

شناسایی تحلیلی نواحی آسیب‌دیده در ورق‌های دایره‌ای متخلخل مستقر بر بستر الاستیک بر اساس مشتقات اشکال مودی

سامان کریمی^۱، محسن بزرگ نسب^{۲*}، رضا تقی پور^۳، محمد ملاعلی پور^۴

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران دانشگاه مازندران

۲- استادیار گروه مهندسی عمران دانشگاه مازندران

۳- استادیار گروه مهندسی عمران دانشگاه مازندران

۴- دانشیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه مازندران

m.bozorgnasab@umz.ac.ir*

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش: ۹۸/۱۰/۱۰

چکیده

نظارت بر سلامت سازه برای پیش‌بینی مشکلات و حفظ یکپارچگی سازه ضروری است و این موضوع می‌تواند در طولانی شدن عمر سازه مؤثر باشد. در این مطالعه، شناسایی آسیب در ورق‌های دایره‌ای متخلخل بر اساس شکل‌های مودی و روی بستر الاستیک بررسی شده است. تحلیل ارتعاش بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول و روش تحلیلی انجام شده است. بر مبنای تحلیل انجام‌شده، ورق با شرایط مرزی مختلف قابل بررسی است. در این مطالعه، ابتدا معادلات حاکم بر ورق‌های دایره‌ای با مواد هدفمند در حالت ارتعاش آزاد استخراج شده و سپس مجهولات تا جمله‌ای که پاسخ‌ها همگرا شوند محاسبه شدند. برای یافتن فرکانس‌های طبیعی ورق، دترمینان ماتریس مورد نظر که بر اساس شرایط مرزی و پیوستگی پی‌ریزی شده است محاسبه شد. در انتها، بر اساس روش نیوتن-رافسون، فرکانس‌های ابتدایی ورق به دست آمده و شکل‌های مودی آن‌ها نیز ترسیم شدند. برای اثبات دقت و کارایی روش پیشنهادی، فرکانس‌های بدست آمده با نتایج ارائه شده در پژوهش‌های سایر پژوهشگران مقایسه شده است. مقایسه‌ها حاکی از آن بود که نتایج بدست آمده بسیار دقیق بوده و محل آسیب نیز در نمودار به خوبی نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: ورق‌های دایره‌ای متخلخل، تحلیل مودال، مواد هدفمند، تئوری برشی مرتبه اول، شناسایی آسیب

۱- مقدمه

است، اما به دلیل کاربرد آن در صنایع مختلف، همچنان مورد توجه بسیاری از پژوهشگران هست. باربری صفحات دایره‌ای به عنوان المان سازه‌ای می‌تواند تحت تاثیر عواملی مانند بارگذاری، ویژگی‌های مصالح، نسبت ابعاد، شرایط تکیه‌گاهی

سازه‌های مدور در بیشتر صنایع کاربرد داشته و می‌توانند به صورت ورق‌های دایره‌ای تحلیل شد. مسئله ارتعاش صفحات دایره‌ای، اگر چه سالیان زیادی از سابقه پژوهشی آن گذشته

متفاوت و ... قرار گرفته و دچار آسیب شوند؛ بنابراین، بررسی آسیب در این صفحات با در نظر گرفتن مصالح جدید از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از رایج‌ترین روش‌های شناسایی آسیب، استفاده از اطلاعات مودی است که در سال‌های اخیر پژوهش‌های گسترده‌ای روی آن انجام شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره خواهد شد. پاندی و همکاران [1] در سال ۱۹۹۰ برای شناسایی و تعیین محل آسیب در سازه از پارامتر شکل مود دورانی استفاده کردند. با استفاده از مدل پایه و تیر با تکیه‌گاه ساده، مشخص شد که تغییرات مطلق شکل مود دورانی در محل آسیب خود را نشان می‌دهد، بنابراین برای شناسایی آسیب در سازه می‌توان از آن استفاده نمود. آن‌ها دریافتند که با افزایش آسیب، تغییرات شکل مود دورانی نیز افزایش می‌یابد. تحلیل‌های اجزای محدودی برای یافتن جابه‌جایی شکل‌های مودی برای دو مدل ارائه شده در این مطالعه استفاده شد. سمپایو و همکاران [2] در سال ۱۹۹۹ به بررسی آسیب طبق روش تابع پاسخ فرکانسی^۳ که وجود، مکان و وسعت آسیب را ارائه می‌دهد پرداختند. در این مطالعه، این روش به صورت تئوری بیان شده و با دو روش مشهور مقایسه شده است. برای توصیف بهتر این روش از اطلاعات عددی و تجربی حاصل از یک پل واقعی استفاده شده است. کورنول [3] در سال ۱۹۹۹ به مساله استفاده از پارامترهای مودی اندازه‌گیری شده در تعیین و مکان‌یابی آسیب در سازه‌های ورقه‌ای شکل پرداخت. از آنجایی که بسیاری از روش‌های مکان‌یابی آسیب بر پایه تغییرات مودی قبل و بعد از آسیب هستند، بسیاری از این روش‌ها نیازمند مدل اجزای محدودی یا شکل‌های مودی جرمی نرمالایز شده هستند؛ از این رو، در این مطالعه از روشی بر مبنای تغییرات انرژی کرنشی سازه استفاده شده است. این روش در ابتدا برای سازه‌هایی از قبیل تیر توسعه یافته بود و در نتیجه به صورت یک بعدی بحث شد. کورنول این روش را برای ورق توسعه داد و به صورت دوبعدی بررسی کرد. این روش برای بررسی آسیب تنها به شکل‌های مودی

سازه سالم و آسیب‌دیده نیاز دارد. هیلگر و رمیرزه [4] در سال ۲۰۰۰ به بررسی ویژگی‌های ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای پیزوالکتریک^۶ لایه‌ای با استفاده از مدل لایه گسسته^۷ حاصل از معادلات حرکت تناوبی پرداختند. آن‌ها از جهت عمود بر ورق برای یافتن سه مولفه جابه‌جایی استفاده کردند. حالت‌های ارائه شده در این مطالعه برای ورق‌های دایره‌ای ضخیم و نازک معتبر است. نتایج با مطالعات گذشته هماهنگی بسیار خوبی داشته است. کیم هو و چوانگ^۸ [5] در سال ۲۰۰۲ به بررسی آسیب در پوسته‌های دایره‌ای-استوانه‌ای کامپوزیتی مقاوم شده توسط الیاف بر اساس فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی در محل‌های به خصوص پرداختند. مکان خرابی در راستای محوری با مقایسه تغییرات فرکانس پیش‌بینی شده با فرکانس سنجیده شده بدست آمد. از آنجایی که حساسیت فرکانس به راحتی با مدل اجزای محدود سازه سالم بدست می‌آید، نیازی به مدل کردن پوسته معیوب نبود و همچنین اگر پوسته، متقارن در نظر گرفته شود اطلاعات دیگری از جمله شکل مود می‌تواند برای مکان‌یابی دقیق آسیب مورد استفاده قرار گیرد. نتایج این مطالعه حاکی از آن بود که روش پیشنهادشده به خوبی مکان خرابی را در پوسته‌های با تکیه‌گاه ساده و آزاد نشان می‌داد. ابدو و هوری^۹ [6] در سال ۲۰۰۲ به بررسی عددی ارتباط بین ویژگی آسیب و تغییرات در خصوصیات دینامیکی پرداختند. آن‌ها دریافتند که دوران شکل مودی شاخص حساسی نسبت به آسیب است. نتایج عددی حاکی از آن بود که دوران شکل مودی دارای ویژگی‌هایی از محل آسیب بوده و می‌تواند محل آسیب‌های متفاوت با اندازه‌های مختلف را در سازه تعیین کند. الله‌وردی‌زاده و همکاران^{۱۰} [7] در سال ۲۰۰۸ روشی شبه تحلیلی برای ارتعاش اجباری و آزاد متقارن ورق دایره‌ای نازک ساخته‌شده با مواد هدفمند را ارائه کردند. در این مطالعه، ضخامت ورق ثابت و ویژگی‌های مواد هدفمند در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شده بود. در این مطالعه، معادلات

6. Piezoelectric
7. Discrete-layer model
8. Kim-Ho & Ping-Cheung
9. Abdo & Hori
10. Allahverdizadeh et al

1. Pandey et al
2. Sampaio et al
3. Frequency-response-function (FRF)
4. Cornwell
5. P.R Heyliger & G Ramirez

حاکم طبق روش فرضی مد-زمان و روش کنتورویچ^۱ حل شدند. نتایج حاکی از آن بود که فرکانس‌های ارتعاش آزاد به دامنه‌های ارتعاشی وابسته بوده و شاخص کاهش حجم روی ویژگی‌های پاسخ غیرخطی ورق تاثیرگذار است. پارک^۲ [8] در سال ۲۰۰۸ به استخراج معادله فرکانس برای ارتعاش درون صفحه‌ای ورق دایره‌ای گیردار با ضخامت یکنواخت و با مصالح ایزوتروپیک پرداخت. برای این امر در مختصات استوانه‌ای، ابتدا انرژی جنبشی و پتانسیل را طبق روابط تنش-کرنش-جابه‌جایی محاسبه کرده و سپس اصل همپلتون را اعمال نمود که در نهایت منجر به جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای را در دو راستای r و θ شد. نتایج این مطالعه با تحلیل‌های اجزای محدودی و مطالعات گذشته مقایسه شده است. دوان و همکاران^۳ [9] در سال ۲۰۱۴ به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای نازک با استفاده از روش حلقه منفرد مجزاء پرداختند. با استفاده از این روش برای ورق دایره‌ای با شعاع R_1 ، آن‌ها ابتدا معادله سختی را در بازه $[-R_1, R_1]$ با گره‌هایی به تعداد زوج استخراج کرده و سپس بر اساس شرایط تقارن یا عدم تقارن، بازه را به $[0, R_1]$ محدود کردند. آن‌ها به کمک این روش، فرکانس‌های ورق‌های دایره‌ای نازک با ضخامت یکنواخت یا متغیر و نیز ورق‌های حلقوی نازک با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت را بدست آوردند. آن‌ها با مقایسه روش پیشنهادی خود با روش‌های تحلیلی و عددی سایر پژوهشگران، درستی روش خود را تایید کردند. خار و داس^۴ [10] در سال ۲۰۱۸ در مطالعه‌ای به تحلیل‌های عددی ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای لایه‌ای ضخیم پرداختند. این ورق‌ها دارای شرایط تکیه‌گاهی آزاد، گیردار و ساده در دو انتها بودند. روش اجزای محدود که بر پایه تئوری سه بعدی الاستیسیته است برای بدست آوردن ده فرکانس طبیعی ابتدایی ورق دایره‌ای یکنواخت استفاده شده است. پنج مود ابتدایی ارتعاش برای شرایط مرزی متفاوت به صورت تصویری در این مطالعه قابل مشاهده است. درستی‌آزمایی این مطالعه از طریق نتایج مطالعات دیگر انجام گرفته است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مطالعات کمی روی

آسیب ورق‌های دایره‌ای انجام شده است؛ پس، در این مطالعه، از یک روش تحلیلی برای بدست آوردن شکل‌های مودی و تعیین محل آسیب در ورق‌های دایره‌ای قرار گرفته روی بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است. ورق‌های دایره‌ای در صنعت کاربرد زیادی دارند از جمله می‌توان در سایبان، بالکن، صفحه نمایش‌ها، سالن‌ها و سقف‌های استخر اشاره کرد. مواد متخلخل دارای وزن سبک، انعطاف‌پذیر و مقاوم در برابر ترک‌های موئی هستند، این مواد دارای ساختار دو فازی بوده که یک فاز آن جامد و فاز دیگر مایع یا گاز است که در طبیعت به وفور یافت می‌شود؛ به همین دلیل امروزه با توسعه تکنولوژی، موادی با ساختار متخلخل برای کاربرد در صنایع مختلف تولید شده است. بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک، یک مدل دوپارامتری است که عکس‌العمل تکیه‌گاهی آن از طریق یک فنر عمودی به همراه یک لایه برشی تعیین می‌شود. برای تعیین جابه‌جایی و محاسبه تنش در این بستر از تابع تبدیل هنکل-بسل استفاده می‌شود. در این مقاله، معادلات حاکم بر ورق‌های دایره‌ای با مواد هدفمند در حالت ارتعاش آزاد استخراج شده و سپس مجهولات تا جمله‌ای که پاسخ‌ها همگرا شوند محاسبه می‌شود. پس از آن، برای یافتن فرکانس‌های طبیعی ورق، دترمینان ماتریس مورد نظر که بر اساس شرایط مرزی و پیوستگی تشکیل و محاسبه می‌شود؛ سپس بر اساس روش نیوتن-رافسون، فرکانس‌های طبیعی ابتدایی ورق بدست آمده و شکل‌های مودی آن‌ها نیز ترسیم می‌شوند. برای اثبات دقت و کارایی روش پیشنهادی، فرکانس‌های بدست آمده با نتایج ارائه شده در پژوهش‌های سایر پژوهشگران مقایسه شد. ساختار این مقاله بدین صورت است که ابتدا معادلات حاکم بر ورق‌های دایره‌ای استخراج شده و سپس شرایط مرزی و پیوستگی ورق ارائه می‌شوند. پس از آن، به چگونگی حل معادلات پرداخته می‌شود. درستی‌آزمایی روش پیشنهادی بخش بعدی این مقاله است. پس از آن به نتایج استخراج شده پرداخته شده و در انتها جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مقاله ارائه خواهد شد.

۴. Discrete singular convolution (DSC)

5. Khare and Das.

1. Kantorovich

2. Chan Park

۳. Duan et al

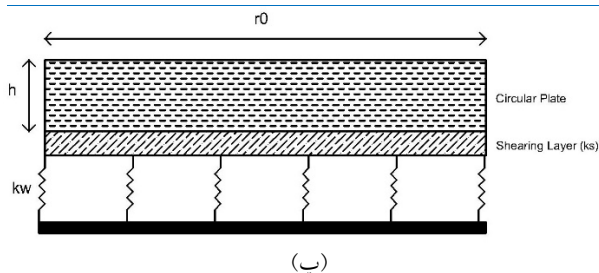


Fig.1. Model of a circular plate

۱-۲. استخراج معادلات حاکم بر ورق

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، معادلات حاکم به صورت زیر است [12,11]:

$$\begin{aligned} (1): & A(s) \left(u_{0,rr}(s) + \frac{u_{0,r}(s)}{r} - \frac{u_0(s)}{r^2} \right) + B(s) \left(\psi_{r,rr}(s) + \frac{\psi_{r,r}(s)}{r} - \frac{\psi_r(s)}{r^2} \right) = I_0(s) \ddot{u}_0(s) + I_1(s) \ddot{\psi}_r(s) \\ (2): & B(s) \left(u_{0,rr}(s) + \frac{u_{0,r}(s)}{r} - \frac{u_0(s)}{r^2} \right) + D(s) \left(\psi_{r,rr}(s) + \frac{\psi_{r,r}(s)}{r} - \frac{\psi_r(s)}{r^2} \right) - k^2 \frac{(1-\nu(s))}{2} A(s) (\psi_r(s) + w_{,r}(s)) = \\ & I_1^{(k)} \ddot{u}_0^{(k)} + I_2^{(k)} \ddot{\psi}_r^{(k)} \\ (3): & k^2 \frac{(1-\nu(s))}{2} A(s) \left(\psi_{r,r}(s) + \frac{\psi_r(s)}{r} + w_{,rr}(s) + \frac{w_{,r}(s)}{r} \right) = \\ & I_0^{(s)} \ddot{w}(s) + k_w w - k_s (w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) \end{aligned} \quad (2)$$

(S) ، شماره لایه مورد نظر از ورق دایره‌ای، ν ضریب پواسون، k^2 ضریب تصحیح برشی و مقدار آن $\frac{5}{6}$ است، k_s و k_w ضرایب وینکلر و پاسترناک بستر الاستیک بوده و به صورت رابطه‌ی (۳) محاسبه می‌شود، منظور از عباراتی مانند $w_{,r}$ مشتق نسبت به r است و همچنین ضرایب $A(s)$ ، $B(s)$ ، $D(s)$ $I_0(s)$ ، $I_1(s)$ و $I_2(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A(s) \\ B(s) \\ D(s) \end{Bmatrix} &= \int \frac{h(s)}{2} \frac{E(s)}{1-\nu^2(s)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} I_0(s) \\ I_1(s) \\ I_2(s) \end{Bmatrix} &= \int \frac{h(s)}{2} \rho(s) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \\ k_{w \text{ or } s} &= \frac{K_{w \text{ or } s} \times D^{(1)}}{r_0^4} \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق $K_{w \text{ or } s}$ سختی بی‌بعد بستر است.

برای اعمال تخلخل به ورق، از دو حالت توزیع تخلخل زیر استفاده شده است [13]:

- تخلخل نوع (I):

۲- مدل سازی ورق دایره‌ای

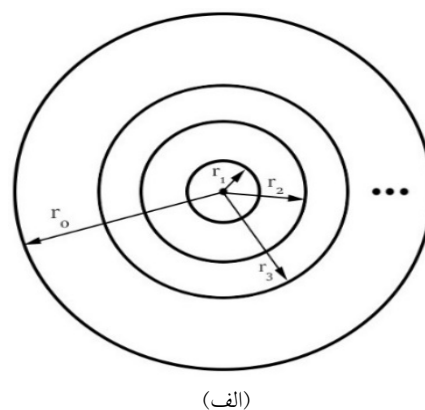
در این قسمت، معادلات حاکم بر ورق‌های دایره‌ای، شرایط پیوستگی نواحی مختلف ورق و شرایط مرزی ارائه شده‌اند. برای استخراج نتایج از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است که بر اساس توابع جابه‌جایی زیر است:

$$u(z, r) = u_0(r) + z\psi_x(r) \quad (1)$$

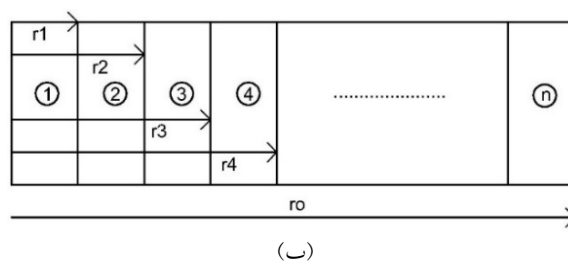
$$w(z, r) = w_0(r)$$

u جابه‌جایی درون صفحه‌ای ورق، u_0 جابه‌جایی درون صفحه‌ای لایه میانی ورق، ψ_x چرخش سطح عرضی و w خیز ورق است. شکل (۱). نمایی از هندسه ورق بررسی شده را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، این ورق روی بستر دوپارامتری وینکلر-پاسترناک واقع شده است. در این شکل، یک ورق با n لایه نشان داده شده است که شعاع هر لایه از مجموع شعاع لایه مورد نظر با شعاع لایه‌های قبلی بدست می‌آید. شعاع خارجی ورق دایره‌ای نیز r_0 در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است در این مقاله، نمودارهای رسم شده همگی به علت تقارن ورق برای نیمی از آن ترسیم شده و ورق با پنج لایه در نظر گرفته شده است.

شکل ۱. مدل ورق دایره‌ای



(الف)



(ب)

$$M_r^{(s)} = \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} \sigma_r^{(s)} z dz = B^{(s)} \left(u_{0,r}^{(s)} + \frac{\nu^{(s)}}{r} u_0^{(s)} \right) + D^{(s)} \left(\psi_{r,r}^{(s)} + \frac{\nu^{(s)}}{r} \psi_r^{(s)} \right)$$

$$Q_r^{(s)} = \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} \tau_{rz}^{(s)} dz = k^2 \left(\frac{1-\nu^{(s)}}{2} \right) A^{(s)} (\psi_r^{(s)} + w_{,r}^{(s)}) \quad (8)$$

در شکل ۲. M_r, N_r و Q_r در لایه ی (s) نشان داده شده اند:

شکل ۲. نتیجه های تنش در لایه ی (s)

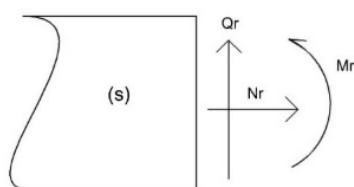


Fig.2. Stress resultants in layer (s)

برای اعمال شرایط مرزی متناسب با تکیه گاه مورد نظر، شرایط کلی زیر در نظر گرفته می شود:

تکیه گاه گیردار:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \psi_x = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (9)$$

تکیه گاه آزاد:

$$\begin{cases} N_r = 0 \\ M_r = 0 \\ Q_r = 0 \end{cases} \quad (10)$$

تکیه گاه ساده:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ M_r = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (11)$$

و شرایط مرکز ورق نیز به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \psi_x = 0 \\ w_{,r} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

۳ - حل معادلات حاکم بر ورق دایره ای

برای دستیابی به مولفه های جابه جایی باید دستگاه معادلات حاکم حل شود. در این مطالعه از بسط سری توانی برای حل معادلات حاکم بر ورق های دایره ای استفاده شده است که به صورت زیر بوده و حول نقطه ی a بسط داده شده است:

$$\begin{aligned} E(z)^{(s)} &= E_1^{(s)} [1 - e_0^{(s)} \cos(\pi \xi^{(s)})] \\ G(z)^{(s)} &= G_1^{(s)} [1 - e_0^{(s)} \cos(\pi \xi^{(s)})] \\ \rho(z)^{(s)} &= \rho_1^{(s)} [1 - e_m^{(s)} \cos(\pi \xi^{(s)})] \end{aligned} \quad (4)$$

• تخلخل نوع (II):

$$\begin{aligned} E(z)^{(s)} &= E_1^{(s)} [1 - e_0^{(s)} \cos(\frac{\pi}{2} \xi^{(s)} + \frac{\pi}{4})] \\ G(z)^{(s)} &= G_1^{(s)} [1 - e_0^{(s)} \cos(\frac{\pi}{2} \xi^{(s)} + \frac{\pi}{4})] \\ \rho(z)^{(s)} &= \rho_1^{(s)} [1 - e_m^{(s)} \cos(\frac{\pi}{2} \xi^{(s)} + \frac{\pi}{4})] \end{aligned} \quad (5)$$

که در روابط ۴ و ۵: $E_1^{(s)}$ مدول یانگ، $G_1^{(s)}$ مدول برشی و $\rho_1^{(s)}$ چگالی جرمی، $e_0^{(s)}$ ضریب تخلخل بوده و به صورت رابطه ۶ تعریف می شود و سایر پارامترها نیز به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \xi^{(s)} = \frac{z}{h^{(s)}} \\ e_0^{(s)} = 1 - \frac{E_0^{(s)}}{E_1^{(s)}} = 1 - \frac{G_0^{(s)}}{G_1^{(s)}} & (0 < e_0 < 1) \\ e_m^{(s)} = 1 - \frac{\rho_0^{(s)}}{\rho_1^{(s)}} = 1 - \sqrt{1 - e_0^{(s)}} & (0 < e_m < 1) \end{cases} \quad (6)$$

در این مقاله، ضریب تخلخل ۰، ۰/۲ و ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

۲.۲- شرایط پیوستگی و مرزی ورق

شرایط پیوستگی جابه جایی و همچنین نتیجه های تنش در محل تماس قسمت های مختلف باید برقرار شود.

شرایط پیوستگی بدین صورت قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} r = r_{(s)} \rightarrow u_0^{(s)} = u_0^{(s+1)} \\ r = r_{(s)} \rightarrow \psi_x^{(s)} = \psi_x^{(s+1)} \\ r = r_{(s)} \rightarrow w_0^{(s)} = w_0^{(s+1)} \\ r = r_{(s)} \rightarrow N_r^{(s)} = N_r^{(s+1)} \\ r = r_{(s)} \rightarrow M_r^{(s)} = M_r^{(s+1)} \\ r = r_{(s)} \rightarrow Q_r^{(s)} = Q_r^{(s+1)} \end{cases} \quad (7)$$

Q_r, M_r, N_r به ترتیب نیروی درون صفحه ای، گشتاور خمشی و نیروی برشی عرضی بر واحد طول هستند که بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر تعریف می شوند:

$$N_r^{(s)} = \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} \sigma_r^{(s)} dz = A^{(s)} \left(u_{0,r}^{(s)} + \frac{\nu^{(s)}}{r} u_0^{(s)} \right) + B^{(s)} \left(\psi_{r,r}^{(s)} + \frac{\nu^{(s)}}{r} \psi_r^{(s)} \right)$$

$$\begin{cases} u_0^{(s)} = \sum_{i=0}^N U_i^{(s)}(r-r_{(s)})^i = U_0^{(s)} + U_1^{(s)}(r-r_{(s)}) + U_2^{(s)}(r-r_{(s)})^2 + \dots \\ \psi_r^{(s)} = \sum_{i=0}^N \phi_i^{(s)}(r-r_{(s)})^i = \phi_0^{(s)} + \phi_1^{(s)}(r-r_{(s)}) + \phi_2^{(s)}(r-r_{(s)})^2 + \dots \\ w^{(s)} = \sum_{i=0}^N W_i^{(s)}(r-r_{(s)})^i = W_0^{(s)} + W_1^{(s)}(r-r_{(s)}) + W_2^{(s)}(r-r_{(s)})^2 + \dots \end{cases} \quad (16)$$

که در رابطه ی فوق به جای s می توان اعداد ۲ تا n را برای نواحی دوم تا n ام اختیار کرد، اما از آن جایی که در این مطالعه، ورق به پنج لایه تقسیم شده، $n=5$ خواهد بود. سری های توانی مورد استفاده در این قسمت به شرح زیر هست:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sum_{j=0}^M -\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}(r-r_{(s)})^j = -\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right) - \left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^2(r-r_{(s)}) - \dots \\ \frac{1}{r^2} &= \sum_{j=0}^M (j+1)\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+2}(r-r_{(s)})^j = \left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^3(r-r_{(s)}) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری روابط ۳ و ۱۶ و ۱۷ در مجموع روابط ۲، سه معادله حاکم بر ورق های دایره ای بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N [A^{(s)}(i+2)(i+1)U_{i+2}^{(s)} + A^{(s)} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}(i-j+1)U_{i-j+1}^{(s)}\right) - A^{(s)} \sum_{j=0}^i \left((j+1)\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+2}U_{i-j}^{(s)}\right) + B^{(s)}(i+2)(i+1)\phi_{i+2}^{(s)} + B^{(s)} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}(i-j+1)\phi_{i-j+1}^{(s)}\right) - B^{(s)} \sum_{j=0}^i \left((j+1)\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+2}\phi_{i-j}^{(s)}\right) + I_0^{(s)}\omega^2 U_i^{(s)} + I_1^{(s)}\omega^2 \phi_i^{(s)}](r-r_{(s)})^i = 0 \\ \sum_{i=0}^N [B^{(s)}(i+2)(i+1)U_{i+2}^{(s)} + B^{(s)} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}(i-j+1)U_{i-j+1}^{(s)}\right) - B^{(s)} \sum_{j=0}^i \left((j+1)\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+2}U_{i-j}^{(s)}\right) + D^{(s)}(i+2)(i+1)\phi_{i+2}^{(s)} + D^{(s)} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}(i-j+1)\phi_{i-j+1}^{(s)}\right) - D^{(s)} \sum_{j=0}^i \left((j+1)\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+2}\phi_{i-j}^{(s)}\right) - k^{2(s)}A^{(s)}\frac{(1-\nu^{(s)})}{2}\phi_i^{(s)} - k^{2(s)}A^{(s)}\frac{(1-\nu^{(s)})}{2}(i+1)W_{i+1}^{(s)} + I_1^{(s)}\omega^2 U_i^{(s)} + I_2^{(s)}\omega^2 \phi_i^{(s)}](r-r_{(s)})^i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N [k^{2(s)}A^{(s)}\frac{(1-\nu^{(s)})}{2}(i+1)\phi_{i+1}^{(s)} + k^{2(s)}A^{(s)}\frac{(1-\nu^{(s)})}{2}\sum_{j=0}^i \left(-\left(-\frac{1}{r_{(s)}}\right)^{j+1}\phi_{i-j}^{(s)}\right) + k^{2(s)}A^{(s)}\frac{(1-\nu^{(s)})}{2}(i+1)(i+2)W_{i+2}^{(s)} + \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{i=0}^N U_i(r-a)^i = U_0 + U_1(r-a) + U_2(r-a)^2 + \dots \\ \psi_r = \sum_{i=0}^N \phi_i(r-a)^i = \phi_0 + \phi_1(r-a) + \phi_2(r-a)^2 + \dots \\ w = \sum_{i=0}^N W_i(r-a)^i = W_0 + W_1(r-a) + W_2(r-a)^2 + \dots \end{cases} \quad (13)$$

۱-۳ حل معادلات برای ناحیه ی اول

در این ناحیه، ورق به صورت کامل در نظر گرفته شده و سری توانی حول مرکز دایره بسط داده می شود؛ بنابراین در این قسمت $a=0$ بوده و توابع جابه جایی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u_0^{(1)} = \sum_{i=0}^N U_i^{(1)}r^i = U_0^{(1)} + U_1^{(1)}r + U_2^{(1)}r^2 + \dots \\ \psi_r^{(1)} = \sum_{i=0}^N \phi_i^{(1)}r^i = \phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}r + \phi_2^{(1)}r^2 + \dots \\ w^{(1)} = \sum_{i=0}^N W_i^{(1)}r^i = W_0^{(1)} + W_1^{(1)}r + W_2^{(1)}r^2 + \dots \end{cases} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط ۳ و ۱۴ در مجموعه روابط ۲، معادلات حاکم به صورت زیر براساس سری توانی قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N [A^{(1)}(i+2)(i+1)U_{i+2}^{(1)} + A^{(1)}(i+2)U_{i+2}^{(1)} - A^{(1)}U_{i+2}^{(1)} + B^{(1)}(i+2)(i+1)\phi_{i+2}^{(1)} + B^{(1)}(i+2)\phi_{i+2}^{(1)} - B^{(1)}\phi_{i+2}^{(1)} + I_0^{(1)}\omega^2 U_i^{(1)} + I_1^{(1)}\omega^2 \phi_i^{(1)}]r^i = 0 \\ \sum_{i=0}^N [B^{(1)}(i+2)(i+1)U_{i+2}^{(1)} + B^{(1)}(i+2)U_{i+2}^{(1)} - B^{(1)}U_{i+2}^{(1)} + D^{(1)}(i+2)(i+1)\phi_{i+2}^{(1)} - k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}\phi_i^{(1)} - k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}(i+1)\phi_{i+1}^{(1)} + I_1^{(1)}\omega^2 U_i^{(1)} + I_2^{(1)}\omega^2 \phi_i^{(1)}]r^i = 0 \\ \sum_{i=0}^N [k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}(i+1)\phi_{i+1}^{(1)} + k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}\phi_{i+1}^{(1)} + k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}(i+2)(i+1)W_{i+2}^{(1)} + k^{2(1)}\frac{(1-\nu^{(1)})}{2}A^{(1)}(i+2)W_{i+2}^{(1)} + I_0^{(1)}\omega^2 W_i^{(1)} - k_w^{(1)}W_i^{(1)} + k_s^{(1)}(i+2)(i+1)W_{i+2}^{(1)} + k_s^{(1)}(i+2)W_{i+2}^{(1)}]r^i = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

۲-۳ حل معادلات برای نواحی دوم تا n ام

در این نواحی، ورق به صورت حلقوی در نظر گرفته شده و سری توانی حول شعاع خارجی هر قسمت بسط داده می شود و در نتیجه توابع جابه جایی به صورت زیر است:

۴ - درستی آزمایی روش پیشنهاد شده با نتایج گذشته و ارائه نتایج

در این قسمت درستی آزمایی روش پیشنهاد شده و نتایج مربوط به اشکال مودی و محل آسیب در ورق‌های دایره‌ای ارائه شده است.

۱.۴- درستی آزمایی روش پیشنهاد شده با نتایج گذشته

در این مطالعه، ورق دایره‌ای بدون بستر الاستیک را به ۵ لایه تقسیم کرده و نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق ۰/۲ در نظر گرفته شده است. برای بررسی دقت و درستی نتایج حاصل از حل ارائه شده، نیاز است تا با نتایج بسیار دقیق و معتبر مقایسه شود. بدین منظور، نتایج ارائه شده با مقالات و منابع معتبر مقایسه شده است. برای درستی آزمایی، سه فرکانس طبیعی بدست آمده با توجه به تعداد جملات N برای تکیه‌گاه‌های گیردار، آزاد و ساده در جدول زیر ارائه شده است. برای درستی آزمایی روش پیشنهاد شده، نتایج با مرجع [14] مقایسه شد که این نتیجه برای $N \geq 50$ صادق است. لازم به ذکر است که بی‌بعدسازی طبق رابطه ۲۴ انجام گرفته است:

$$D^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D^*}} b^2 \Omega \quad (24)$$

که در رابطه فوق b ، شعاع خارجی ورق دایره‌ای است.

جدول ۱. همگرایی و درستی سه فرکانس بی‌بعد ابتدایی ورق دایره‌ای با شرایط مرزی مختلف بر اساس تعداد جملات $N=200$

Boundary Condition	Frequency	h=0.001m This Study [14]
Clamped	ω_1	10.216
	ω_2	10.216
	ω_3	39.771
		39.771
		89.104
Simply Supported	ω_1	4.935
	ω_2	4.935
	ω_3	29.717
		74.149
		74.149
Free	ω_1	9.003
	ω_2	9.003
	ω_3	38.443
		87.750
		87.750

(الف)

$$+k^{2(s)} A^{(s)} \frac{(1-\nu^{(s)})}{2} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r^{(s)}} \right)^{j+1} (i-j+1) W_{i-j+1}^{(s)} \right) + I_0^{(s)} \omega^2 W_i^{(s)} - k_w^{(s)} W_i^{(s)} + k_s^{(s)} (i+2)(i+1) W_{i+2}^{(s)} + k_s^{(s)} \sum_{j=0}^{i+1} \left(-\left(-\frac{1}{r^{(s)}} \right)^{j+1} (i-j+1) W_{i-j+1}^{(s)} \right) (r-r^{(s)})^i = 0 \quad (18)$$

۳.۳- جایگذاری سری توانی در شرایط مرزی

در این بخش، سری‌های توانی معرفی شده توسط رابطه ۱۳ در شرایط مرزی مختلف معرفی شده در بخش (۲.۲) قرار داده می‌شود:

تکیه‌گاه گیردار:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (19)$$

گاه آزاد: تکیه

$$\begin{cases} BU_1 + B \frac{\nu}{r} U_0 + D \phi_1 + D \frac{\nu}{r} \phi_0 = 0 \\ AU_1 + A \frac{\nu}{r} U_0 + B \phi_1 + B \frac{\nu}{r} \phi_0 = 0 \\ (k^2 (\frac{1-\nu}{2}) A) (\phi_1 + W_0) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ BU_1 + B \frac{\nu}{r} U_0 + D \phi_1 + D \frac{\nu}{r} \phi_0 = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (21)$$

مرکز ورق:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ W_1 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

با حل معادلات حاکم، مجموعه روابط ۱۵ و ۱۸، ثوابت $U_j^{(i)}$ ، $\phi_j^{(i)}$ و $W_j^{(i)}$ که $j=2,3,\dots,n$ بر اساس $U_0^{(i)}$ ، $U_1^{(i)}$ ، $W_1^{(i)}$ و $W_0^{(i)}$ محاسبه می‌شوند.

چنانچه ورق به n قسمت تقسیم شود، تعداد مجهولات $6n$ خواهد بود. تعداد شرایط مرکز ورق، ۳ رابطه، پیوستگی در محل اتصال نواحی مختلف ۶ رابطه و همچنین تعداد شرایط مرزی ورق ۳ رابطه است که در مجموع $6n$ رابطه برای شرایط مرکز، پیوستگی و مرزی ورق موجود است که به صورت رابطه ماتریسی زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} X_{11}(\omega) & \dots & X_{1n}(\omega) \\ X_{21}(\omega) & \dots & X_{2n}(\omega) \\ X_{31}(\omega) & \dots & X_{3n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(n-1)1}(\omega) & \dots & X_{(n-1)n}(\omega) \\ X_{n1}(\omega) & \dots & X_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ \phi_1^{(1)} \\ W_1^{(0)} \\ \vdots \\ \phi_5^{(1)} \\ W_5^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

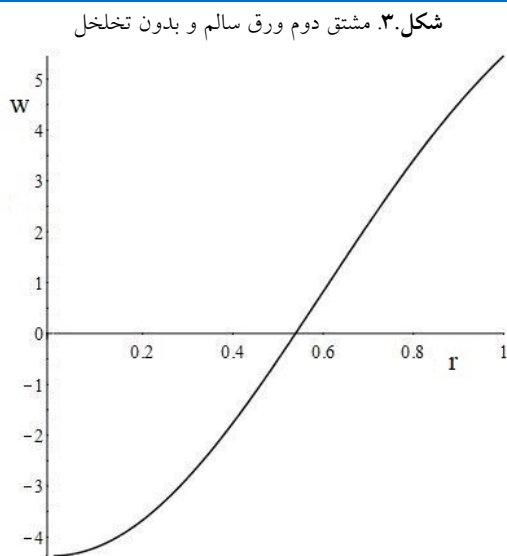


Fig.3. Second derivative of undamaged plate without any porosity

۲.۴- نتایج

سناریوی اول:

در سناریوی اول، دو لایه سوم و چهارم دارای آسیب بوده و ورق با شعاع ۱ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در این سناریو، گیردار است. شدت آسیب در این لایه ها به ترتیب ۱٪ و ۱۰٪ و ضخامت آن ها نیز به ترتیب ۰/۰۵ و ۰/۱۵ است؛ در حقیقت، شعاع های در نظر گرفته شده برای ورق تا این لایه ها به ترتیب ۰/۴۵ و ۰/۶ است. قسمت های آسیب دیده طبق شکل (۴) است. در جدول (۳)، فرکانس های بدست آمده در این سناریو نشان داده شده است. لازم به ذکر است که تمامی اشکال ارائه شده برای مد اول است

شکل ۴. سناریوی خرابی ۱

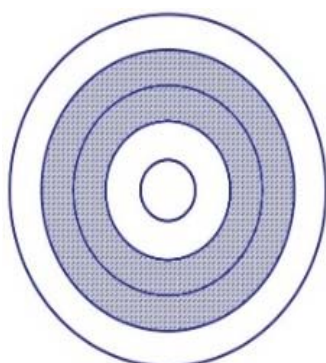


Fig.4. Damage Scenario 1

h=0.05m This Study [14]		h=0.15m This Study [14]		h=0.25m This Study [14]	
10.145	10.145	9.629	9.629	8.807	8.807
38.855	38.855	33.393	33.393	27.253	27.253
84.995	84.995	65.551	65.551	49.420	49.420
4.925	4.925	4.844	4.844	4.696	4.696
29.323	9.323	26.715	26.715	23.254	23.254
71.756	71.756	59.062	59.062	46.775	46.775
8.969	8.969	8.710	8.710	8.267	8.267
37.876	37.876	33.674	33.674	28.605	25.605
84.443	84.443	67.827	67.827	52.584	52.584

(ب)

Table.1. Convergence and accuracy of the first three non-dimensional natural frequencies of circular plate with different boundary conditions based on the number of N=200

در ادامه برای بررسی کارایی روش ارائه شده در تعیین محل آسیب دیده در سازه، سناریوهای خرابی تعریف می شود (جدول ۲). در این بررسی، شعاع ورق ۱ متر در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در سناریوی اول، ورق دایره ای بدون بستر الاستیک و در سناریوی دوم با بستر الاستیک در نظر گرفته شده است. آسیب اعمال شده به صورت کاهش در مدول الاستیسته لحاظ شده است.

جدول ۲. شبیه سازی مکان آسیب در ورق

Damage scenario	Layer number	Damage severity (%)	Thickness of the damaged layer (m)	Material properties
1	3,4	1,10	0.05,0.15	$E = 70Gpa$ $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$ $\nu = 0.3$
2	2,5	10,2	0.1,0.05	

Table.2. Simulated damage locations in plate

بررسی پژوهشگران [16,15] نشان می دهد که مشتق دوم اشکال مودی پارامتری حساس نسبت به وجود آسیب در سازه است. پس در این پژوهش از این پارامتر برای بررسی محل آسیب استفاده شده است. در شکل (۳) نمودار مشتق دوم برای سازه بدون تخلخل و سالم در مد اول ارائه شده است. به علت تقارن، این نمودار تنها برای نیمی از ورق دایره ای با مبدا مرکز آن ترسیم شده است.

اشکال طوری نرمال سازی شده اند که خیز ورق در وسط واحد باشد، بنابراین واحد اشکال هر واحد دلخواهی از متر مانند میلی متر می تواند باشد. در شکل (۶)، مشتق دوم جابه جایی برای سازه آسیب دیده در لایه های سوم و چهارم با ضریب تخلخل صفر نشان داده شده است؛ همان گونه که مشاهده می شود ضخامت لایه آسیب دیده و شدت آسیب به خوبی در نمودار و بزرگ نمایی انجام شده قابل مشاهده است. نمودار در سایر قسمت ها، پیوسته بوده چراکه هیچ آسیبی به سازه در این قسمت ها وارد نشده است.

شکل ۶. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی ۱: بدون تخلخل

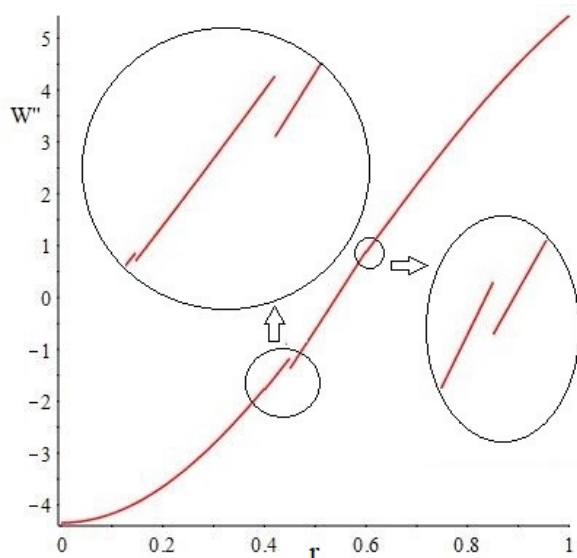


Fig.6. Damage localization results for damage scenario 1: Without Porosity ($e_0 = 0$)

در شکل های (۷ و ۸)، مشتق دوم جابه جایی برای سازه آسیب دیده به ترتیب با ضرایب تخلخل ۰/۲ و ۰/۵ نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می شود با افزایش ضریب تخلخل، فاصله نمودارهای دو نوع تخلخل یاد شده بیشتر شده که این فاصله در انتهای نمودار بیشتر خود را نشان می دهد. لایه های آسیب دیده به خوبی در بزرگ نمایی های انجام شده قابل مشاهده است.

جدول ۳. سه فرکانس طبیعی بی بعد ابتدایی استخراج شده از سناریوی خرابی ۱

Frequency	No Porosity $e_0 = 0$		Porosity (I) $e_0 = 0.2$	
	Scenario 1 Undamaged	Undamaged	Scenario 1	
ω_1	9.2499	9.2039	9.1753	9.1364
ω_2	30.283	30.0213	29.8397	29.6735
ω_3	56.8698	56.4345	55.7844	55.3545

(الف)

	Porosity (I) $e_0 = 0.5$		Porosity (II) $e_0 = 0.2$	
	Scenario 1 Undamaged	Undamaged	Scenario 1	
	9.1264	9.0859	9.0069	8.9461
	29.2733	29.1062	29.2455	29.0140
	54.2322	53.8120	51.977	50.9134

(ب)

	Porosity (II) $e_0 = 0.5$	
	Undamaged	Scenario 1
	8.5309	8.4405
	27.2705	27.0780
	43.6069	41.7222

(پ)

Table 3 First three non-dimensional natural frequencies obtained from damage scenario 1

در شکل (۵)، اشکال مودی سه فرکانس ابتدایی سازه سالم و بدون تخلخل برای نیمی از ورق ارائه شده است:

شکل ۵. اشکال مودی سه فرکانس طبیعی ابتدایی ورق دایره ای یکنواخت

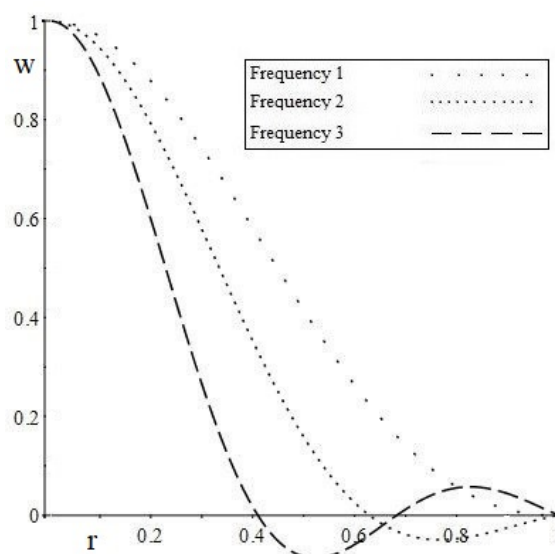


Fig.5. Mode Shapes of first three natural frequencies of circular homogeneous plate

لایه ها به ترتیب ۴/۰ و ۱ است. شرایط مرزی این سناریو، گیردار است. قسمت های آسیب دیده در این سناریو طبق شکل (۹) هست که یکی از لایه های آسیب دیده به علت نزدیکی به تکیه گاه از اهمیت بالایی برخوردار است. جدول (۴)، فرکانس های بدست آمده در این سناریو را نشان می دهد.

شکل ۴. سناریوی خرابی ۲

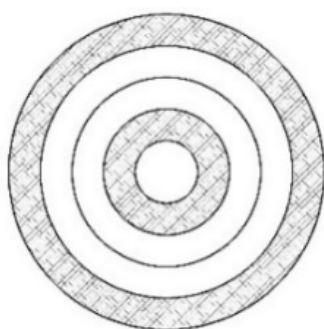


Fig.9. Damage Scenario 2

جدول ۴. سه فرکانس طبیعی ابتدایی بی بعد استخراج شده از سناریوی خرابی ۲

Frequency	No Porosity $e_0 = 0$		
	Undamaged $K=0$	2,5 $K=6$	2,5 $K=10$
ω_1	9.2499	11.3620	12.5829
ω_2	30.283	33.0109	34.8084
ω_3	56.8698	60.0990	62.4060
(الف)			
	Porosity Distribution (I) $e_0 = 0.2$		
	Undamaged $K=0$	2,5 $K=6$	2,5 $K=10$
	9.1753	11.2871	12.5059
	29.8397	32.5869	34.3938
	55.7844	59.0723	61.4064
(ب)			
	Porosity Distribution (I) $e_0 = 0.5$		
	Undamaged $K=0$	2,5 $K=6$	2,5 $K=10$
	9.1264	11.2634	12.4931
	29.2733	32.0965	33.9457
	54.2322	57.6842	60.1043
(پ)			
	Porosity Distribution (II) $e_0 = 0.2$		
	Undamaged $K=0$	2,5 $K=6$	2,5 $K=10$
	9.0069	10.8067	11.8500
	29.2455	31.6033	33.1697

شکل ۷. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی خرابی ۱: ضریب تخلخل = ۰/۲

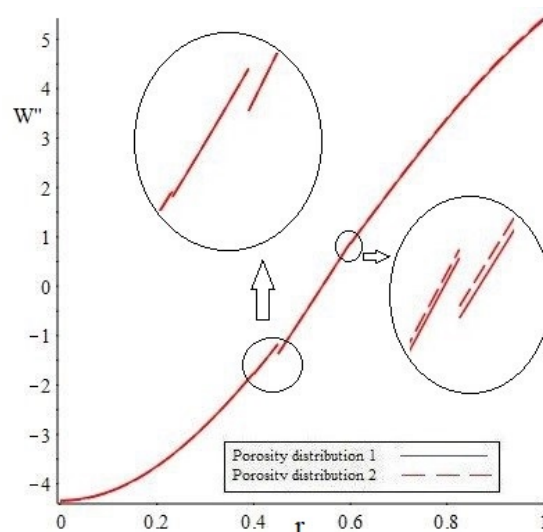


Fig.7. Damage Localization Results for Damage Scenario 1: $e_0 = 0.2$

شکل ۸. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی خرابی ۱: ضریب تخلخل = ۰/۵

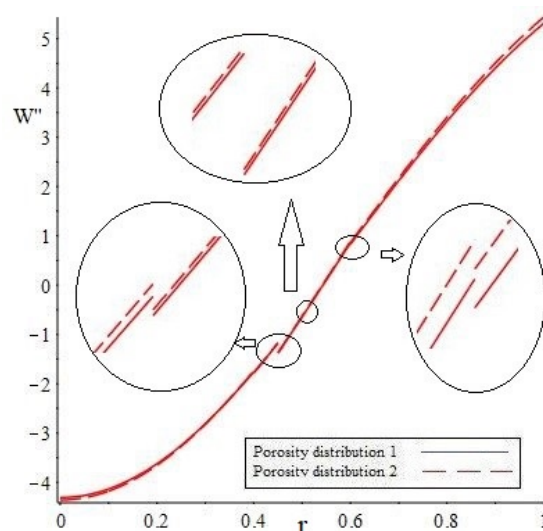


Fig.8. Damage Localization Results for Damage Scenario 1: $e_0 = 0.5$

سناریوی دوم:

در این سناریو، ورق روی بستر الاستیک قرار گرفته و لایه های دوم و پنجم آن دارای آسیب. شدت آسیب در این لایه ها به ترتیب ۱۰٪ و ۲٪ و ضخامت آن ها نیز به ترتیب ۰/۱ و ۰/۰۵ است؛ در حقیقت شعاع های در نظر گرفته شده برای ورق تا این

در شکل‌های (۱۱ و ۱۲)، مشتق دوم جابه‌جایی به ترتیب با ضریب تخلخل ۰/۲ و با سختی بستر ۱۰ نشان داده شده‌اند. اختلاف دو نمودار و ناپیوستگی‌ها به خوبی قابل مشاهده است.

شکل ۱۱. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی خرابی ۲، تخلخل نوع اول: ضریب تخلخل: ۰/۲

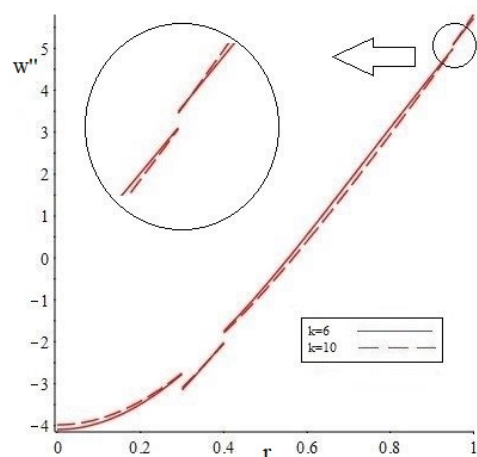


Fig.11. Damage Localization Results for Damage Scenario 2, Porosity distribution (I): $e_0 = 0.2$

شکل ۱۲. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی خرابی ۲، تخلخل نوع اول: سختی بستر: ۱۰

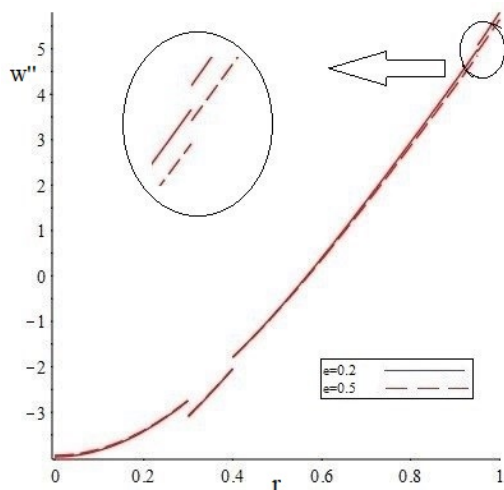


Fig.12. Damage Localization Results for Damage Scenario 2, Porosity distribution (I): $k = 10$

۵ - نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله یک روش دقیق برای یافتن فرکانس‌ها، شکل‌های مودی و محل آسیب در ورق‌های دایره‌ای ساخته شده با مواد هدفمند با صرف هزین محاسباتی بسیار پایین ارائه شده است.

51.977	54.7783	56.7189
(ت)		

Porosity Distribution (II)

$e_0 = 0.5$		
Undamaged $K=0$	2,5 $K=6$	2,5 $K=10$
8.5309	10.2832	11.2925
27.2705	29.6256	31.2324
43.6069	45.7827	47.1409
(ث)		

Table.4. First three non-dimensional natural frequencies obtained from damage scenario 2

همان‌گونه که در جدول فوق مشاهده می‌شود، با افزایش سختی بستر و ضریب تخلخل، به ترتیب افزایش و کاهش فرکانس را شاهد هستیم. در حقیقت، هرچه سختی بستر بیشتر شود، فرکانس‌ها افزایش یافته و هرچه میزان تخلخل ورق بیشتر شود، فرکانس‌ها کاهش می‌یابند که در جدول فوق به وضوح قابل مشاهده است.

در شکل (۱۰)، مشتق دوم جابه‌جایی برای سازه بدون تخلخل نشان داده شده است؛ نمودار مربوط به سختی بستر صفر، بدون آسیب بوده اما در سختی‌های بی‌بعد ۶ و ۱۰، ورق در لایه‌های دوم و پنجم دارای آسیب است. همانطور که مشاهده می‌شود شدت آسیب کمتر در لایه پنجم با کوچک‌تر بودن طول ناپیوستگی به خوبی در بزرگنمایی انجام شده قابل مشاهده است. نمودارهای مربوط به سختی بستر بی‌بعد ۶ و ۱۰ اختلاف کمی با هم دارند اما اختلاف آن‌ها با سازه‌ی بدون بستر الاستیک قابل ملاحظه است.

شکل ۱۰. نتایج مکان یابی آسیب برای سناریوی خرابی ۲: ضریب تخلخل = صفر

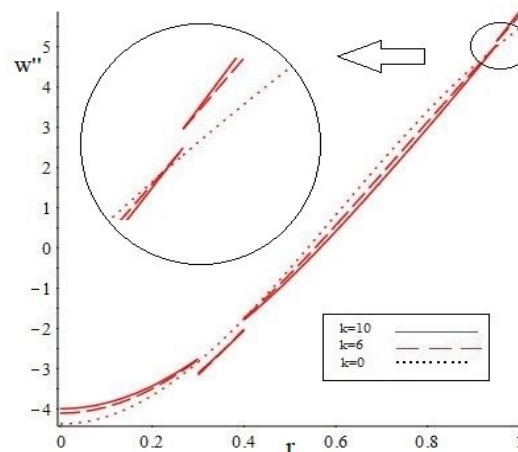


Fig.10. Damage Localization Results for Damage Scenario 2: $e_0 = 0$

- foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(4), 293-304.
- [12] Alipour M. M. & Shariyat M. 2011 Semi-analytical buckling analysis of heterogeneous variable thickness viscoelastic circular plates on elastic foundations. *Mechanics Research Communications*, 38(8), 594-601.
- [13] Chen D., Yang J. & Kitipornchai S. 2015 Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*, 133, 54-61.
- [14] Liew K. M., Xiang Y., Kitipornchai S. & Wang C. M. 1998 *Vibration of Mindlin plates: programming the p-version Ritz method*, Elsevier.
- [15] Navabian N., Bozorgnasab M., Taghipour R. & Yazdanpanah O. 2016 Damage identification in plate-like structure using mode shape derivatives. *Archive of Applied Mechanics*, 86(5), 819-830.
- [16] Navabian N., Taghipour R., Bozorgnasab M. & Ghasemi J. 2018 Damage evaluation in plates using modal data and firefly optimisation algorithm. *International Journal of Structural Engineering*, 9(1), 50-69.
- این روش تحلیلی بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول بوده و برای شرایط مرزی مختلف قابل استفاده است. روش پیشنهادی، هماهنگی بسیار خوبی با مقالات سایر پژوهشگران داشته و محل آسیب را به خوبی نشان می‌دهد.
- ## ۶ - مراجع
- [1] Pandey A. K., Biswas M. & Samman M. M. 1991 Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of sound and vibration*, 145(2), 321-332.
- [2] Sampaio R. P. C., Maia N. M. M. & Silva J. M. M. 1999 Damage detection using the frequency-response-function curvature method. *Journal of sound and vibration*, 226(5), 1029-1042.
- [3] Cornwell P., Doebling S. W. & Farrar C. R. 1999 Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of sound and vibration*, 224(2), 359-374.
- [4] Heyliger P. R. & Ramirez G. 2000 Free vibration of laminated circular piezoelectric plates and discs. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4), 935-956.
- [5] Ip K. H. & Tse P. C. 2002 Locating damage in circular cylindrical composite shells based on frequency sensitivities and mode shapes. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21(4), 615-628.
- [6] Abdo M. B. & Hori M. 2002 A numerical study of structural damage detection using changes in the rotation of mode shapes. *Journal of Sound and vibration*, 251(2), 227-239.
- [7] Allahverdizadeh A., Naei, M. H. & Bahrami M. N. 2008 Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *Journal of sound and vibration*, 310(4), 966-984.
- [8] Park C. I. 2008 Frequency equation for the in-plane vibration of a clamped circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1-2), 325-333
- [9] Duan G., Wang X. & Jin C. 2014 Free vibration analysis of circular thin plates with stepped thickness by the DSC element method. *Thin-Walled Structures*, 85, 25-33.
- [10] Khare S. & Mittal N. D. 2018 Free vibration of thick laminated circular and annular plates using three-dimensional finite element analysis. *Alexandria engineering journal*, 57(3), 1217-1228.
- [11] Alipour M. M., Shariyat M. & Shaban M. 2010 A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic

Analytical identification of damaged areas in porous circular plates resting on elastic foundation based on modal shapes derivatives

Saman Karimi¹, Mohsen Bozorgnasab^{2*}, Reza Taghipour³, Mohammad Molla-Alipour⁴

1- M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, University of Mazandaran

2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Mazandaran

3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Mazandaran

4- Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran

* m.bozorgnasab@umz.ac.ir

Abstract

Structural health monitoring is essential to predict problems and maintain structure integrity which can be effective in prolonging the structure lifetime. The accumulation of failure in the structures causes a severe structural fracture; therefore, the development of damage detection methods for structural fracture is one of the most important points in maintaining the integrity and safety of the structures. In this paper, damage identification in functionally graded (FG) porous circular plates based on modal data and vibration analysis on elastic foundation is carried out. The vibration analysis process is performed based on first-order shear deformation theory and analytical method. Circular plates are widely used in the industry, for example in bower, balconies, screens, halls and swimming pool ceilings. Functionally graded materials are a new type of composite materials and may be characterized by the variation in composition and structure gradually over volume, resulting in desired changes in the characteristics of the material. The porous materials are lightweight, flexible and resistant to tiny cracks, these materials have two phases; their first phase is solid and the second phase is liquid or gas. The proposed method is achieved using modal analysis information extracted from a mathematical code in MAPLE. Based on this method, the plate can be examined with different boundary conditions including clamped, free and simply supported. Power series method has been used to solve the governing equations of circular plate. For the first part of the circular plate, the power series expands around the zero point and for other parts of the plate, the power series expands around the outer radius of its own part. In this study, first of all, the governing equations of circular plates were extracted based on first-order shear deformation theory and displacement functions. Two types of porosity have been used for applying porosity to the plate. Thereafter, the continuity conditions of displacement which generally include 6 items have been applied: continuity of in-plane displacement of the middle layer, continuity of rotation of the transverse surface, continuity of displacement of the plate, continuity of in-plane force, continuity of bending torque and continuity of transverse shear force per unit length. Furthermore, stress resultants in the points of connection have been applied which includes 3 items: in-plane force, bending torque and transverse shear force per unit length. The matrix determinant that is based on boundary and continuity conditions has been calculated to find the natural frequencies of the plate. After that, based on the Newton-Raphson method which is a numerical method for determining the root of a function, the initial natural frequencies of the circular plate were obtained and their modal shapes were plotted. At the end of the process, when the natural frequencies are determined, the unknowns were calculated. To prove the accuracy and efficiency of the proposed method, the natural frequencies obtained from this method were compared with the results presented in other papers. The comparisons have shown that the results obtained through this study had a good agreement with those of other ones and the proposed method could accurately show the damage location.

Keywords: Porous circular plates – Modal analysis – Functionally graded materials (FG) – First order shear theory – Damage identification