی در المان‌های مختلف استفاده می‌شود [47].

$$E[V_{T_i}] = E[V_T] \quad (9)$$

$$Var[V_{T_i}] = \sigma_v^2 \gamma_v(T_i)$$

همان‌گونه که از معادله (۹) پیداست، تابع واریانس روی مقدار متوسط متغیر تصادفی در المان‌های مختلف تاثیری ندارد اما به طور مستقیم واریانس را تحت تاثیر قرار می‌دهد. بنابراین تعداد المان‌های مختلف و اندازه متفاوت آن‌ها، تابع واریانس‌های مختلف را به دست می‌دهد که این مساله در محاسبه پاسخ و در نتیجه تابع چگالی احتمال پاسخ تاثیرگذار است و در نتیجه توزیع پاسخ و نتایج در هر مش‌بندی متفاوت است. از طرفی با توجه به آنچه در پیشینه بیان شده است مقیاس نوسانات را می‌توان بین صفر تا بینهایت در نظر گرفت که صفر نشان‌دهنده عدم همبستگی متغیر تصادفی در المان‌های مجاور و بینهایت نشان‌دهنده همبستگی کامل است. به دلیل اینکه در محاسبات عددی، صفر و بینهایت در نظر گرفته نمی‌شود، می‌توان از یک عدد کوچک به جای صفر و یک عدد بزرگ به جای بینهایت استفاده کرد.

۲-۳- تحلیل قابلیت اعتماد

تحلیل قابلیت اعتماد بر مبنای تعریف حاشیه اطمینان با در نظر گرفتن تاثیر پارامترهای تصادفی در پاسخ سازه‌ها تحت اثر بارگذاری‌های مختلف انجام می‌گیرد. روش‌های کلاسیک محاسبه شاخص قابلیت اعتماد، شامل روش‌های مرتبه اول و مرتبه دوم با در نظر گرفتن مقدار متوسط و انحراف از معیار و استفاده مستقیم از این مشخصه‌های آماری بدون در نظر گرفتن توزیع آماری متغیرهای تصادفی و سایر پاسخ‌های محتمل با توجه به شرایط بارگذاری و هندسه و مصالح سازه هستند. ضعف عمده این

احتمال خرابی از اشتراک این دو منحنی به دست می‌آید و در نتیجه در هر تعداد المان می‌توان شاخص قابلیت اعتماد را از مقدار احتمال خرابی به دست آورد. در پایان با رسیدن شاخص قابلیت اعتماد به یک مقدار مشخص، همگرایی اتفاق می‌افتد و تعداد المان بهینه به دست می‌آید. ضمن اینکه توزیع آماری متغیرهای تصادفی لزوماً به صورت نرمال در نظر گرفته نمی‌شود بلکه توزیع واقعی هر متغیر تصادفی مطابق آنچه در مراجع موجود است لحاظ می‌شود. به منظور درستی‌آزمایی نتایج تابع چگالی احتمال پاسخ، از نتایج مونت کارلو با تولید ۱۰۰۰۰۰ داده استفاده می‌شود.

۳-۱- تیر دو سر ساده

در این نمونه، یک تیر بتن مسلح با تکیه‌گاه‌های ساده مطابق شکل (۲) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. متغیرهای تصادفی، نوع توزیع و مشخصه‌های آماری هر متغیر مطابق جدول (۱) بیان شده است.

شکل ۱. مراحل محاسبات به صورت فلوچارت

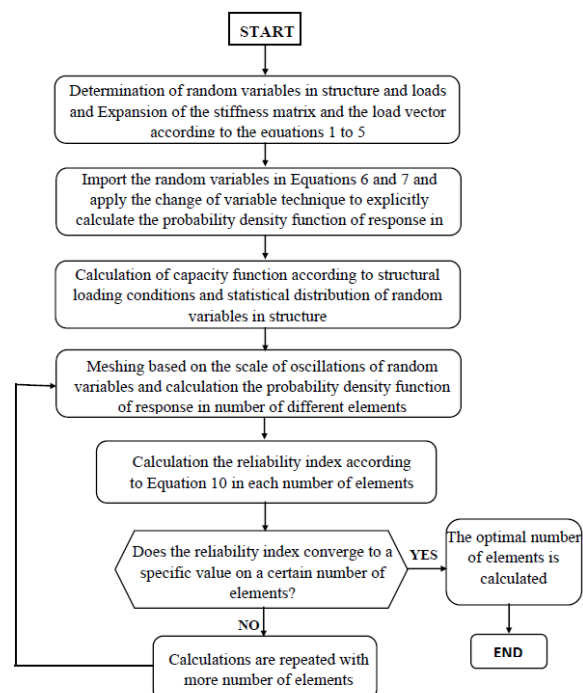


Fig. 1. Flowchart of the solution procedure

۳- نمونه‌های عددی

با استفاده از محاسبه شاخص قابلیت اعتماد سازه بر مبنای سطح مشترک دو منحنی نیاز و ظرفیت، مطابق معادله (۱۰) با لحاظ متغیرهای تصادفی و محاسبه احتمال خرابی در بخش ۲، در ادامه به بررسی نمونه‌های عددی شامل یک تیر ساده و نمونه ستون بتن مسلح تحت اثر بارهای استاتیکی و در محدوده خطی می‌پردازیم. تابع چگالی احتمال پاسخ سازه با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی جداول (۱ و ۲) که مشخصات آن‌ها از پیشینه موضوع استخراج شده است [49-51]، به طور مستقیم و صریح از معادله (۷) محاسبه می‌شود. همان‌گونه که در بخش ۲ بیان شد در ابتدا با استفاده از مفهوم تابع واریانس در تعداد مختلف المان و مش‌بندی در هر حالت مقدار متوسط پاسخ و همچنین احتمال وقوع همه پاسخ‌های ممکن با استفاده از تابع چگالی احتمال پاسخ به دست می‌آید. در این پژوهش مقیاس نوسانات مطابق بخش ۲-۲ مقادیر T ، $1T$ و $0.25T$ در نظر گرفته می‌شود که T طول المان است. با محاسبه تابع چگالی احتمال پاسخ و تابع ظرفیت، مستقیماً مقدار

شکل ۲. تیر دو سر ساده تحت اثر بار گسترده یکنواخت

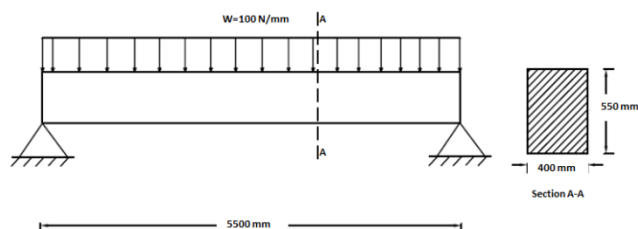


Fig. 2. Simple beam under uniform loading

تغییر مکان وسط تیر به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. این تابع هدف به عنوان تابع ظرفیت در محاسبه شاخص قابلیت اعتماد لحاظ می‌شود. مطابق پژوهش‌های Hosain 2001، [52]، این تابع ظرفیت توزیع لوگ نرمالی با مقدار متوسط $L/240$ دارد که L طول تیر است و انحراف معیار آن برابر با 0.47 مقدار متوسط است.

با استفاده از تابع ظرفیت بیان شده و همچنین محاسبه تابع چگالی احتمال در حالت‌های مختلف مش‌بندی در مقادیر مختلف مقیاس

توان شاخص قابلیت اعتماد را در هر حالت محاسبه نمود که نتایج تکرار شونده در شکل (۴) موجود است.

شکل ۴. تحلیل قابلیت اعتماد در تعداد المان‌های مختلف در حالت

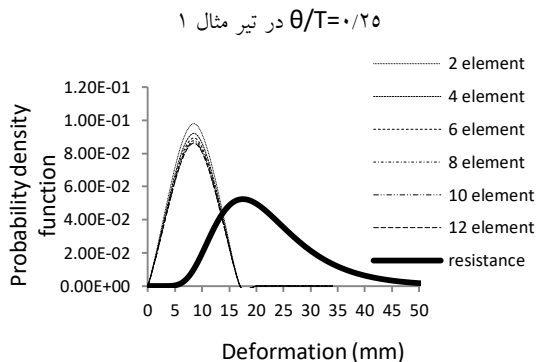


Fig. 4. Reliability analysis in different number of elements at $\theta/T=0.25$ in simple beam Example 1

مساله مهم دیگری که قابل بررسی است، این است که اگر به جای تابع چگالی احتمال پاسخ، فقط از مقدار متوسط پاسخ استفاده شود، تعداد المان‌های بهینه در تحلیل چه تغییری می‌کند. به همین منظور در یک مقایسه در همین نمونه تعداد المان بهینه یک بار با همگرایی پاسخ متوسط و یک بار با همگرایی شاخص قابلیت اعتماد مقایسه شده و نتایج مطابق شکل (۵) گزارش می‌شود. همان‌گونه که از شکل (۵) مشاهده می‌شود، در حالتی که فقط مقدار متوسط پاسخ در نظر گرفته شده است در ۴ المان همگرایی اتفاق می‌افتد در حالیکه اگر همه پاسخ‌های محتمل با توجه به تصادفی بودن متغیرها در نظر گرفته شود، همگرایی در ۹ المان اتفاق می‌افتد. با توجه به اینکه در حقیقت نمی‌توان از اثر تصادفی بودن متغیرها در حالت واقعی چشمپوشی کرد، در نظر گرفتن همه پاسخ‌های محتمل و محاسبه تابع چگالی احتمال به جای در نظر گرفتن مقدار متوسط پاسخ، منطقی به نظر می‌رسد. به عبارتی اگر آثار متغیرهای تصادفی و عدم قطعیت در محاسبات لحاظ نشود، بر اساس پاسخ متوسط می‌توان تعداد المان بهینه را محاسبه کرد اما با تاثیر عدم قطعیت و خروج از مقدار متوسط متغیرها و معیار همگرایی شاخص قابلیت اعتماد در مش‌بندی، تعداد بهینه المان افزایش می‌یابد که به خوبی تاثیر تصادفی بودن متغیرها و لزوم لحاظ این آثار در تحلیل را نشان می‌دهد.

نوسانات، مقدار شاخص قابلیت اعتماد محاسبه می‌شود که نتایج به صورت شکل (۳)، است.

شکل ۳. محاسبه شاخص قابلیت اعتماد در تیر ساده مثال ۱

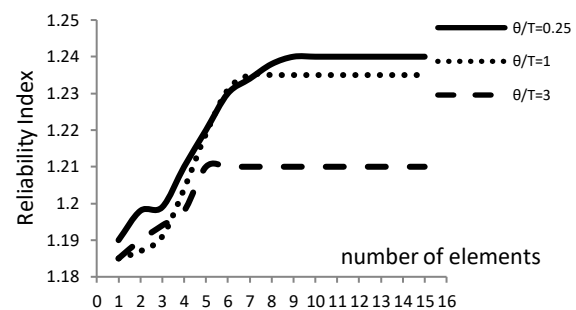


Fig. 3. Calculation of reliability index of simple beam in Example 1

همان‌گونه که از شکل (۳) مشاهده می‌شود، برای مقادیر مختلف مقیاس نوسانات مقادیر شاخص قابلیت اعتماد در تعداد المان‌های بهینه به مقادیر ۱/۲۴، ۱/۲۳۵ و ۱/۲ به ترتیب برای $\theta/T=0.25$ ، ۰/۲۵ و ۳ می‌رسد. به نظر می‌رسد که با افزایش تعداد المان‌ها شاخص قابلیت اعتماد به مقادیر بزرگ‌تری می‌رسد. این مساله با توجه به اینکه با مش‌بندی ریزتر مقدار پاسخ، به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شود، از نتایج تحلیل اجزاء محدود قابل انتظار است. همچنین با افزایش مقیاس نوسانات به دلیل همبستگی بیشتر بین متغیرهای تصادفی در المان‌ها، همگرایی در تعداد المان کمتر اتفاق می‌افتد. در مقادیر ۰/۳، ۱/۲۵، $\theta/T=0.3$ به ترتیب تعداد المان بهینه برابر ۵، ۷ و ۱۰ المان است که به خوبی تاثیر تابع همبستگی و مقدار آن در متغیرهای تصادفی را نشان می‌دهد.

چگونگی محاسبه تابع چگالی احتمال (pdf) پاسخ u که نشان‌گر تغییر مکان در وسط تیر نمونه ۱ است، در مقیاس نوسانات $0.25T$ به عنوان نمونه در شکل (۴) نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل (۴) مشاهده می‌شود، توابع چگالی احتمال پاسخ در تعداد المان‌های مختلف متفاوت است و سطح مشترک این توابع در حالت‌های مختلف با تابع ظرفیت، احتمال خرابی را در هر حالت نشان می‌دهد. با استفاده از معادله (۱۱) در نهایت می-

جدول ۱. متغیرهای تصادفی تیر دو سر ساده مثال

Random variables	Statistical distribution	Statistical characteristics	
E (MPa)	Log normal	$\mu = 25279$	$\sigma = 3791.8$
I (mm ⁴)	normal	$\mu = 5.55 \times 10^9$	$\sigma = 1.3875 \times 10^8$
L (mm)	normal	$\mu = 5500$	$\sigma = 220$
W (N/mm)	Type 1	$\mu = 100$	$\beta = 19.5$

Table 1. Random variables in simple beam in example 1

شکل ۵. مقایسه تعداد المان بهینه با در نظر گرفتن متوسط پاسخ و محاسبه شاخص قابلیت اعتماد با در نظر گرفتن همه پاسخ‌های محتمل

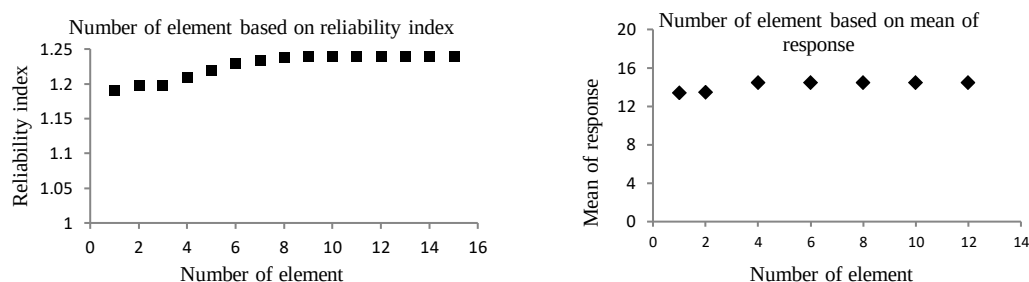


Fig. 5. Comparison of the number of optimal elements by considering the average response and calculating the reliability index

قابلیت اعتماد در تعداد المان‌های مختلف برابر مقادیر ۱/۱۵۸، ۱/۱۵۳ و ۱/۱ به ترتیب برای θ/T ، ۰/۲۵، ۱ و ۳ است. مشابه نتایج نمونه ۱، با افزایش تعداد المان‌ها شاخص قابلیت اعتماد به مقادیر بزرگ‌تری می‌رسد. هر چه تعداد المان‌ها بیشتر شود، نتایج دقت بیشتری نشان می‌دهند و به پاسخ واقعی نزدیک‌تر هستند، پس احتمال خرابی کاهش یافته و شاخص قابلیت اعتماد مقدار بیشتری دارد. مشاهده می‌شود که با افزایش همبستگی، شاخص قابلیت اعتماد در تعداد المان کمتری به همگرایی رسیده است. مطابق شکل (۷) برای $\theta/T=3$ در ۸ المان همگرایی حاصل می‌شود و برای $\theta/T=1$ و $\theta/T=0.25$ این تعداد به ترتیب ۱۲ و ۱۴ المان است که اثر مقیاس نوسانات و همبستگی متغیرهای تصادفی در مشخص‌بندی را نشان می‌دهد.

مساله مهم که مورد بررسی قرار می‌گیرد درستی آزمایشی نتایج به دست آمده است که در بخش ۳-۳ به بررسی نتایج درستی آزمایشی تابع چگالی احتمال صریح پاسخ محاسبه شده در مقایسه با روش شبیه‌سازی مونت کارلو پرداخته می‌شود.

۳-۲- ستون طره

در ادامه یک ستون طره مانند شکل (۶) تحت اثر یک بار متمرکز جانبی و یک بار متمرکز ثقلی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. متغیرهای تصادفی، توزیع و مشخصه‌های آماری آن‌ها به منظور تحلیل اجزاء محدود تصادفی در جدول (۲) بیان شده است. تغییر مکان جانبی انتهای ستون به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. این تابع هدف به عنوان تابع ظرفیت در محاسبه شاخص قابلیت اعتماد لحاظ می‌شود. مطابق پژوهش‌های Der [53] kureghian 2002 این تابع ظرفیت، دارای توزیع لوگ نرمالی با مقدار متوسط $0.025h$ و ضریب تغییرات $cov=0.1$ است که h ارتفاع ستون است. با استفاده از تابع ظرفیت مورد نظر و محاسبه تابع چگالی احتمال پاسخ در تعداد المان‌های مختلف و تاثیر مقیاس نوسانات، شاخص قابلیت اعتماد در حالت‌های مختلف مطابق معادله (۱۰ و ۱۱)، محاسبه می‌شود که نتایج مطابق شکل (۷) است. همان‌گونه که از شکل (۷) ملاحظه می‌شود، برای مقادیر مختلف مقیاس نوسانات مقادیر شاخص

جدول ۲. متغیرهای تصادفی در ستون طره مثال ۲

Random variables	Statistical distribution	Statistical characteristics	
E (MPa)	Log normal	$\mu = 25279$	$\sigma = 3791.8$
I (mm ⁴)	normal	$\mu = 2.133 \times 10^9$	$\sigma = 5.3325 \times 10^7$
L (mm)	normal	$\mu = 5000$	$\sigma = 50$
F (N)	gamble	$\mu = 10000$	$\beta = 1950$
P(N)	normal	$\mu = 5000$	$\sigma = 1250$

Table 2. Random variables in cantilever column example 2

پاسخ تصادفی و احتمال وقوع هر پاسخ به دست می‌آید. به عبارتی معادله اجزاء محدود کلاسیک به تعداد تولید داده‌ها تکرار می‌شود. نتایج حاصل هماهنگی قابل قبول تابع چگالی احتمال صریح محاسبه شده از معادله (۷) با نتایج مونت کارلو را نشان می‌دهد که در شکل‌های (۷، ۸ و ۹) برای θ/T مختلف در تیر ساده نمونه ۱ نشان داده شده است.

شکل ۷. مقایسه تابع چگالی احتمال با استفاده از تابع صریح با نتایج مونت کارلو در حالت $\theta/T=0.25$ در تیر ساده

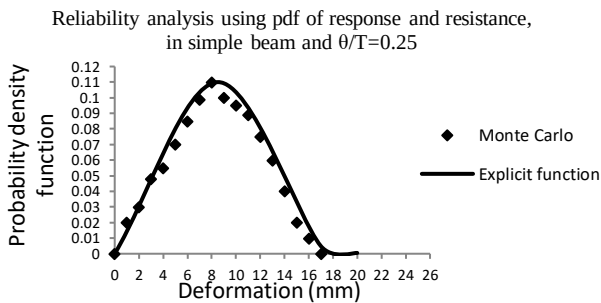


Fig. 7. Comparison of (pdf) using explicit function with Monte Carlo results. For $\theta / T = 0.25$ in simple beam

شکل ۸. مقایسه تابع چگالی احتمال با استفاده از تابع صریح با نتایج مونت کارلو در حالت $\theta/T=1$ در تیر ساده

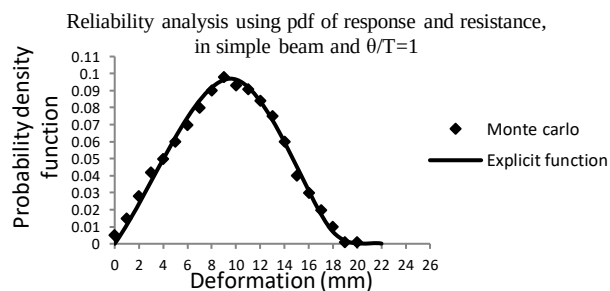


Fig. 8. Comparison of (pdf) using explicit function with Monte Carlo results. For $\theta / T = 1$ in simple beam

شکل ۶. ستون طره تحت اثر بار استاتیکی قائم و جانبی

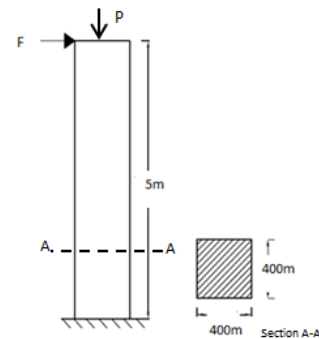


Fig. 6. Cantilever column under vertical and horizontal static load

شکل ۶. محاسبه شاخص قابلیت اعتماد در ستون مثال

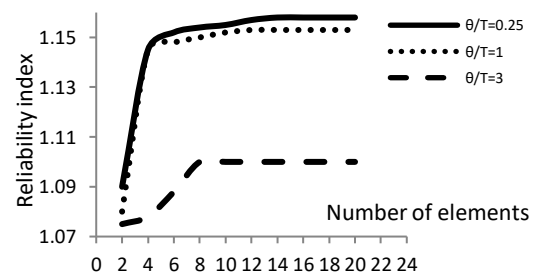


Fig. 6. Calculation of reliability index in column example 2

۳-۳- درستی آزمایشی نتایج با مونت کارلو

به منظور درستی آزمایشی نتایج تابع چگالی احتمال پاسخ، نتایج با مونت کارلو مقایسه می‌شوند. در شبیه‌سازی مونت کارلو در این مقاله از هر متغیر تصادفی با توزیع آماری مشخص به اندازه ۱۰۰۰۰۰ نمونه تولید می‌شود. سپس با استفاده از معادله (۱)،

و ۲-۳ در $\theta/L=3$ تیر نمونه ۱ همگرایی در ۵ المان و در ستون نمونه ۲ در ۸ المان اتفاق می‌افتد که این تعداد برای $\theta/L=0.25$ برای نمونه ۱ و نمونه ۲ به ترتیب ۱۰ المان و ۱۴ المان می‌باشد. همانگونه که در بخش ۲ بیان شد θ/L نمایانگر همبستگی متغیر تصادفی در المان‌های مجار است. نتایج تعداد المان‌های بهینه در هر کدام از نمونه‌ها تاثیر این پارامتر را در رسیدن شاخص قابلیت اعتماد به یک مقدار ثابت نشان می‌دهد. در واقع هر چه همبستگی متغیر تصادفی در دو المان مجاور بیشتر باشد، شاخص قابلیت اعتماد زودتر به همگرایی می‌رسد.

همانطور که از شکل‌های (۳ و ۶) مشاهده می‌شود، هر چه θ/L افزایش یابد، شاخص قابلیت اعتماد کاهش می‌یابد. این نتیجه را می‌توان اینگونه تفسیر کرد که مطابق معادله (۹) با تاثیر مستقیم θ/L بر واریانس متغیرهای تصادفی، هر چه θ/L بیشتر باشد، اثر آن روی واریانس متغیرهای تصادفی بیشتر و در نتیجه سطح مشترک تابع چگالی احتمال پاسخ و تابع ظرفیت سازه افزایش می‌یابد. در نتیجه مقدار خرابی مطابق معادله (۱۰) افزایش یافته و شاخص قابلیت اعتماد معادله (۱۱) کاهش می‌یابد. تاثیر این پارامتر در نمونه ۱، شاخص قابلیت اعتماد را از $1/2$ تا $1/24$ و در مثال ۲ از $1/1$ تا $1/158$ متغیر می‌سازد.

به منظور نشان دادن دلیل انتخاب شاخص قابلیت اعتماد به عنوان معیار همگرایی مش‌بندی، مقایسه‌ای بین تعداد المان‌های بهینه با در نظر گرفتن صرفاً متوسط پاسخ سازه در یک حالت و شاخص قابلیت اعتماد در حالت دیگر به عنوان معیار مش‌بندی انجام گرفته است. شکل (۵) نشان می‌دهد زمانی که فقط متوسط پاسخ مد نظر باشد در تعداد کمتری از المان‌ها همگرایی اتفاق می‌افتد. در حالی که با در نظر گرفتن شاخص قابلیت اعتماد به عنوان معیار همگرایی در تعداد المان‌های بیشتری شاهد همگرایی هستیم. نتایج شکل (۵) برای تیر نمونه ۱، در معیار تغییر مکان تعداد ۵ المان و در معیار شاخص قابلیت اعتماد تعداد ۹ المان بهینه را نشان می‌دهد. دلیل این مساله را می‌توان اینگونه بیان کرد که در حالتی که از متوسط پاسخ به عنوان معیار همگرایی استفاده می‌شود تنها پاسخ متوسط ملاک همگرایی است در حالی که اگر

شکل ۹. مقایسه تابع چگالی احتمال با استفاده از تابع صریح با نتایج مونت کارلو در حالت $\theta/T=3$ در تیر ساده

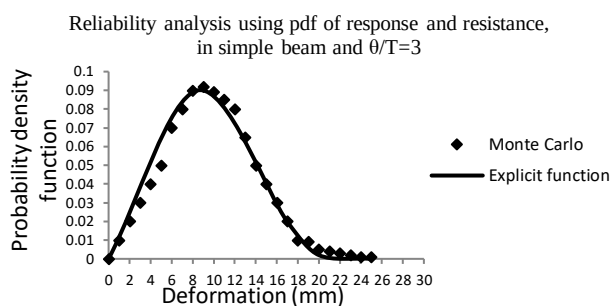


Fig. 9. Comparison of (pdf) using explicit function with Monte Carlo results. For $\theta / T = 3$ in simple beam

همانگونه از شکل‌های (۷، ۸ و ۹) ملاحظه می‌شود، در هر سه حالت $\theta/T=0.25, 1, 3$ ، نتایج به دست آمده از تابع چگالی احتمال پاسخ در مقایسه با نتایج شبیه سازی مونت کارلو هماهنگی مناسبی را خصوصاً در پاسخ ماکزیمم نشان می‌دهد. بنابراین با استفاده از نتایج محاسبه شده، شاخص قابلیت اعتماد به دست آمده از معادلات (۱۰ و ۱۱) دارای درستی کافی در محاسبات اجزاء محدود تصادفی است.

۴- بحث بر روی نتایج

در این پژوهش، تابع چگالی احتمال پاسخ با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی به صورت صریح با ترکیب روش اغتشاش و تغییر متغیر محاسبه می‌شود. با اشتراک تابع چگالی احتمال پاسخ و همچنین منحنی ظرفیت سازه مورد نظر، مقدار احتمال خرابی و در نتیجه شاخص قابلیت اعتماد به دست می‌آید.

دو نمونه عددی با هدف نشان دادن معیار شاخص قابلیت اعتماد در مش‌بندی اجزاء محدود تصادفی بررسی شده است. در این نمونه‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد المان‌ها شاخص قابلیت اعتماد افزایش یافته که مطابق با نتایج اجزاء محدود کلاسیک قابل انتظار است. همچنین با در نظر گرفتن تابع همبستگی در دو المان مجاور، در مقادیر بیشتر همبستگی در تعداد کمتری از المان‌ها همگرایی اتفاق می‌افتد. مطابق بخش ۱-۳

نتایج تابع چگالی احتمال پاسخ با روش صریح در مقایسه با روش شبیه سازی مونت کارلو تطابق مناسبی را بین نتایج نشان می دهد.

۶- تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران محترم که نظرات ارزنده آنها باعث بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند.

۷- مراجع

- 1- F. Casciata, I. Negri, R. Rackwitz, 1991, Geometrical variability in structural members and systems, Joint Committee on Structural Safety.
- 2- R. Lu, Y. Luo, J. P. Conte, 1995, Reliability evaluation of reinforced concrete beams, Structural Safety 14, 277-298.
- 3- A. Yazdani, N. Eftekhari, 2015, The effect of structural properties and ground motion variables on the global response of structural systems, Civil Engineering and Environmental Systems 32(3), 1-14
- 4- H. Contreras, 1980, The stochastic finite element method, Computers and Structures, 12(3), 341-348.
- 5- M. Kleiber, T.D. Hien, 1992, The Stochastic Finite Element Method, Wiley Online Library, Volume 10, Issue 4
- 6- G.I. Schuëller, 2006, Developments in stochastic structural mechanics, Applied Mechanics 75, 755-773.
- 7- G. Stefanou, 2009, The stochastic finite element method: past, present and future, Computer Method In Applied Mechanics And Engineering 198, 1031-1051.
- 8- J.E. Hurtado, A.H. Barbat, 1998, Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics, Computational Method In Engineering 5(1), 3-29.
- 9- H. Zhang, R.L. Mullen, R. Muhanna, 2010, Interval Monte Carlo methods for structural reliability, Structural Safety 32, 183-190
- 10- F. Yamazaki, M. Shinozuka, 1988 Neumann expansion for stochastic finite element analysis, Engineering Mechanics 114(8), 35- 54.
- 11- WK .Liu, T. Belytschko, A. Mani, 1986 Random field finite elements, Numerical methods in Engineering 23, 1831-45.
- 12- E. Vanmarcke, M. Grigoriu, 1983 Stochastic finite element analysis of simple beams, Engineering Mechanics ASCE 109, 1203-1214
- 13- C. Papadimitriou, L.S. Katafygiotis, J.L. Beck, 1995, Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems, Probabilistic Engineering Mechanics 10(4), 251-264.

اثر متغیرهای تصادفی و شاخص قابلیت اعتماد معیار همگرایی در نظر گرفته شود با مجموعه همه پاسخ های محتمل سازه مواجه هستیم که برای رسیدن به همگرایی نیازمند مش بندی ریزتر و در نتیجه تعداد المان بیشتری است. بنابراین استفاده از شاخص قابلیت اعتماد در مش بندی هر چند منجر به افزایش تعداد المان ها می شود اما در عمل مناسب تر از در نظر گرفتن پاسخ متوسط به عنوان معیار همگرایی است چون همه پاسخ های محتمل سازه را تحت بارگذاری مشخص در نظر می گیرد که در مسائل طراحی سازه و مسائل مربوط به آسیب در سازه ها می تواند عامل مهمی در نظر گرفته شود.

در نهایت، مطابق شکل های (۷ تا ۹) نتایج تابع چگالی احتمال محاسبه شده از معادله صریح (۷) با نتایج شبیه سازی مونت کارلو در ۱۰۰۰۰۰ نمونه نشان دهنده هماهنگی مناسب منحنی تابع چگالی احتمال با نتایج شبیه سازی است. درستی آزمایی تابع چگالی احتمال محاسبه شده در این مطالعه، موجب می شود از نتایج مربوط به محاسبه شاخص قابلیت اعتماد و به دنبال آن نتایج مش بندی و محاسبه تعداد المان بهینه بر این اساس اطمینان حاصل نمود.

۵- نتایج تحقیق

با افزایش تعداد المان ها در سازه های مورد مطالعه شاخص قابلیت اعتماد افزایش می یابد.

با افزایش همبستگی متغیرهای تصادفی در المان های مجاور، همگرایی در تعداد کمتری از المان ها اتفاق می افتد.

با افزایش پارامتر θ/L مقدار شاخص قابلیت اعتماد کاهش می یابد.

با در نظر گرفتن شاخص قابلیت اعتماد در مقایسه با پاسخ متوسط به عنوان معیار همگرایی، در تعداد بیشتر المان ها شاخص قابلیت اعتماد همگرا می شود که دلیل آن استفاده از همه پاسخ های محتمل سازه با تکیه بر تابع چگالی احتمال پاسخ است.

- 30- D. Li, Zh. Zheng, et al, 2017, Stochastic nonlinear vibration and reliability of orthotropic membrane structure under impact load, *Thin-Walled Structures* (119), 247-255.
- 31- P. Ni, J. Li, et al, 2020, Reliability analysis and design optimization of nonlinear structures, *Reliability Engineering and System Safety* (198), 1010-1016
- 32- . Liu, X. Ruan, 2019, Probability density evolution analysis of stochastic nonlinear structure under non-stationary ground motions, *Structures And Infrastructure Engineering* (15), 1573-2479
- 33-F.N. Momin, H.R. Millwater, R.W. Osborn, M.P. Enright, 2010, A non-intrusivemethod to add finite element-based random variables to a probabilistic design code, *Finite Element In Analysis And Design* 46(3), 280–287.
- 34-D. Straub, A.D. Kiureghian, 2010, Bayesian network enhanced with structural reliability methods: application, *Engineering Mechanics* 136(10), 1259–1270.
- 35- X.G. Hua, Y.Q. Ni, Z.Q. Chen, J.M. Ko, 2007, An improved perturbation method for stochastic finite element model updating, *Numerical Methods In Engineering* 73(13), 1845–1864.
- 36- A. Culla, A. Carcaterra, 2007, Statistical moments predictions for a moored floating body oscillating in random waves, *Sound And Vibration* 308(2), 44–66.
- 37- L .J. M. Aslett, T. Nagapetyan, S. J. Vollmer, 2017, Multilevel Monte Carlo for Reliability Theory, *Reliability Engineering System And Safety* 165, 188-196.
- 38- S. Huang, S. Mahadevan, R. Rebba, 2007, Collocation – based stochastic finite element analysis for random field problems, *Probabilistic Engineering Mechanics* 22(2), 194-205.
- 39- L. Pichler, H.J. Pradlwarter, 2009, Evolution of probability densities in the phase for reliability analysis of non-linear structures, *Structural Safety* 31(4), 316 – 324.
- 40- A. Yazdani, T. Takada, 2011, Probabilistic study of the influence of ground motion variables on response spectra, *Structural Engineering and Mechanics* 39(6), 877-893.
- 41- D. Xia, J. L. Yun, 2014, Transformed perturbation stochastic finite element method for static response analysis of stochastic structures, *Finite Elements in Analysis and Design* 79, 9-21.
- 42- D. Xia, 2013, Response Probability Analysis of Random Acoustic Field Based on Perturbation Stochastic Method and Change-of-Variable Technique, *Vibration and Acoustics* 135(5), 1312-1333.
- 43- B. Rong, X. Rui, L.Tao, 2012, Perturbation Finite Element Transfer Matrix Method for Random Eigenvalue Problems of Uncertain Structures, *Applied Mechanics* 79(2), 1005-1013.
- 44- B. Xia, D. Yu, X. Han, C. Jiang, 2014, Unified response probability distribution analysis of two hybrid
- 14- A.M. Freudental, 1947, The safety of structures, *Transactions, ASCE* 112, 125-159.
- 15- A.Der Kiureghian , J.B. Ke , 1988, The stochastic finite element method in structural reliability ,*Probabilistic Engineering Mechanics* 3(2), 83–91.
- 16- P.L. Liu, A.Der Kiureghian, 1991, Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures, *Engineering Mechanics* 117(8), 1806–1825.
- 17- B. Sudret , A. Der Kiureghian, 2000 Stochastic finite elements and reliability: a state-of-the-art report, *Structural Engineering, Mechanics And Materials, Report No UCB/SEMM/08*
- 18- S. Huang, S. Mahadevan, R. Rebba, 2007, Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems, *Probabilistic Engineering Mechanics* 22(2), 194-205
- 19- S. Mahadevan, A. Halder, 1991, Practical Random Field Discretization In Stochastic Finite Element Analysis, *Structural Safety* 9, 283 – 304.
- 20- R.G. Ghanem, P.D. Spanos, 1991 Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis, *Engineering Mechanics* 117(10), 2351–2371.
- 21- E. H. Vanmarcke, 1994, Stochastic finite elements and experimental measurements, *Probabilistic Engineering Mechanics* 9(2), 103-114.
- 22- R. Hambli, 2009, Statistical damage analysis of extrusion processes using finite element method and neural networks simulation, *Finite Elements in Analysis and Design* 45(10), 640 – 649.
- 23- M. Jalalpour, J.K. Guest, T. Igusa, 2013, Reliability – based topology optimization of trusses with stochastic stiffness, *Structural Safety* 43, 41-49.
- 24- H.A. Jesen, F. Mayorga, M.A. Valdebenito, 2015, Reliability sensitivity estimation of nonlinear structural systems under stochastic excitation: A simulation-based approach, *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering* 289, 1-23.
- 25- A. Der Kiureghian, 1996, Structural reliability methods for seismic safety assessment: a review, *Engineering Structures* 18(6), 412-424.
- 26- D.M. Tartakovsky, D. Xiu, 2006, Stochastic analysis of transport in tubes with rough walls, *Computational Physics* 217(1), 248–259.
- 27- M.Aldosary, J.Wang and C.Li, 2018, Structural reliability and stochastic finite element methods: State-of-the-art review and evidence-based comparison, *Engineering Computations* 35(6), 2165-2214
- 28- W. Gao, D. Wu , K.Gao, X.Chen, F. Tin-Loi; 2018, Structural reliability analysis with imprecise random and interval fields, *Applied Mathematical modelling* 55, 49-67
- 29- A. Sofi, E. Romeo, 2017, A Unified Response Surface Framework For The Interval And Stochastic Finite Element Analysis Of Structures With Uncertain Parameters, *Probabilistic Engineering Mechanics* (54), 25-36.

- 50- R. Lu, Y. Luo, J. P. Conte, 1994, Reliability evaluation of reinforced concrete beams, structural safety 14(4), 277-298.
- 51- F. F. Udoeyo, P. Ugbem, 1995, Dimensional Variables in Reinforced Concrete Members, Structural Engineering, 1865-1867
- 52- N. B. Hossain, M. G. Stewart, 2001, Probabilistic Models Of Damaging Deflections For Floor Elements, Performance Of Constructes Facilities 15(4),
- 53- P. Gardoni¹; A. D. Kiureghian, 2002, Probabilistic Capacity Models and Fragility Estimates for Reinforced Concrete Columns based on Experimental Observations, Engineering Mechanics 128(10), 383-393.
- uncertain acoustic fields, Computer Methods in Appied Mechanics and Engineering 276, 20-34.
- 45- B. Xia, D. Yu, 2014, An interval random perturbation method for structural-acoustic system with hybrid uncertain parameters, Numerical Methods in Engineering 97(3), 181-206.
- 46- E.H. Vanmarcke, 1983, Random Fields: Analysis and Synthesis, Advancing Earth and Space Science 64(37).
- 47- Y. Shuwang, G. Linping, 2015, Calculation of Scale of Fluctuation and Variance Reduction Function, Transactions of Tianjin University 21(1), 41-49
- 48- JCSS Probabilistic Model Code PART2: Load Models, 2001, 99CON-DYN/M0098.
- 49- T. Vrouwenvelder, M. Holicky, J. Markova, JCSS Probabilistic Model Code, Example Applications,

Reliability analysis in one-dimensional structures using the explicit probability density function of static response in stochastic finite element

Rezan Chobdarian^{1*}, Azad Yazdani², Hooshang Dabbagh³

1- PhD Candidate of structural engineering, University of Kurdistan

2- Professor, Department of Civil Engineering, University of Kurdistan

3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Kurdistan

*r.chobdarian@eng.uok.ac.ir

Abstract

Reliability analysis, considering the randomness of geometry, materials, and loading variables, is a proper guide for structural design in engineering. The stochastic finite element method is used to analyze the structural systems, concerning uncertainty in random parameters of structures. Solving the equations of stochastic finite element leads to the calculation of all possible structural responses taking into account all the random variables of the structural system and loads. Because of the uncertainty effect on the response of structural systems, reliability analysis seems essential. However, due to the limitations of the classical methods of reliability analysis, there is a need to calculate the reliability index based on the probability density function of response in structures. In this study, by combining the perturbation method and the change – of – variable method and without the limitation of the statistical type of random distribution of random variables, the probability density function of response is calculated. By calculating the probability density function of the static response of the structures, as a result, the probability of failure and the reliability index are obtained directly. It is obvious that the accuracy of the result of the stochastic finite element analysis depends on the random field element meshes. For this purpose, the distributed random field is discretized over the number of elements of equal length in structural members for each random variable.

In the stochastic finite element method, due to the uncertainty of the characteristics of random variables in the structure, it is necessary to define a correlation function between a random variable in different elements. The reliability index is considered as a measure of convergence by considering the scale of fluctuations and the correlation function of random variables in adjacent elements in structure. In each number of elements, the structural reliability index is calculated directly by using the explicit probability density function of static response and the structural resistance function to converge on a certain number of elements. In this study, the stochastic finite element analysis is performed in linear static mode for a simple beam and a cantilever column. The variables of geometry, materials, and loading are also considered randomly with real statistical distributions according to the literature review. As can be expected from the deterministic finite element method, as the number of elements increases and the meshing is smaller, the reliability index increases. Considering the lower scale of fluctuations for random variables makes the reliability index converge to a larger value. However, on a larger scale of fluctuations convergence occurs in a smaller number of elements due to the greater correlation of random variables in adjacent elements. Additionally, the results of the probability density function of the static response with the explicit method compared to those of the Monte Carlo simulation method show a better match. The advantage of using the reliability index as a measure of convergence in meshing the configuration of limited random components is taking into account all the possible structural responses instead of using the average structural response in the design of structures.

Keywords: Probability Density Function, Stochastic Finite Element Method, Reliability Index