مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره نوزدهم، شماره ۲، سال ۱۳۹۸

توسعه توابع شکل و توابع پایه‌ی شعاعی جدید هنکل کروی در بهینه‌سازی توپولوژی سازه به روش سطح تراز

فائزه موردوئی[۱]، سعید شجاعی[۲*]، صالح حمزهٔ جواران[۳]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، بخش مهندسی عمران، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲- دانشیار سازه، بخش مهندسی عمران، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳- استادیار سازه، بخش مهندسی عمران، دانشگاه شهید باهنر کرمان

***saeed.shojaee@uk.ac.ir**

تاریخ دریافت ۹۷/۰٤/۱٤ تاریخ پذیرش ۹۷/۰۷/۲۰

چکیده

در این مقاله، از توابع پایه هنکل کروی برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه با استفاده از روش سطح تراز استفاده شده است. توابع پیشنهادی، ترکیبی از میدان توابع بسل نوع اول و دوم و همچنین میدان توابع چند جمله‌ای در فضای مختلط و برگرفته از توابع پایه‌ی شعاعی هستند. با استفاده از توابع هنکل کروی، وابستگی تابع مجموعه سطوح تراز به مکان و زمان از یکدیگر جدا شده و این سبب تبدیل شدن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون-ژاکوبی به یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود. بدین طریق، مشکلات ناشی از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برطرف شده و در نتیجه نیازی به مقداردهی مجدد تابع مجموعه سطوح تراز در فرایند بهینه‌سازی نیست. در ادامه، برای افزایش سرعت و دقت همگرایی در ایجاد طرح بهینه، توابع شکل هنکل کروی جایگزین توابع شکل کلاسیک لاگرانژ می‌شود. توابع شکل پیشنهادی علاوه بر ارضای خاصیت دلتای کرونکر و افراز واحد، بی‌نهایت مشتق‌پذیر بوده همچنین توابع پیشنهادی به لحاظ دارا بودن هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط می‌تواند در بهبود دقت و سرعت همگرایی مؤثر باشند در حالی که در توابع شکل کلاسیک لاگرانژ تنها میدان توابع چند جمله‌ای اغنا می‌شود. در انتها چندین نمونه عددی برای بررسی عملکرد توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی و توابع شکل هنکل کروی بیان شده است.

واژگان کلیدی: توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی، توابع شکل هنکل کروی، بهینه‌سازی توپولوژی، روش مجموعه سطوح تراز

۱- مقدمه

امروزه، بهینه‌سازی شکل و توپولوژی یکی از شاخه‌های مهمی است که به‌صورت گسترده در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این شاخه در سه دهه گذشته پیشرفت‌های قابل توجهی داشته است. هدف از بهینه‌سازی توپولوژی پیدا نمودن توزیع مناسب (بهینه) مواد در دامنه طرح $\Omega \in R^{2,3}$ است؛ به گونه‌ای که شکل و تعداد حفرات بهینه شده و تابع هدف مینیمم شود [2, 1]. نخستین روش مورد

استفاده در بهینه‌سازی توپولوژی سازه، روش همگن‌سازی است. این روش برای نخستین بار توسط بندسو و کیکوچی [3] ارائه شد. در این روش در هر المان پایه یک سوراخ در نظر گرفته می‌شود و با طراحی پارامترهای اندازه شامل طول، عرض و برای حفره، می‌توان دریافت که چه جاهایی پر یا خالی هستند. بر مبنای روش همگن‌سازی، روش مواد ایزوتوپ با ضریب جریمه (SIMP[1]) برای نخستین بار توسط بندسو [4] ارائه شد. در این روش، تابع طراحی، چگالی مواد است که در کل المان ثابت در نظر گرفته می‌شود [5]. یکی دیگر از روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی روش بهینه‌سازی ساختاری تکاملی (ESO[2]) است که به وسیله اگزی و استیون [6] پیشنهاد شد. ایده این روش، در نظر گرفتن تنش به‌صورت یکنواخت در دامنه طرح است. پس، قسمت‌هایی از دامنه که دارای تنش پایینی است حذف می‌شود و قسمت‌هایی که دارای تنش بالایی است، نگه داشته می‌شود.

به تازگی روش مجموعه سطوح تراز به‌صورت موفقیت آمیزی در بحث بهینه‌سازی شکل و توپولوژی سازه بکار می‌رود. این روش برای اولین بار توسط اشر و ستیان [7] معرفی شد. پس از آن از این روش در زمینه‌های گوناگونی از جمله مکانیک سیالات، احتراق، فرایند تصویرسازی کامپیوتری و غیره استفاده شد [9, 8]. در کلیه روش‌های ذکر شده، خواص مواد به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند؛ اما روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای تغییرات مرز استوار است. در این روش متغیر طراحی، مرزهای داخلی و خارجی است. مرزهای سازه به‌وسیله تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز نشان داده می‌شود. پس، این‌گونه نمایش این ویژگی مهم را دارا است که به‌راحتی مرزهای دامنه می‌توانند با یکدیگر ترکیب و یا از همدیگر جدا شوند [10]. با استفاده از حل معادله همیلتون–ژاکوبی ناشی از این تابع، مرز دامنه شروع به حرکت می‌کند. کنترل حرکت این مرز توسط بردار سرعت معادله همیلتون–ژاکوبی صورت می‌گیرد. حال برای استفاده از این روش در بهینه‌سازی توپولوژی کافی است بین بردار سرعت ناشی از معادله همیلتون–ژاکوبی و مشتق شکل که برای بهینه‌سازی تابع هدف استفاده می‌شود، ارتباطی برقرار نمود [11-13]. شجاعی و محمدیان روش مجموعه سطوح تراز ثابت تکه‌ای (PCLS[3]) را با طرح مریام–بنس–اوشر (MBO[4])، برای مسائل بهینه‌سازی ترکیب نموده و سرعت همگرایی را افزایش دادند [14]. در این روش، دیگر نیازی به حل معادله هامیلتون–ژاکوبی نیست.

روندی که در این مقاله برای حل معادله سطح تراز استفاده شده است، تلفیق توابع پایه‌ی شعاعی با روش سطح تراز است. توابع پایه‌ی شعاعی برای تخمین یا درون‌یابی یک طرح مشخص با استفاده از توابع پایه‌ای که پیوسته و مشتق‌پذیر است مورد استفاده قرار می‌گیرد و بر اساس نرم اقلیدسی بیان می‌شوند. در این توابع هیچ اتصالی در قالب المان بین گره‌های درون‌یابی وجود ندارد. توابع پایه‌ی شعاعی متنوع زیادی وجود دارد ولی به‌طور کلی می‌توان آن‌ها را به دو گروه تقسیم نمود [15-23]:

۱– توابع پایه‌ی شعاعی تکیه‌گاه کلی: که از آن جمله می‌توان به اسپیلاین صفحه نازک، گاوسین، چند ربعی، چند ربعی معکوس، فوریه حقیقی و مختلط و غیره اشاره کرد.

۲– توابع پایه‌ی شعاعی تکیه‌گاه فشرده که از آن جمله می‌توان به توابع وندلند اشاره کرد.

با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی، وابستگی تابع مجموعه سطوح تراز به مکان و زمان از یکدیگر جدا شده و این سبب تبدیل شدن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون–ژاکوبی به یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود. بدین طریق مشکلات ناشی از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برطرف شده و لزوم به مقداردهی مجدد تابع مجموعه سطوح تراز در فرایند بهینه‌سازی نیست [15]. حال سؤال اینجاست کدام فرم از توابع پایه‌ی شعاعی در حل معادله سطح تراز عملکرد بهتری دارد؟ آیا می‌توان با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی جدید دیگری، سرعت و دقت همگرایی را در ایجاد طرح بهینه افزایش داد؟

1 Solid isotopic material with penalization
2 Evolutionary structural optimization
3 Piecewise constant level set
4 Merriman-Bence-Osher

چندی پیش حمزهٔ جواران و همکاران [22-20] با استفاده از فرمول‌بندی و توسعه المان‌های هنکل کروی در مدل‌سازی عددی مسائل الاستواستاتیک و الاستودینامیک به کمک روش‌های المان محدود و مرزی و مسائل جریان سیال تراکم ناپذیر به کمک روش المان محدود توانستند خطای عددی را به کمترین مقدار خود نسبت به سایر روش‌های عددی تنزل دهند و نتایج خوبی را دریافت کنند.

در این مقاله، ایده استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی که ترکیبی از توابع بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط است، به عنوان توابع پایه‌ی شعاعی مورد نظر و جایگزینی توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ برای حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژی سازه با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز، بکار گرفته شده است. با استفاده از این توابع، وابستگی معادله هامیلتون-ژاکوبی به مکان و زمان از یکدیگر جدا شده و در مراحل مختلف بهینه‌سازی دیگر نیازی به فرایند مقداردهی اولیه مجدد نیست. همچنین این توابع به لحاظ ارضای هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط، دقت محاسبات را افزایش داده و امکان ایجاد توپولوژی بهینه را با تعداد المان کمتر فراهم می‌کند.

۲- بیان مسئله بهینه‌سازی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز

در مسائل بهینه‌سازی می‌توان چندین مسئله بهینه‌سازی سازه از قبیل مینیمم نمودن انرژی کرنشی، بیشینه کردن فرکانس طبیعی [24] و مینیمم کردن تنش [25] تعریف کرد. در این مقاله مسئله مینیمم نمودن انرژی کرنشی تحت قید حجم، مورد بررسی قرار داده شده است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\min J(\mathbf{u},\Omega) = \int F(\mathbf{u})\,d\Omega \qquad (۱)$$

که در آن،

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^{T}\tilde{\mathbf{D}}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \qquad (۲)$$

$$\int_{\Omega} d\Omega \le V_{max} \qquad (۳)$$

و Ω دامنه طرح، $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی سازه تحت بارهای وارد شده، $\boldsymbol{\varepsilon}$ کرنش‌ها، $\tilde{\mathbf{D}}$ ماتریس الاستیسیته، J تابع هدف، V_{max} ماکزیمم حجم مجاز و $F(\mathbf{u})$ چگالی انرژی کرنشی است.

با ترکیب قید حجم و تابع هدف با استفاده از روش لاگرانژین افزوده می‌توان یک تابع هدف افزوده را به صورت زیر ایجاد نمود [26].

$$\bar{J}(\Omega) = J(\Omega) + \lambda^{k}\left[\int_{\Omega} dv - V_{max}\right] + \frac{1}{2\Lambda^{k}}\left[\int_{\Omega} dv - V_{max}\right]^{2} \qquad (٤)$$

که در آن، Λ^{k} و λ^{k} به‌ترتیب ضرایب جریمه و لاگرانژ می‌باشند و به‌صورت زیر بروز می‌شوند.

$$\lambda^{k+1} = \lambda^{k} + \frac{1}{\Lambda^{k}}\left[\int_{\Omega} dv - V_{max}\right] \qquad (۵)$$

$$\Lambda^{k+1} = \alpha_0\Lambda^{k} \qquad \alpha_0 \in (0,1) \qquad (٦)$$

که در آن، α_0 یک پارامتر ثابت است.

برای کاهش یافتن $\bar{J}$ نیاز است، مرز دامنه طرح با سرعتی که شرایط زیر را ارضا می‌نماید حرکت کند.

$$\dot{\bar{J}} < 0 \qquad (۷)$$

برای رسیدن به این هدف بهترین راه حل استفاده از روش سریعترین کاهش می‌باشد به شکلی که:

$$\mathbf{v_n} = -\left(f.\mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^{T}\tilde{\mathbf{D}}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda^{k} + \frac{1}{\Lambda^{k}}\left(\int_{\Omega} d\Omega - V_{max}\right)\right) \qquad (۸)$$

که در آن، f نیروی حجمی وارد بر مرز نیومن و $\mathbf{v_n}$ بردار سرعت نرمال است.

سرعت مرز نه تنها بیانگر تحلیل حساسیت شکل طرح است بلکه اساسی‌ترین پل ارتباطی بین بهینه‌سازی سازه و روش مجموعه سطوح تراز است. برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی سازه از روش سطوح تراز، برای نمایش و همچنین حرکت مرز دامنه طرح استفاده می‌شود. با استفاده از این روش، می‌توان حرکت دینامیکی مرزها را مورد بررسی قرار

داد. در این مدل دامنه طرح به سه قسمت با توجه به مقدار تابع سطوح تراز تقسیم می‌شود:

$$\begin{aligned} &\Phi(x(t)) < 0 && \forall x(t) \in \mathbf{D} \\ &\Phi(x(t)) = 0 && \forall x(t) \in \partial\Omega \\ &\Phi(x(t)) \geq 0 && \forall x(t) \in \Omega / \partial\Omega \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن، $\mathbf{D}$ دامنه ثابتی است که همه شکل‌های قابل قبول $\Phi(x(t)) \geq 0$ را در خود جای می‌دهد و همچنین $\Phi(x(t)) > 0 , \Phi(x(t)) = 0 , \Phi(x(t)) < 0$ به ترتیب داخل، روی و خارج دامنه طرح را نشان می‌دهد. شکل (۱) تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز و مقدار این تابع در قسمت‌های مختلف دامنه طرح را نشان می‌دهد. این‌گونه نمایش ضمنی مرز دامنه طرح انعطاف پذیری زیادی داشته و به‌راحتی قابلیت این را دارد که مرزها را از یکدیگر جدا و یا با همدیگر ترکیب نماید. به عبارتی دیگر با تغییر نمودن $\Phi(x)$ تراز صفر این تابع نیز تغییر می‌نماید. در کل فرایند تکاملی تابع مجموعه سطوح تراز، مقدار این تابع روی مرز دامنه طرح همواره برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

شکل ۱. تعریف دامنه طرح دو بعدی با روش تعیین تراز.

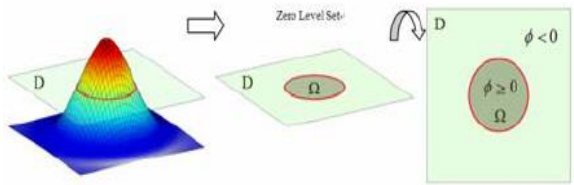


Fig. 1. Define the scope of the two-dimensional design with the level set method

پس مرز دامنه طرح به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\Phi(x(t)) = 0 \qquad \forall x(t) \in \partial\Omega \qquad (۱۰)$$

اگر از معادله $\Phi(x(t)) = 0$ با توجه به پارامتر زمان t مشتق گرفته شود با توجه به اینکه $\mathbf{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ و $\mathbf{v}.\mathbf{n} = (\mathbf{v_n})|\nabla\Phi|$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\Phi . \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (۱۱)$$

که در آن، $\mathbf{v_n}$ بردار سرعت نرمال است. این معادله دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی به معادله مجموعه سطوح تراز مشهور است. در واقع این معادله دیفرانسیل، حرکت فصل مشترک را (که در آن، $\Phi(x) = 0$) تحت سرعت نرمال $\mathbf{v_n}$ تعریف می‌کند. همان طور که قبلا گفته شد پل ارتباطی بین روش مجموعه سطوح تراز و بهینه‌سازی توپولوژی سازه بردار سرعت نرمال $\mathbf{v_n}$ است. بنابراین چنانچه مرز دامنه طرح به‌صورت تراز صفر تابع تعیین تراز تعریف شود و بردار $\mathbf{v_n}$ نیز از معادله (۸) جایگزین شود می‌توان مرز دامنه را با حل معادله همیلتون-ژاکوبی به گونه‌ای حرکت داد که ضمن اینکه تابع هدف را مینیمم می‌نماید، قیدهای موجود در مسئله را ارضا نماید. با توجه به اینکه تابع مجموعه تراز فرم تحلیلی ندارد، پس باید برای انجام فرآیند مجموعه سطوح تراز با استفاده از روش‌های مصنوعی دامنه طرح را به‌صورت گسسته در آوریم. بنابراین برای تضمین پایداری فرآیند عددی شرط کورانت-فریدریش-لووی (CFL[5]) باید رعایت شود. اضافه بر این ما مجبور به فرآیند مقداردهی اولیه مجدد هستیم پس این ملاحظات عددی به مقدار زیادی ویژگی‌های اولیه این روش را تحت الشعاع قرار می‌دهد. در ادامه برای حل معادله مجموعه سطوح تراز توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی پیشنهاد شده است با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی، وابستگی تابع مجموعه سطوح تراز به مکان و زمان از یکدیگر جدا شده و این سبب تبدیل شدن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیلتون-ژاکوبی به یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود. بدین طریق مشکلات ناشی از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برطرف شده و لزوم به مقداردهی مجدد تابع مجموعه سطوح تراز در فرایند بهینه‌سازی نیست.

۳- حل معادله سطح تراز با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی پیشنهادی هنکل کروی

توابع پایه‌ی شعاعی، توابعی هستند بر مبنای نرم اقلیدس به مرکزیت یک نقطه یا یک گره که به شکل زیر بیان می‌شوند:

5 Courant-Friedrichs-Lewy

$$\varphi_j(x) = \varphi(\|x - x_i\|) \qquad x_i \subset \mathbf{D} \tag{۱۲}$$

که در آن، x_i محل هر گره است.

در این مقاله برای اولین بار تابع پایه‌ی شعاعی پیشنهادی هنکل کروی برای حل معادله سطح تراز به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\varphi_j(r) = (\varepsilon r)^{\tilde{n}+1} h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon r) \qquad \varepsilon > 0 \ , \ \tilde{n} = 0,1,2,... \tag{۱۳}$$

که در آن، ε و $\tilde{n}$ پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی هستند، $h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon r) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\varepsilon r)}} H_{\tilde{n}+\frac{1}{2}}^{(1)}(\varepsilon r)$ بیانگر تابع هنکل کروی نوع اول از مرتبه n، $r = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2}}{d_{sp}}$ و d_{sp} پارامتری برای تضمین وجود داشتن گره‌های کافی در همسایگی گره مورد نظر است [15]. توجه شود که $h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon r) = j_{\tilde{n}}(\varepsilon r) + i\, y_{\tilde{n}}(\varepsilon r)$ دارای تکینگی قوی در قسمت موهومی خود، تابع نیومن کروی از مرتبه n، است؛ که این مطلب عدم وجود حد برای میل نرم اقلیدس r به سمت صفر را در بر دارد. بنابراین وجود جمله $(\varepsilon r)^{\tilde{n}+1}$ در تابع پایه‌ی شعاعی مورد نظر باعث رفع تکینگی می‌شود. حال می‌توان تابع مجموعه سطوح تراز ضمنی $\Phi(x)$ را با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی به صورت زیر تخمین زد:

$$\Phi = \Phi(x,t) = \varphi^T(x)\alpha(t) \tag{۱٤}$$

که در آن، α ضریب گسترش در هر نقطه است. با جایگذاری در معادله هامیلتون–ژاکوبی:

$$\Phi^T \frac{d\alpha}{dt} + v_n \left|(\nabla\Phi)^T \alpha\right| = 0 \tag{۱۵}$$

برای به دست آوردن n مجهول می‌توان از روش مجموعه استفاده نمود و یک سیستم از معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر ایجاد کرد:

$$\tilde{\boldsymbol{H}} \frac{d\alpha}{dt} + \boldsymbol{\beta}(\alpha) = 0 \tag{۱٦}$$

که در آن:

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

$$\boldsymbol{\beta}(\alpha) = \begin{bmatrix} v_n(x_1)\left|(\nabla\Phi)^T(x_1)\alpha\right| \\ \vdots \\ v_n(x_n)\left|(\nabla\Phi)^T(x_1)\alpha\right| \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

معادله (۱٦) را می‌توان با استفاده از روش‌های مختلف حل نمود؛ که در این مقاله از روش اویلر پیش رونده استفاده شده است:

$$\alpha(t_{n+1}) = \alpha(t_n) + \Delta t\ \tilde{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{\beta}(\alpha(t_n)) \tag{۱۹}$$

در این رابطه Δt گام زمانی است. بعد از به‌دست آوردن مقدار α از معادله (۱۹) در هر گام زمانی، تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از معادله (۱٤) بروز می‌شود؛ بنابراین با پارامترسازی تابع مجموعه سطوح تراز، معادله دیفرانسیل جزئی هامیلتون–ژاکوبی به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که حل این نوع معادله با استفاده از روش‌های عددی راحت‌تر است. در این روش، دیگر نیازی به مقید کردن گام زمانی به شرط CFL نیست (برای جزئیات بیشتر ارجاع شود به [18]) و مقداردهی اولیه مجدد صورت نمی‌گیرد. در نتیجه، می‌توان به راحتی در دامنه طرح حفره ایجاد نمود و همگرایی کلی را برای این روش فراهم کرد. همچنین برای ایجاد عملکرد بهتر توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی در روند بهینه‌سازی توپولوژی سازه برای اولین بار در این مقاله از توابع شکل جدید هنکل کروی نیز استفاده شده است. مراحل غنی کردن و بررسی خواص توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی در ادامه بیان خواهد شد.

۳-۱- مراحل غنی کردن توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برای یک المان سه گرهی

در این قسمت، مراحل غنی کردن توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برای یک المان یک بعدی سه گرهی مورد بحث قرار خواهد گرفت. بدین منظور توابع مکمل چند جمله‌ای به بسط تابعی‌ای که فقط از توابع پایه‌ی شعاعی در روند تقریب استفاده می‌کند، نیز به‌صورت زیر اضافه می‌شود:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i(r)a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(x)b_j = \boldsymbol{R}^T(r)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{P}^T(x)\boldsymbol{b} \tag{۲۰}$$

که در آن، n و m به ترتیب بیانگر تعداد گره‌ها و تعداد عبارات چند جمله‌ای‌های پایه است؛ و همچنین:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}^T$$
$$\boldsymbol{R}(r) = \begin{bmatrix} R_1(r) & R_2(r) & \dots & R_n(r) \end{bmatrix}^T \qquad (۲۱)$$
$$\boldsymbol{P}(x) = \begin{bmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \dots & P_m(x) \end{bmatrix}^T$$

با ارضای معادله (۲۰) در نقاط گرهی، معادله ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}_Q \boldsymbol{a} + \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{b} \qquad (۲۲)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_1(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n \times n}$$
$$\boldsymbol{P}_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & \dots & P_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_1(x_n) & \dots & P_m(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \qquad (۲۳)$$

در جبر خطی، ماتریس‌های به فرم $\boldsymbol{R}_Q$ و $\boldsymbol{P}_m$ به ترتیب به نام‌های ماتریس تناوب و واندرموند مشهور هستند.

در معادله ماتریسی (۲۲)، تعداد $n+m$ مجهول وجود دارد در حالی که فقط n معادله می‌توان شکل داد. بنابراین باید شروط اضافی برای پایدار شدن مسئله در نظر گرفت. نشان داده شده است که اگر شرط زیر برقرار باشد یکتایی جواب تضمین خواهد شد [27]:

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(x_i) a_i = 0 \quad j = \overline{1,m} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P}_m^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (۲۴)$$

درنتیجه دستگاه معادلات نهایی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_Q & \boldsymbol{P}_m \\ \boldsymbol{P}_m^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

با تعریف دو ماتریس واسط $\boldsymbol{S}_a$ و $\boldsymbol{S}_b$، بردار مجهولات $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}_b \hat{\boldsymbol{u}}$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}_a \hat{\boldsymbol{u}} \qquad (۲۶)$$

که در آن،

$$\boldsymbol{S}_b = \left[\boldsymbol{P}_m^T \boldsymbol{R}_Q^{-1} \boldsymbol{P}_m \right]^{-1} \boldsymbol{P}_m^T \boldsymbol{R}_Q^{-1}$$
$$\boldsymbol{S}_a = \boldsymbol{R}_Q^{-1} - \boldsymbol{R}_Q^{-1} \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{S}_b \qquad (۲۷)$$

با جایگذاری بردارهای $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در رابطه (۲۰) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$u_h(x) = \left[\boldsymbol{R}^T(r) \boldsymbol{S}_a + \boldsymbol{P}^T(x) \boldsymbol{S}_b \right] \hat{\boldsymbol{u}} \qquad (۲۸)$$

در رابطه‌ی بالا عبارت $\left[\boldsymbol{R}^T(r) \boldsymbol{S}_a + \boldsymbol{P}^T(x) \boldsymbol{S}_b \right]$، بردار مقادیر گرهی $\hat{\boldsymbol{u}}$ را به میدان تابع $u_h(x)$ مرتبط می‌سازد که همان تعریف تابع شکل در روش‌های عددی است. بنابراین ماتریس توابع شکل به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x) = \boldsymbol{R}^T(r) \boldsymbol{S}_a + \boldsymbol{P}^T(x) \boldsymbol{S}_b \qquad (۲۹)$$

حال موارد گفته شده روی یک المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی ξ برای استفاده در یک المان یک بعدی، اعمال می‌شود. برای المان یک بعدی نشان داده شده در شکل (۲)، بردار $\boldsymbol{R}(r)$ می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\boldsymbol{R}(r) = \begin{bmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \\ R_3(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\varepsilon|\xi+1|\right)^{\tilde{n}+1} h_{\tilde{n}}^{(1)}\left(\varepsilon|\xi+1|\right) \\ \left(\varepsilon|\xi|\right)^{\tilde{n}+1} h_{\tilde{n}}^{(1)}\left(\varepsilon|\xi|\right) \\ \left(\varepsilon|\xi-1|\right)^{\tilde{n}+1} h_{\tilde{n}}^{(1)}\left(\varepsilon|\xi-1|\right) \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

شکل ۲. المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی.

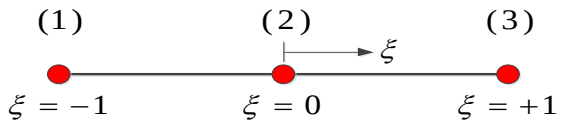


Fig. 2. Three-node element in the natural coordinate system.

توجه شود که با توجه به بازه مختصات طبیعی $[-1]$، $|\xi+1| = 1+\xi$، $|\xi-1| = 1-\xi$ و $|\xi| = \xi\,\mathrm{sgn}(\xi)$ است که در آن، $\mathrm{sgn}(\xi)$ بیانگر تابع علامت است. ازآنجا که تعداد گره‌ها

برابر سه است بنابراین برای غنی‌سازی می‌توان از میدان خطی استفاده کرد. ماتریس‌ها و بردارهای مورد نظر در روند غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برای مختصات طبیعی ξ بعد از محاسبات جبری متوالی در زیر خلاصه شده‌اند:

$$\boldsymbol{P}(\xi)=\begin{bmatrix}1\\ \xi\end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

$$\boldsymbol{R}_Q=\begin{bmatrix}R_1(r_1) & R_2(r_1) & R_3(r_1)\\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & R_3(r_2)\\ R_1(r_3) & R_2(r_3) & R_3(r_3)\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{R}_Q=\begin{bmatrix}\tilde{\alpha} & \varepsilon^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon) & (2\varepsilon)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(2\varepsilon)\\ & \tilde{\alpha} & \varepsilon^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon)\\ & \text{Sym.} & \tilde{\alpha}\end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

$$\boldsymbol{P}_m=\begin{bmatrix}P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1)\\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2)\\ P_1(\xi_3) & P_2(\xi_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$\boldsymbol{S}_b=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{c} & 2(1-\bar{c}) & \bar{c}\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{۳٤}$$

$$\boldsymbol{S}_a=\frac{c}{2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ & 4 & -2\\ \text{Sym.} & & 1\end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

که در آن‌ها، پارامتر $\tilde{\alpha}$ و ثوابت مختلط واسط c و $\bar{c}$ عبارت‌اند از:

$$c=\frac{1}{(2\varepsilon)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(2\varepsilon)-4\varepsilon^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon)+3\tilde{\alpha}}$$
$$\bar{c}=2c\left[-\varepsilon^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon)+\tilde{\alpha}\right]$$
$$\tilde{\alpha}=\lim_{r\to 0}R(r) \tag{۳٦}$$

و در نهایت توابع شکل این المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)=\left[\phi_1(\xi)\quad \phi_2(\xi)\quad \phi_3(\xi)\right]$$
$$\phi_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(-\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)$$
$$\phi_2(\xi)=(1-\bar{c})-g(\xi) \tag{۳۷}$$
$$\phi_3(\xi)=\frac{1}{2}\left(\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)$$

که در آن‌ها، تابع مختلط $g(\xi)$ عبارت است از:

$$g(\xi)=c\varepsilon^{\tilde{n}+1}[|\xi+1|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\xi+1|)-2|\xi|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)+|\xi-1|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\xi-1|)] \tag{۳۸}$$

با مقایسه توابع شکل هنکل و توابع شکل کلاسیک لاگرانژ، مشاهده می‌شود که تنها تفاوت بین این دو نوع تابع شکل، تابع $g(\xi)$ و ثابت مختلط $\bar{c}$ است که به انتهای توابع شکل هنکل کروی اضافه شده است و به ظاهر یکی از مزیت‌های توابع شکل هنکل همین تابع الحاقی $g(\xi)$ است که می‌تواند با توجه به توابع قدرتمندی که در خود دارد، در بهبود دقت مؤثر باشد. با تکرار روند بالا در دستگاه مختصات η، توابع شکل المان یک بعدی سه گرهی در این دستگاه، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\eta)=\left[\phi_1(\eta)\quad \phi_2(\eta)\quad \phi_3(\eta)\right]$$
$$\phi_1(\eta)=\frac{1}{2}\left(-\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)$$
$$\phi_2(\eta)=(1-\bar{c})-g(\eta) \tag{۳۹}$$
$$\phi_3(\eta)=\frac{1}{2}\left(\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)$$

$$g(\eta)=c\varepsilon^{\tilde{n}+1}[|\eta+1|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\eta+1|)-2|\eta|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\eta|)+|\eta-1|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\eta-1|)] \tag{٤۰}$$

در نهایت توابع شکل المان دو بعدی نشان داده شده در شکل (۳)، از حاصل ضرب توابع شکل المان‌های یک بعدی حاصل می‌شود:

شکل ۳. المان نه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی.

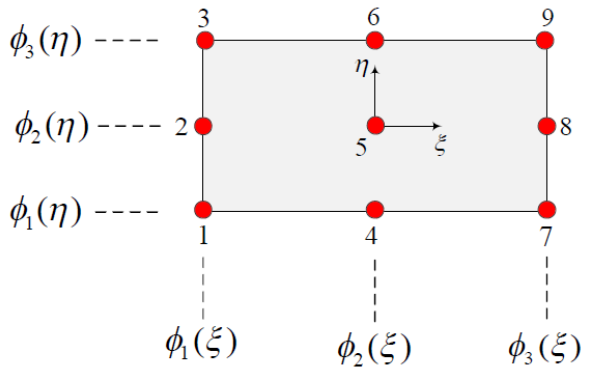


Fig. 3. Nine-node element in the natural coordinate system.

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(-\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\left(-\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)\\
N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left(-\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\left((1-\bar{c})-g(\eta)\right)\\
N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)\left(-\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\\
N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left((1-\bar{c})-g(\xi)\right)\left(-\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)\\
N_5(\xi,\eta) &= \left((1-\bar{c})-g(\xi)\right)\left((1-\bar{c})-g(\eta)\right)\\
N_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left(\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)\left((1-\bar{c})-g(\xi)\right)\\
N_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\left(-\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)\\
N_8(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left(\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\left((1-\bar{c})-g(\eta)\right)\\
N_9(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\left(\eta+\bar{c}+g(\eta)\right)
\end{aligned}
\tag{٤١}
$$

٤- خواص توابع شکل هنکل کروی

۴-۱- خاصیت دلتای کرونکر

دلتای کرونکر برای توابع شکل، دارای خاصیت زیر است:

$$N_m(\xi_n) = \delta_{mn}(1+0i) \tag{٤٢}$$

که در آن، $i=\sqrt{-1}$ بیانگر پارامتر موهومی واحد و δ_{mn} نشان دهنده نماد کرونکر است. یعنی درون‌یابی توسط توابع پایه هنکل کروی از مقادیر گرهی عبور می‌کند و در نتیجه مقادیر مجهول گرهی همان کمیت‌های مورد نظر (برای نمونه جابه‌جایی یا نیرو) در گره‌ها هستند.

۴-۲- خاصیت افراز واحد

برای یک المان هنکل کروی رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{n} N_j(\xi) = 1+0i \tag{٤٣}$$

که در آن، n بیانگر تعداد گره‌های المان است. همان‌طور که می‌دانیم، خاصیت افراز واحد امکان مدل‌سازی جابه‌جایی‌های جسم صلب را به توابع شکل پیشنهادی می‌دهد و این از ملزومات همگرایی در روش‌های المان‌دار است.

۴-۳- قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بی‌نهایت

برای المان سه گرهی هنکل کروی، روابط زیر برای مشتقات متوالی توابع شکل آن قابل برآورد است.

$$
\begin{aligned}
&\phi_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(-\xi+\bar{c}+g(\xi)\right),\ \phi_2(\xi)=(1-\bar{c})-g(\xi),\ \phi_3(\xi)=\frac{1}{2}\left(\xi+\bar{c}+g(\xi)\right)\\
&\phi_1'(\xi)=\frac{1}{2}\left(-1+g'(\xi)\right)\quad \phi_2'(\xi)=-g'(\xi)\quad \phi_3'(\xi)=\frac{1}{2}\left(1+g'(\xi)\right)\\
&\phi_1''(\xi)=\frac{g''(\xi)}{2}\qquad \phi_2''(\xi)=-g''(\xi)\qquad \phi_3''(\xi)=\frac{g''(\xi)}{2}\\
&\phi_1'''(\xi)=\frac{g'''(\xi)}{2}\qquad \phi_2'''(\xi)=-g'''(\xi)\qquad \phi_3'''(\xi)=\frac{g'''(\xi)}{2}\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{٤٤}
$$

با توجه به خاصیت توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی، یک رابطه بازگشتی اپراتوری بین مشتقات این توابع به‌صورت زیر برقرار است:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^p\left[x^{\tilde{n}+1}h_n^{(1)}(x)\right] = x^{\tilde{n}-p+1}h_{n-p}^{(1)}(x) \tag{٤٥}$$

که برای نمونه، در رابطه (٤١) تا مشتق مرتبه سوم تابع $g(\xi)$ آورده شده است.

$$
\begin{aligned}
g(\xi) &= c\varepsilon^{\tilde{n}+1}[(1+\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2\\
&\quad |\xi|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)+(1-\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]\\
g'(\xi) &= c\varepsilon^{\tilde{n}+2}[(1+\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2\\
&\quad (H(\xi)-H(-\xi))|\xi|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)\\
&\quad -(1-\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]\\
g''(\xi) &= c\varepsilon^{\tilde{n}+3}[(1+\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2\\
&\quad (H(\xi)+H(-\xi))|\xi|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)\\
&\quad +(1-\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]+c\varepsilon^{\tilde{n}+2}\\
&\quad [(1+\xi)^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2(H(\xi)+H(-\xi))\\
&\quad |\xi|^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)+(1-\xi)^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-1}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]\\
g'''(\xi) &= c\varepsilon^{\tilde{n}+4}[(1+\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-3}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2\\
&\quad (H(\xi)-H(-\xi))|\xi|^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-3}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)\\
&\quad -(1-\xi)^{\tilde{n}+1}h_{\tilde{n}-3}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]+c\,3\varepsilon^{\tilde{n}+3}\\
&\quad [(1+\xi)^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon(1+\xi))-2(H(\xi)-H(-\xi))\\
&\quad |\xi|^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon|\xi|)-(1-\xi)^{\tilde{n}}h_{\tilde{n}-2}^{(1)}(\varepsilon(1-\xi))]
\end{aligned}
\tag{٤٦}
$$

۴-۴- دارا بودن همزمان میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم

در توابع شکل کلاسیک لاگرانژ تنها میدان توابع چند جمله‌ای اغنا می‌شود؛ در حالی که در توابع شکل هنکل کروی علاوه بر میدان توابع چند جمله‌ای، از توابع بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط که در تابع الحاقی $g(\xi)$ ظاهر می‌شوند نیز استفاده شده است.

۵- نمونه‌های عددی

در این قسمت برای نشان دادن قابلیت‌های توابع پیشنهادی چندین نمونه دوبعدی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. برای امکان مقایسه، سعی شده نمونه‌های آورده شده، نمونه‌های مشهوری باشد که در بیشتر مقالات مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای جلوگیری از فرایند مش‌بندی مجدد در حین فرایند بهینه‌سازی، از روش مواد مصنوعی استفاده شده است. ویژگی‌های مواد بدین صورت است که برای قسمت‌های توپر و توخالی به ترتیب مدول الاستیسیته‌های $E = 1\ N/m^2$ و $E = 0.001\ N/m^2$ و نیز برای کلیه دامنه طرح نسبت پواسون $\nu = 0.3$، در نظر گرفته شده است. در هر سه مثال پارامتر ضریب لاگرانژ، پارامتر جریمه، ضریب توسعه و ابعاد، به ترتیب $\gamma = 0.01$، $\Lambda = 1000$، $\alpha = 0.9$، $L = 1$ و $d_s = 5$ است.

۵-۱- مثال تیر کنسول با بارگذاری انتهای سمت راست

به‌عنوان اولین نمونه، تیر کنسول با شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل (٤) مورد بررسی قرار داده شده است. سازه مورد نظر با نیروی عمودی متمرکز $F = 1\,\mathrm{N}$ در سمت راست و شرایط تکیه‌گاهی گیردار در سمت چپ بارگذاری شده است. پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برابر با $\varepsilon = 2$ و $\tilde{n} = 0.002$، تعداد المان‌ها در جهت طول و عرض به ترتیب ۸۰ و ٤۰ و کاهش حجم ٤۰٪ مد نظر است. شکل (۵) طرح بهینه نهایی را نشان می‌دهد که مشابه طرح نهایی حاصل از سایر روش‌های عددی مورد استفاده در بهینه‌سازی توپولوژی است. با توجه به نمودارهای انرژی کرنشی و کاهش حجم در شکل (٦) مشاهده می‌شود که طرح بهینه نهایی با بکار گیری توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی در حل معادله سطح تراز و جایگزینی توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ (به بند ۳- و ۳-۱ مقاله مراجعه شود)، در گام ۳٤ حاصل شده است که در مقایسه با روش PCLS همراه با طرح MBO [14]، هزینه محاسباتی به میزان ۵۸٪ کاهش یافته است؛ و این بدین معنا است که توابع شکل و توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی به دلیل دارا بودن هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط در بهبود دقت و سرعت همگرایی مؤثر واقع شود و امکان ایجاد توپولوژی مشابه با سایر روش‌های عددی را در تعداد گام زمانی کمتر فراهم کند.

شکل ٤. شرایط بارگذاری تیر کنسول.

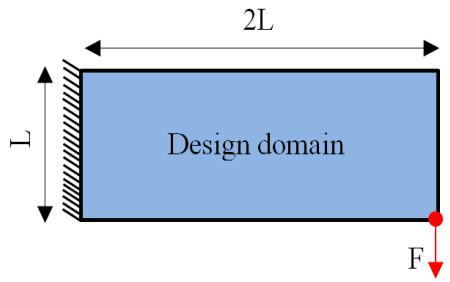
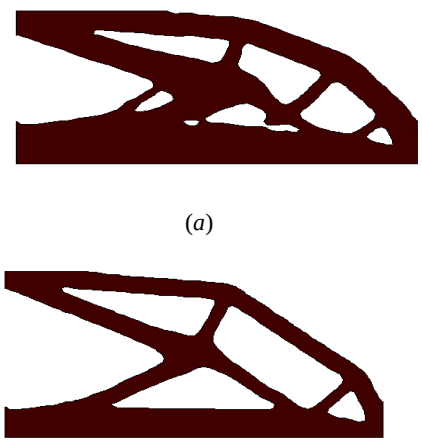


Fig. 4. Loading conditions for the cantilever beam.

شکل ۵. مراحل ایجاد طرح بهینه تیر کنسول. (الف) گام ۱۱، (ب) گام نهایی.



(*a*)

(b)

Fig. 5. The evolution process of optimal design of the cantilever beam. (a) step 11, (b) final step.

شکل ٦. روند تکاملی چگالی انرژی کرنشی و نسبت حجم.

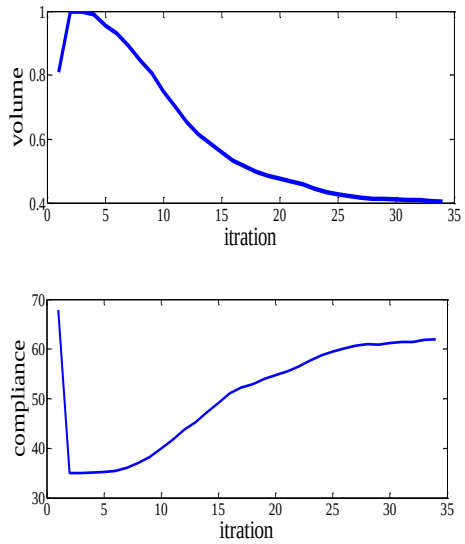


Fig. 6. The evolution process of the compliance and the volume ratio.

۵-۲- نمونه سازه نوع Michell

در این نمونه عملکرد توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی و توابع شکل هنکل کروی در ایجاد طرح بهینه سازه نوع Michell، با شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل (۷) مد نظر است. سازه مورد نظر با نیروی عمودی ثابت $F_1 = 10\ \mathrm{N}$ در مرکز و نیروهای $F_2 = 5\ \mathrm{N}$ به صورت موازی و در فاصله یکسان نسبت به نیروی متمرکز F_1 و شرایط تکیه‌گاهی غلتکی در سمت راست و تکیه‌گاه مفصلی در سمت چپ بارگذاری شده است. پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برابر با $\varepsilon = 2$ و $\tilde{n} = 4$، تعداد المان-ها در جهت طول و عرض به ترتیب ۸۰ و ٤۰ و کاهش حجم ٤۰٪ مد نظر می‌باشد. شکل (۸) طرح بهینه نهایی را نشان می‌دهد که مشابه طرح نهایی حاصل از سایر روش‌های عددی مورد استفاده در بهینه‌سازی توپولوژی است. با توجه به نمودارهای انرژی کرنشی و کاهش حجم در شکل (۹) مشاهده می‌شود که طرح بهینه نهایی با بکار گیری توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی در حل معادله سطح تراز و جایگزینی توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ (به بند ۳- و ۳-۱ مقاله مراجعه شود)، در گام ٦٦ و در روش PCLS همراه با طرح MBO [14]، در گام ۷۲ حاصل‌شده است. درواقع هزینه محاسباتی به میزان ۱۰٪ بهبود یافته است. و این بدین معنا است که توابع پیشنهادی به دلیل دارا بودن هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط در بهبود دقت و سرعت همگرایی مؤثر واقع شدند و امکان ایجاد توپولوژی مشابه با سایر روش‌های عددی را در تعداد گام زمانی کمتر فراهم کردند.

شکل ۷. سازه نوع Michell با چندین بار.

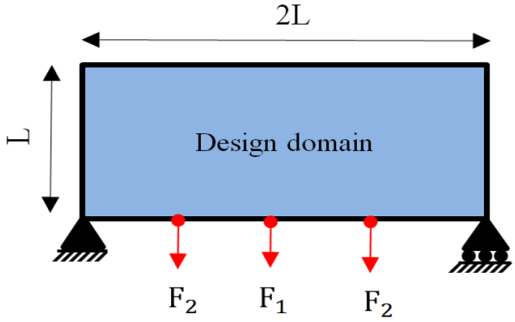


Fig. 7. A Michell type structure with several loadings.

شکل ۸. مراحل ایجاد طرح بهینه سازه نوع Michell با چندین بار (الف) گام ۳۳، (ب) گام نهایی.

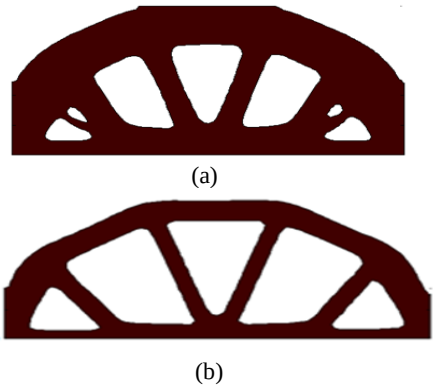


Fig. 8. The evolution process of optimal design of the Michell type structure with several loading. (a) step33, (b) final step.

شکل ۹. روند تکاملی چگالی انرژی کرنشی و نسبت حجم.

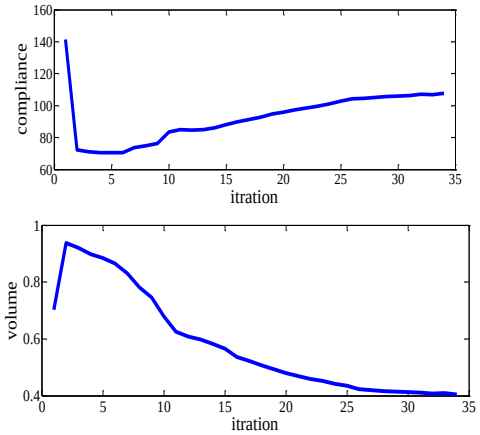


Fig. 9. The evolution process of the compliance and the volume ratio.

۵-۳- نمونه تیر MBB[6]

در این نمونه تیر MBB با شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل (۱۰) مورد بررسی قرار داده شده است. سازه مورد نظر با نیروی عمودی متمرکز $F = 1\,\mathrm{N}$ در مرکز و شرایط تکیه‌گاهی غلطکی در سمت راست و تکیه‌گاه مفصلی در سمت چپ بارگذاری شده است. پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی برابر با $\varepsilon = 0.2$ و $\tilde{n} = 1$، تعداد المان‌ها در جهت طول و عرض به ترتیب ۱۲۰ و ۳۰ و کاهش حجم ۴۰٪ مد نظر است. شکل (۱۱) طرح بهینه نهایی را نشان می‌دهد که مشابه طرح نهایی حاصل از سایر روش‌های عددی مورد استفاده در بهینه‌سازی توپولوژی است. با توجه به نمودارهای انرژی کرنشی و کاهش حجم در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود که طرح بهینه نهایی با بکارگیری توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی در حل معادله سطح تراز و جایگزینی توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ (به بند ۳- و ۳-۱ مقاله مراجعه شود)، در گام ۳۰ حاصل شده است و در مقایسه با روش PCLS همراه با طرح MBO [14]، هزینه محاسباتی به میزان ۵۷٪ کاهش یافته است. و این بدین معنا است که توابع پیشنهادی به دلیل دارا بودن هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط در بهبود دقت و سرعت همگرایی مؤثر واقع شدند و امکان ایجاد توپولوژی مشابه با سایر روش‌های عددی را در تعداد گام زمانی کمتر فراهم کردند.

شکل ۱۰. بارگذاری تیر MBB.

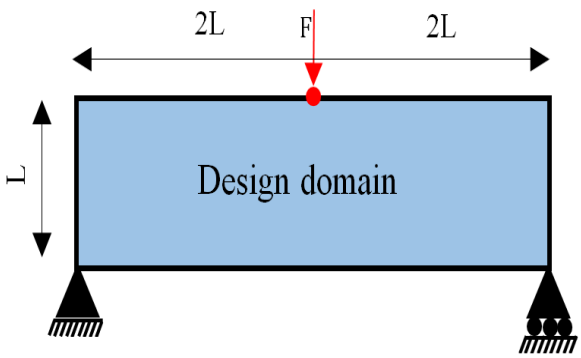


Fig. 10. Loading the MBB beam.

6 Messerschmitt-Bolkow-Blohm

شکل ۱۱. مراحل ایجاد طرح بهینه تیر MBB. (الف) گام ۱۰، (ب) گام نهایی

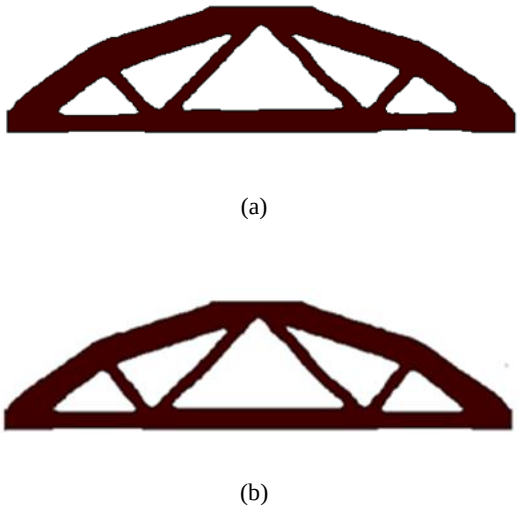


Fig. 11. The evolution process of optimal design of the MBB beam. (a) step10, (b) final step.

شکل ۱۲. روند تکاملی چگالی انرژی کرنشی و نسبت حجم.

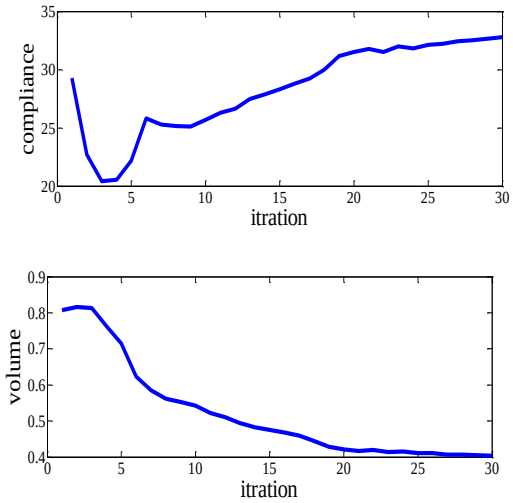


Fig. 12. The evolution process of the compliance and the volume ratio.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه بر مبنای روش سطح تراز، از توابع پایه‌ی شعاعی هنکل کروی که ترکیبی از توابع بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط است، برای حل معادله هامیلتون-ژاکوبی استفاده شد. با استفاده از این توابع، معادله دیفرانسیل جزئی هامیلتون-ژاکوبی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد؛ بنابراین در فرایند بهینه‌سازی دیگر نیازی به فرایند مقداردهی اولیه مجدد و روش‌های

بالادستی برای حل معادله سطح تراز نیست همچنین جایگزینی توابع شکل هنکل کروی با توابع شکل کلاسیک لاگرانژ نتایج زیر را به دنبال داشت:

۱- افزایش سرعت همگرایی

۲- افزایش دقت در فرایند بهینه‌سازی توپولوژی

توابع شکل پیشنهادی علاوه بر ارضای خاصیت دلتای کرونکر و افراز واحد، بی‌نهایت مشتق‌پذیر بوده در حالی که در توابع شکل کلاسیک لاگرانژ تنها میدان توابع چند جمله‌ای اغنا می‌شود. همچنین توابع پیشنهادی به لحاظ دارا بودن هر سه میدان توابع چند جمله‌ای، بسل نوع اول و دوم در فضای مختلط در بهبود دقت و سرعت همگرایی مؤثر واقع شدند و امکان ایجاد توپولوژی مشابه با سایر روش‌های عددی را در تعداد گام زمانی کمتر فراهم کردند.

۷- مراجع References

[1] Manafi A. & Shojaee S. 2015 Optimization of two-way topology using soft removal method. *The First International and 3rd National Conference on Architecture, Civil Engineering and Urban Environment*. (In Persian).

[2] Manafi A. & Shojaee S. 2015 Evolutionary optimization of the developed topology and its combination with several issues. *The First International and 3rd National Conference on Architecture, Civil Engineering and Urban Environment*. (In Persian).

[3] Bendsøe M.P. & Kikuchi N. 1988 Generating optimal topologies in structural design using homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, 197–224.

[4] Bendsøe M.P. 1989 Optimal shape design as a material distribution problem Structural Optimization, **1**(4), 193-202.

[5] Bendsøe M.P. & Sigmund O. 2003 Topology Optimization: Theory, Methods, and applications. *Springer, Berlin Heidelberg.*

[6] Xie Y.M. & Steven G.P. 1993 A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, **49**(5), 885–896.

[7] Osher S. & Sethian J.A. 1998 Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based Hamilton–Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 78, 12–49.

[8] Osher S. & Fedkiw R.P. 2002 Level set methods and dynamic implicit surface. *Springer-Verlag, New York.*

[9] Sethian J.A. 1999 Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer version and material science. *Cambridge University Press, UK.*

[10] Shojaee S. & Mohammadian M. 2010 Topology optimization using the alignment method. *First National Conference on Structures - Earthquakes - Geotechnics. (In Persian).*

[11] Sethian J.A. & Wiegmann A. 2000 Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, 163, 489–528.

[12] Wang M.Y., Wang X.M. & Guo D.M. 2003 A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 217–224.

[13] Wang M.Y. & Wang X.M. 2004 'Color' level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 469–496.

[14] Shojaee S. & Mohammadian M. 2011 Piecewise constant level set method for structural topology optimization with MBO type of projection. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **44**(4), 455-469.

[15] Wang S.Y.& Wang M.Y. 2006 Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **65**(12), 2060-2090.

[16] Hamzeh Javaran S., Khaji N. & Moharrami H. 2011 A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 85-95.

[17] Hamzeh Javaran S., Khaji N. & Noorzad A. 2011 First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. *Acta Mechanica*, 218, 247-258.

[18] Hamzehei Javaran S. & Khaji N. 2013 New complex Fourier shape functions for the analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37, 260-72.

[19] Hamzehei Javaran S. & Khaji N. 2014 Dynamic analysis of plane elasticity with new complex Fourier radial basis function in the dual reciprocity boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 3641-3651.

[20] Hamzehei Javaran S. & Shojaee S. 2017 The solution elastostatic and dynamic problems using the boundary element method based on spherical Hankel element framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,112,2067-2086.

[21] Farmani S., Ghaeini-Hessaroeyeh M. & Hamzehei Javaran S. 2018 The improvement of numerical modeling in the solution of incompressible viscous flow problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions.

International Journal for Numerical Methods in Fluids;87, 70–89.

[22] Hamzehei-Javaran S. & Shojaee S. 2018 Improvement of numerical modeling in the solution of static and transient dynamic problems using finite element method based on spherical Hankel shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Accepted Paper, DOI: 10.1002/nme.5842.

[23] Hamzehei-Javaran S. 2018 Approximation of the state variables of Navier's differential equation in transient dynamic problems using finite element method based on complex Fourier shape functions. *Asian Journal of Civil Engineering*, **19**(4), 431-450.

[24] Manafi A. & Shojaee S. 2015 Optimization of the topology to optimize the natural frequency using the soft-kill BESO method. *National Conference on Civil Engineering and demand oriented research*. (In Persian).

[25] Nia A., Shojaee S. & Torkzadeh P. 2014 Optimization of continuous 3D environments using stress level analysis methods. *8th National Congress on Civil Engineering*. (In Persian).

[26] Xing X.,2009 A finite element Based level set method for structural topology optimization.*A thesis submitted in partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of* .

[27] Wang J.G. & Liu G.R. 2002 On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2611-2630.

Development of new shape functions and Henkel Spherical Radial Basic Functions in Structural Topology Optimization by Levelset Method

Faeze Mordouei[1], Saeid Shojaee [1*], Saleh Hamzehei Javaran [1]

1. Department of Civil Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

[*]saeed.shojaee @uk.ac.ir

Abstract:

Shape and topology optimization have become one of the main researches that is widely used in engineering fields. The purpose of topology optimization is to find an appropriate (optimal) distribution of materials in the design domain so that the shape and number of voids is optimized and the objective function is minimized or maximized. In recent decades, noticeable researches and various topology optimization methods were proposed. The level set method is being used successfully in structural shape and topology optimization. This method is an implicit method for moving interior and exterior boundaries, while these boundaries may join together during the process and new voids may be formed. The structural boundary is illustrated by the zero level set and nonzero in the domain. In the above context, the level set function is used as a switch to distinguish between the two domains present in the computing space. This way of illustration has an important feature by which the domain boundaries can be combined together or divided. By using the solution of Hamilton-Jacobi equation resulting from this function, the domain's boundary starts to move. The control over movement of this boundary is done by velocity vector of Hamilton-Jacobi equation. Now, in order to use this method in topology optimization, it is sufficient to establish a relationship between velocity vector of Hamilton-Jacobi and shape derivation, which is used for optimizing objective function. It is possible to use standard level set for structural topology optimization.

In this paper, the spherical Hankel basis functions are used to optimize the structural topology using the level set method. The proposed functions are a combination of the first and second kind of Bessel functions fields as well as the polynomial ones in complex space and are derived from radial basis functions. Using the spherical Hankel functions, the dependence of the function of the level set method on the space and time is separated, which results in the transformation of the Hamilton-Jacobian partial differential equation into a conventional differential equation. In this way, the difficulties arising from solving partial differential equations are eliminated, and thus there is no need to re-set the function of the level set method in the optimization process. Further, in order to increase the speed and precision of convergence in creating an optimal design, the classic Lagrange shape functions are replaced with the spherical Hankel ones. The proposed shape functions have some properties such as infinite piecewise continuity, the Kronecker delta property, and the partition of unity. Moreover, since they satisfy all three polynomial fields and the first and second kind of Bessel ones in the complex space, they can be effective in improving the accuracy and speed of convergence, while the classic Lagrange shape functions are able to satisfy only the polynomial function fields. Finally, several numerical examples are presented to study the performance of the spherical Hankel radial basis and shape functions.

Keywords: Henkel Spherical radial basic functions, spherical Henkel shaped functions, Topology Optimization, Level-Set method