

مدل سازی ترک و تحلیل ارتعاشی تیرهای بتن آرمه ترک دار مقاوم سازی شده با ورق های کامپوزیتی

جواد رزاقی^۱، مرتضی خمایی ابدی^۲، علی علی جانی^{۳*}

- ۱- استادیار، مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه گیلان
- ۲- کارشناس ارشد، مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه گیلان
- ۳- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی

*alijani@iaubanz.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۷/۰۳/۱۱]

تاریخ دریافت: [۹۶/۰۷/۱۱]

چکیده

در این مقاله، یک روش عددی برای مدل سازی ترک در مود بازشدگی ارائه می شود؛ که در آن یک تحلیل ارتعاشی برای تیرهای بتن آرمه ترک دار تقویت شده با ورق های کامپوزیتی با استفاده از روابط پایه ای مکانیک شکست و روش المان محدود انجام می گیرد. اثر ورق های کامپوزیتی، میلگردهای فولادی و ترک در تحلیل تیر اویلر-برنولی به وسیله اصلاح گشتاور دوم سطح در دو مقطع کامل و ترک دار بررسی می شود. در این مطالعه، المان ترک خورده به دو ریزالمان تقسیم می شود. معادلات این دو ریزالمان با استفاده از شرایط پیوستگی در محل ترک به یکدیگر مربوط شده و ترک توسط یک فنر پیچشی شبیه سازی می شود. سفتی این فنر به صورت تابعی از ضریب شدت تنش تنظیم می شود. این ضریب وابسته به پارامترهایی مانند محل قرارگیری آرماتورها، فاصله ورق کامپوزیتی تا مرکز سطح مقطع، عمق ترک و شرایط بارگذاری است. ماتریس های سختی و جرم تیر با استفاده از اعمال آثار ورق کامپوزیتی، آرماتورهای فولادی و ترک در معادلات اصلاح می شوند. این ماتریس های بهبود یافته به منظور پیاده سازی تحلیل ارتعاشی و استخراج فرکانس های طبیعی تیر به کار برده می شوند. در این پژوهش آثار محل و عمق ترک، شرایط تکیه گاهی، ضخامت ورق کامپوزیتی و مساحت سطح مقطع میلگردهای فولادی روی پاسخ فرکانس های طبیعی تیر بحث می شود. برای اطمینان از صحت و دقت نتایج، یک تحلیل کامل در نرم افزار آباکوس پیاده سازی می شود. مقایسه نتایج به دست آمده نشان می دهد که روش ارائه شده، برای تحلیل سازه های بتن آرمه مقاوم شده در برابر ترک خوردگی مناسب است.

واژگان کلیدی: مدل سازی ترک، تحلیل ارتعاشی، تیرهای بتن آرمه، ورق های کامپوزیتی، ضریب شدت تنش

۱- مقدمه

استفاده از مصالح جدید مقاوم در برابر ترک و فرسایش را برای ترمیم سازه های آسیب دیده مطرح کردند. یکی از اولین مطالعات در حوزه مدل سازی عددی سازه های بتن آرمه توسط کریشنا مورتی و پانرسلاوم [1] در سال ۱۹۷۸ انجام شده است. در ادامه زدنگ و بیونگ [2]، در سال ۱۹۸۴، یک مدل تحلیلی

یکی از مهم ترین عوامل خسارات جبران ناپذیر در سازه های بتن آرمه، ایجاد و رشد ترک در اجزای آن به شمار می آید. این مساله هزینه های زیادی را برای تعمیر، بازسازی و یا تعویض سازه های آسیب دیده به دنبال دارد. امروزه پژوهشگران ایده ی

برای محاسبه‌ی میزان خیز و تغییرات شکل تیرهای بتن‌آرمه‌ی دارای ترک ارائه کردند. این مدل در سال ۱۹۹۰ توسط هوسان و ویلیام [3] تکمیل شد. در ادامه، یک مطالعه‌ی تحلیلی و آزمایشگاهی روی ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی با مقطع I شکل در سال ۱۹۹۳ توسط چاندرا و چوپرا [4] ارائه شد. در این پژوهش، از روش گالکین و یک آزمایش ارتعاشی تحت بارگذاری چرخشی با سرعت ۱۰۰۰ دور در دقیقه استفاده شده است. نتایج تغییرات فرکانس طبیعی و شکل مود تیر با استفاده از دو روش فوق با یکدیگر مقایسه شده و درستی نتایج تایید شد. یک مطالعه جامع روی تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای بتن آرمه دارای ترک در دو حالت مقاوم‌سازی شده و نشده توسط ماسنزوی و همکاران [5] در سال ۲۰۰۵ ارائه شد. در این مطالعه، در مرحله‌ی اول آثار میلگردهای فولادی و ورق کامپوزیتی روی تیر دارای ترک مورد بررسی قرار گرفته و یک روش تحلیلی برای مدل‌سازی تیر ترک‌خورده تقویت شده با ورق کامپوزیتی پیشنهاد شد. سپس در مرحله دوم یک پیش‌بینی از الگوی ترک بر اساس تغییرات فرکانس طبیعی ارائه شد. مقایسه‌ی نتایج این پژوهش با نتایج آزمایشگاهی در مقیاس کوچک نشان از دقت روش ارائه شده دارد. در ادامه، در سال ۲۰۰۶، یک مطالعه روی تیرهای بتنی تقویت شده با صفحات فایبرگلاس خارجی توسط هسو [6] انجام شد. در این مطالعه رفتار خمشی تیرهای بتنی مسلح تقویت شده با استفاده از پیاده‌سازی یک مدل عددی به روش اجزای محدود مطالعه و بررسی شد. این مدل بر مبنای یک معادله دیفرانسیل پایه طراحی و در نرم افزار آباکوس شبیه‌سازی شده است. نتایج عددی تست خمش ۴ نقطه‌ای از تیر در دو حالت دارای تقویت‌کننده خارجی و بدون آن نشان داد که مقاومت خمشی تیر به طور قابل توجهی با تغییر ضخامت صفحات تقویتی افزایش می‌یابد. در این بررسی از ۱۱ نمونه برای دستیابی به همگرایی نتایج استفاده شده است. یک بررسی روی ارتعاشات آزاد تیر تقویت شده با لمینیت کامپوزیتی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) توسط آتلیهان و همکاران [7] در سال ۲۰۰۸ انجام شد. این روش برای دستیابی به یک راه حل عددی دقیق با توجه به شرایط مرزی مسئله، مناسب ارزیابی شد. مقایسه نتایج

مراجع معتبر و پژوهش‌های آزمایشگاهی با نتایج روش مربعات دیفرانسیلی، دقت آن را اثبات می‌کند. در ادامه، پژوهش روی آسیب‌دیدگی تیرهای بتن مسلح تقویت شده با FRP تحت ارتعاش، توسط باقری و همکاران [8] در سال ۲۰۰۹ دنبال شد. در این مطالعه، تحلیل مودال روی چند نمونه از تیرهای بتن-مسلح با استفاده از داده‌های تجربی پیاده‌سازی شد؛ که در آن چگونگی آسیب تیر و تغییر پارامترهای دینامیکی تیر از ابتدای تحلیل تا حالت شکست نهایی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این مطالعه نشان داد که تغییرات فرکانس طبیعی به طور کامل قادر به تشخیص الگوی آسیب و پیش‌بینی میزان مقاومت ناشی از تقویت‌کننده CFRP است. در همان سال یک مطالعه‌ی تحلیلی و عددی روی تیرهای بتن آرمه تقویت شده با ورق FRP تحت بار ضربه‌ای توسط کبیر و شافعی [9] انجام شد. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که ورق‌های کامپوزیتی خارجی که به بتن پیوند دارد، مقاومت در برابر بار ضربه‌ای را به شدت افزایش می‌دهد. این ورق‌ها قادر به کنترل گسترش ترک و انتشار آن در مسیر مطلوب است. در پژوهش دیگری، پلیمر FRP به عنوان یک ساختار جایگزین مناسب برای میلگردهای فولادی توسط لاو و پامب [10] در سال ۲۰۱۰، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. در این پژوهش آثار تقویت‌کننده هیبریدی FRPRC روی کاهش شکنندگی و مقاومت خمشی بتن ارزیابی شد. در ادامه، بهرا و همکاران [11] در سال ۲۰۱۴، رفتار لرزه‌ای تیر بتنی ترک‌خورده تقویت شده با کاور U شکل را تحت بار چرخشی مورد بررسی قرار دادند. آنها یک مدل برای پیش‌بینی رفتار لرزه‌ای سازه ارائه کردند. نتایج بررسی‌ها نشان داد الگوریتم ارائه شده برای حل روابط حاکم بر تیر ترک‌خورده تقویت شده، مناسب است. در همان سال، ارتعاشات آزاد تیر بتن‌آرمه دارای ترک منفرد که با ورق-های کامپوزیتی FRP تقویت شده‌اند، توسط چن و لیو [12] بررسی شد. در این مطالعه معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوط به ارتعاش تیر بتن‌آرمه ترک‌خورده تقویت شده، با استفاده از اصل همپلتون استخراج شد. در بخش تقریبی، از روش گالکین برای بررسی آثار پارامترهای هندسه ترک، میلگردهای فولادی و ورق کامپوزیتی روی رفتار دینامیکی تیر

ترک و ابعاد ورق کامپوزیتی ارائه می‌کند. در این راستا، یک مدل اجزای محدود برای تحلیل رفتار شکست تیرهای ترک‌دار تقویت شده با GFRP در سال ۲۰۱۶ توسط یانگ و همکاران [18] ارائه شد. در همان سال، با استفاده از مبانی تحلیل ارتعاشی، یک روش برای تشخیص ترک‌های موجود در تیر مقاوم‌سازی شده، توسط خلوت و بهاگوات [19] ارائه شد. در ادامه، رفتار تیرهای بتن آرمه‌ی تقویت شده با فولاد هیبریدی و کامپوزیت FRP در سال ۲۰۱۷ توسط مصطفی و هیلال [20] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه از یک مدل اجزای محدود غیرخطی و شبیه‌سازی در نرم افزار Ansys برای بررسی رفتار تیر استفاده شده است. در این راستا، یک مطالعه دقیق روی تقویت برشی تیرهای ترک‌خورده با استفاده از ورق کامپوزیتی توسط باقی و هکاران [21] ارائه شد. در دیگر پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه، رفتار تیرهای پیش ترک-خورده بتن آرمه توسط رزاقی و همکاران [22] و تیرهای ترک-خورده روی بستر الاستیک توسط علی‌جانی و همکاران [23] در سال ۲۰۱۸ مورد بررسی قرار گرفت.

در این مقاله، آثار مقاوم‌سازی تیر بتن آرمه ترک‌دار با استفاده از ورق‌های کامپوزیتی روی پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر بحث می‌شود. در اینجا، یک ورق کامپوزیتی کاملاً مقید در سطح تحتانی تیر، ترکی منفرد عمود بر محور افقی تیر و میلگردهای فولادی در مقطع تحت کشش فرض می‌شوند. با این فرضیات معادلات پایه تیر اوپلر-برنولی ارتقاء پیدا کرده و ماتریس‌های سختی و جرم سازه اصلاح می‌شوند. استفاده از صفحات تقویتی کامپوزیتی و میلگردهای فولادی موجب تغییر مرکز سطح مقطع تیر، گشتاور دوم سطح و ضرایب شدت تنش می‌شود. مدل‌سازی ترک با استفاده از ضرایب شدت تنش اصلاح شده و به کمک یک فنر پیچشی انجام می‌گیرد. نهایتاً یک روش المان محدود بهبودیافته، برای تحلیل ارتعاشی تیر بتن‌آرمه‌ی ترک‌دار مقاوم‌سازی شده با ورق تقویتی ارائه می‌شود. نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس مقایسه و درستی‌آزمایی می‌شود. از جمله جنبه‌های برجسته این پژوهش نسبت به مطالعات پیشین، ارائه یک فرمول‌بندی منحصر به فرد برای تحلیل ارتعاشی و استخراج فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار بتن آرمه تقویت شده با ورق

استفاده شده است. نتایج این پژوهش نشان داد، موقعیت ترک تاثیر کمی روی فرکانس تیر دارد در حالیکه تقویت‌کننده موجب تغییرات شدید نتایج تحلیل می‌شود. در ادامه، تحلیل ارتعاشی تیر بتن‌آرمه آسیب‌دیده و سالم که با پلیمر کربن CFRP تقویت شده است، توسط کاپوزوکا [13] در سال ۲۰۱۴ انجام شد. در این پژوهش رفتار دینامیکی تیر گیردار-آزاد آسیب دیده به کمک یک مدل ریاضی ارزیابی شد. در همان سال، تجزیه و تحلیل مودال تیر دارای ترک عرضی تقویت شده با کامپوزیت به کمک نرم افزار Ansys توسط یاسمن و همکاران [14] انجام شد. در این مطالعه اثر جهت‌گیری کامپوزیت‌های فیبری، عمق ترک و مکان ترک روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر مورد بررسی قرار گرفت. از آنجا که پارامترهای غیرخطی نقشی اساسی در نتایج تحلیل تیرهای بتن‌آرمه تقویت شده دارد، یک تحلیل ارتعاشی غیرخطی روی تیر ترک‌خورده حاوی لایه‌های کامپوزیتی از جنس نانو لوله‌های کربنی در محیط حرارتی توسط فان و وان [15] در سال ۲۰۱۵ انجام شد. در این پژوهش معادلات حرکت بر اساس تئوری تیر اوپلر-برنولی استخراج شد. نتایج عددی حاصل از این پژوهش نشان داد؛ ویژگی‌های ترک و لایه‌های کامپوزیتی نقش مهمی در ارتعاشات غیرخطی تیر تقویت شده با لایه‌های هیبریدی دارد. در پژوهش دیگری، اثر اندازه در تیر بتنی بدون ترک و از پیش ترک‌خورده که توسط ژاکت‌های کامپوزیتی تقویت شده اند توسط نگویان-مینها و رروناک [16] در سال ۲۰۱۵ ارزیابی شد. در این پژوهش رفتار برشی تیرهای بتن مسلح تقویت شده با ژاکت U شکل از جنس الیاف شیشه، فیبر کربن و مواد کامپوزیتی اپوکسی، بررسی شد. در این پژوهش ۱۲ تیر تقویت شده بتنی و ۶ تیر بدون مقاوم‌سازی مورد آزمایش قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که ژاکت‌های تقویتی باعث کاهش انرژی شکست، کاهش نیروی کششی در میلگردهای فولادی و همچنین کاهش قابل ملاحظه‌ی عرض ترک‌ها می‌شود. جادهاو و بهومکار [17] در سال ۲۰۱۶ یک روش عددی بر مبنای روش اجزای محدود برای تحلیل تیر گیردار-آزاد ترک‌دار تقویت شده با کامپوزیت ارائه کردند. در این روش از یک فنر برای مدل‌سازی ترک و اتصال دو بخش منفصل تیر استفاده شده است. نتایج این پژوهش رابطه‌ای صریح بین فرکانس طبیعی و عمق ترک، محل

$$k_{ds} = \frac{1}{\lambda_M} = \frac{2b(1-v^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{IM}}{M} \right)^2 da \quad (2)$$

۳- مدل سازی تیرهای بتن آرمه ترک دار تقویت شده با ورق کامپوزیتی

در اینجا، با استفاده از روش اجزای محدود و تئوری تیرهای اویلر-برنولی یک روش برای مدل سازی ترک در تیر-های بتن آرمه تقویت شده با ورق کامپوزیتی ارائه می شود. یک نمایش شماتیک از تیر ترک دار تقویت شده به صورت شکل (۱) ارائه می شود. مطابق شکل، المان های تیر، به دو دسته المان تقسیم می شوند.

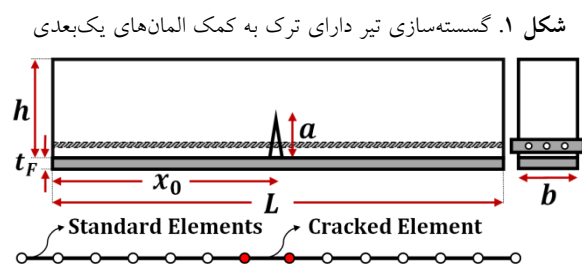
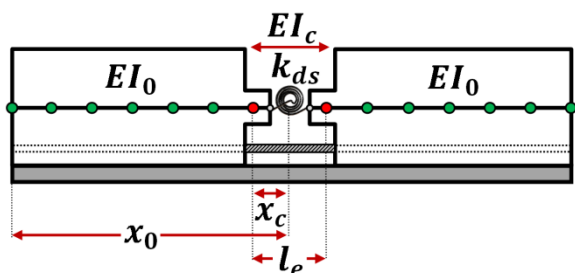


Fig. 1. Discretization of a cracked beam using one-dimensional elements

دسته ی اول، المان های یک بعدی بدون ترک است؛ که در حالت استاندارد با ویژگی های مادی و هندسی مقطع بتن آرمه تقویت شده، معادل می شوند. این المان ها با استفاده از روش مقطع تبدیل یافته، به صورت یکپارچه با مدول الاستیسیته معادل بتن در نظر گرفته می شود. سپس آثار ورق تقویتی روی هر المان پیاده سازی می شود. دسته ی دوم، المان ترک دار بوده که با استفاده از یک فنر پیچشی مطابق با شکل (۲) معادل سازی می شود.

شکل ۲. مدل سازی المان ترک دار با فنر پیچشی



کامپوزیتی است. این فرمول بندی بر اساس تبدیل المان ترک دار به دو ریزالمان و مدل سازی ورق کامپوزیتی و میلگردهای فولادی با استفاده از روش مقطع تبدیل یافته انجام می شود. که در آن آثار ضخامت این ورق و قطر میلگردهای فولادی روی پاسخ ارتعاشی تیر بررسی می شود.

۲- تعیین سفتی فنر پیچشی با استفاده از ضریب شدت تنش

یکی از روش های مدل سازی و تحلیل تیرهای دارای ترک، استفاده از فنر پیچشی در محل ترک است. این روش بر اساس تغییرات انرژی کرنشی و گشتاور دوم سطح، قبل و بعد از بازشدگی ترک پایه ریزی می شود [24, 25]. در این روش، انرژی آزاد شده بر اساس رابطه پیشنهاد شده توسط کاینزler و هرمان [26, 27] و یوکویاما [28] به مقدار ضریب شدت تنش مرتبط می شود. این ضریب برای تیری با مقطع مستطیلی تحت خمش خالص مطابق معادله های (۱-۱) و (۲-۱) به دست می آید.

$$K_{IM} = M \sqrt{\frac{1}{b} \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_c} \right)} \quad (1-1)$$

$$K_{IM} = \begin{cases} \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) & 0 \leq \xi \leq 0.6 \\ \frac{3.99M}{bh\sqrt{h}\sqrt{(1-\xi)^3}} & 0.6 < \xi < 1 \end{cases} \quad (2-1)$$

که در آن

$$\xi = \frac{a}{h} \quad (3-1)$$

$$F_M(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi\xi} \right) \tan \frac{\pi\xi}{2} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\frac{\pi\xi}{2})]^4}{\cos(\frac{\pi\xi}{2})}} \quad (4-1)$$

با استفاده از معادله ی فوق، ضریب سفتی فنر پیچشی به صورت تابعی از عمق ترک، شرایط بارگذاری، شرایط مادی، عرض تیر، تغییرات گشتاور دوم سطح و ضریب شدت تنش به صورت معادله ی (۲) ارائه می شود.

Fig. 2. Modeling of cracked element with a rotational spring

که در آن

$$\bar{y}_0 = \frac{bh\left(\frac{h}{2}\right) + A_s d_s (n_1 - 1) + A_F d_F (n_2 - 1)}{bh + A_s (n_1 - 1) + A_F (n_2 - 1)} \quad (2-4)$$

در اینجا n_1 و n_2 به ترتیب نسبت مدول الاستیسیته فولاد به بتن $\left(\frac{E_F}{E_C}\right)$ و مدول الاستیسیته ورق کامپوزیتی به بتن $\left(\frac{E_s}{E_C}\right)$ تعریف می‌شود. با جایگذاری رابطه (۴-۱) در رابطه (۳-۳) ماتریس سختی المان بدون ترک تیر بتن آرمه‌ی تقویت شده مطابق رابطه (۵) استخراج می‌شود.

$$K_0 = \frac{EI_0}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

۳-۲- استخراج ماتریس سختی المان ترک‌دار

پایه‌سازی روش اجزای محدود برای المان ترک‌خورده بر طبق روش مقطع کاهش‌یافته [26] و استفاده از فنر پیچشی به جای ترک، انجام می‌شود. در این روش ابتدا ابعاد ترک به صورت یک ضعف هندسی (کاهش سطح مقطع) معادل می‌شود. سپس برای تعیین ماتریس سختی المان، یک فنر پیچشی در محل ترک فرض می‌شود. در اینجا بر اساس یک روش پیشنهادی، المان دارای ترک مطابق شکل (۴) با دو ریزالمان و یک فنر پیچشی معادل‌سازی می‌شود [23]. برای ایجاد یک ارتباط منطقی بین ریزالمان‌ها و فنر پیچشی از شرایط پیوستگی حاکم در محل ترک استفاده می‌شود.

شکل ۴. مدل‌سازی المان ترک‌دار با دو ریزالمان و یک فنر پیچشی

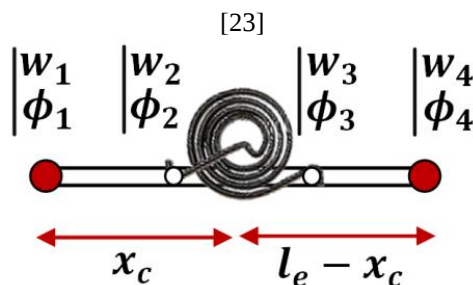


Fig. 4. A cracked element including two sub-elements and a rotational spring [23]

۳-۱- استخراج ماتریس سختی المان بدون ترک

پایه‌سازی روش اجزای محدود و استخراج ماتریس سختی المان‌های بدون ترک مطابق تئوری تیر اوپلر-برنولی انجام می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} EI_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (1-3)$$

که در آن

$$w = [N] \{w_1, \phi_1, w_4, \phi_4\}^T \quad (2-3)$$

نهایتاً با استفاده از توابع شکل مطابق [29] ماتریس سختی یک المان بدون ترک تیر بتن آرمه‌ی تقویت شده با ورق کامپوزیتی مطابق رابطه (۳-۳) استخراج می‌شود.

$$K_0 = EI_0 \int_0^{l_e} [N'']^T [N''] dx \quad (3-3)$$

با استفاده از روش مقطع تبدیل‌یافته [22]، اثر میلگردهای طولی و ورق تقویتی به صورت تغییر ویژگی‌های مادی و هندسی تیر (مدول خمشی)، روی ماتریس سختی المان‌ها تأثیر-گذار است. به‌گونه‌ای که محل تار خشی و ممان اینرسی اصلاح‌شده در یک المان بدون ترک (کامل) تیر تقویت شده، مطابق شکل (۳) و روابط (۴) تعیین می‌شود.

شکل ۳. مقطع بدون ترک (کامل) تیر بتن آرمه‌ی تقویت شده با ورق کامپوزیتی

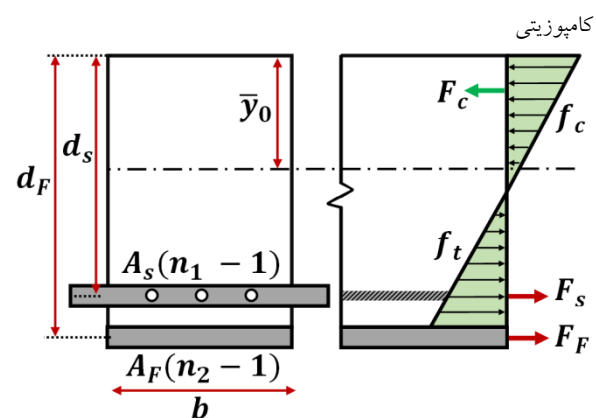


Fig. 3. uncracked (perfect) section of reinforced concrete beam strengthened with composite sheet

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \bar{y}_0 \right)^2 + A_s (n_1 - 1) \times (d_s - \bar{y}_0)^2 + A_F (n_2 - 1) \times (d_F - \bar{y}_0)^2 \quad (1-4)$$

(۵) تشریح می‌شود.

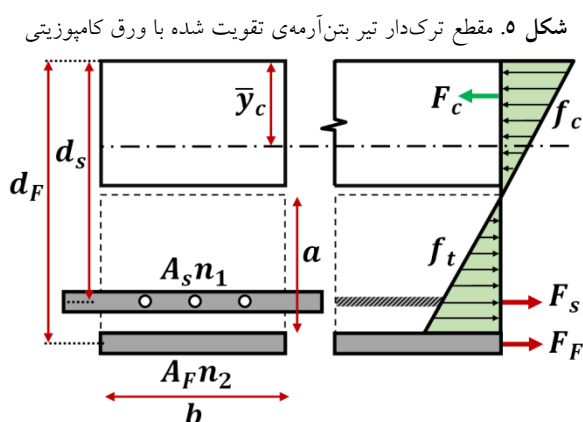


Fig. 5. Cracked section of reinforced concrete beam strengthened with composite sheet

به منظور قابلیت اسمبل کردن ماتریس‌های سختی، باید انرژی‌های کرنشی مستخرج از روابط (۸ و ۱۱) برحسب جابه‌جایی‌های نقاط گره‌ای پایه (گره‌های ۱ و ۴) محاسبه شوند. این امر با استفاده از ماتریس‌های تبدیل استخراج‌شده از حل دستگاه معادلات پیوستگی [22، 23]، مطابق زیر انجام می‌شود.

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{C}_L \mathbf{u} \quad (۱-۱۴)$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} C_L^{11} & C_L^{12} & C_L^{13} & C_L^{14} \\ C_L^{21} & C_L^{22} & C_L^{23} & C_L^{24} \\ C_L^{31} & C_L^{32} & C_L^{33} & C_L^{34} \\ C_L^{41} & C_L^{42} & C_L^{43} & C_L^{44} \end{bmatrix} \quad (۲-۱۴)$$

به طور مشابه، انرژی کرنشی و ماتریس تبدیل استخراج‌شده برای ریزالمان سمت راست به ترتیب مطابق روابط (۱۵-۱) و (۲-۱۵) ارائه می‌شود.

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{C}_R \mathbf{u} \quad (۱-۱۵)$$

$$\mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} C_R^{11} & C_R^{12} & C_R^{13} & C_R^{14} \\ C_R^{21} & C_R^{22} & C_R^{23} & C_R^{24} \\ C_R^{31} & C_R^{32} & C_R^{33} & C_R^{34} \\ C_R^{41} & C_R^{42} & C_R^{43} & C_R^{44} \end{bmatrix} \quad (۲-۱۵)$$

هر یک از درایه‌های ماتریس‌های تبدیل فوق مطابق [22] ارائه می‌شوند.

با جایگذاری روابط (۱-۱۴) و (۱-۱۵) در روابط (۷) و (۱۰)، انرژی کرنشی ریزالمان سمت چپ و راست برحسب گره‌های

با اعمال شرایط پیوستگی در محل ترک، ماتریس سختی المان ترک‌خورده به صورت مجموع سه ماتریس سختی تعریف می‌شود؛ که برای محاسبه‌ی هرکدام از آن‌ها از انرژی کرنشی استفاده می‌شود. میزان انرژی کرنشی کل المان دارای ترک به صورت مجموع انرژی کرنشی ریزالمان‌های سمت چپ و راست و انرژی کرنشی فنر پیشگی تعریف می‌شود.

$$U_c = U_L + U_R + U_s \quad (۶)$$

انرژی کرنشی ریزالمان سمت چپ فنر پیشگی مطابق رابطه (۷) ارائه می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_L\}^T [\mathbf{k}_L] \{\mathbf{u}_L\} \quad (۷)$$

که در آن

$$\{\mathbf{u}_L\}^T = \{w_1, \phi_1, w_2, \phi_2\} \quad (۸)$$

بدین ترتیب ماتریس سختی ریزالمان سمت چپ مطابق رابطه (۹) ارائه می‌شود.

$$\mathbf{k}_L = \frac{EI_c}{x_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6x_c & -12 & 6x_c \\ 6x_c & 4x_c^2 & -6x_c & 2x_c^2 \\ -12 & -6x_c & 12 & -6x_c \\ 6x_c & 2x_c^2 & -6x_c & 4x_c^2 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

به طور مشابه برای تعیین انرژی کرنشی، بردار جابه‌جایی و ماتریس سختی ریزالمان سمت راست، به ترتیب روابط زیر ارائه می‌شود.

$$U_R = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_R\}^T [\mathbf{k}_R] \{\mathbf{u}_R\} \quad (۱۰)$$

$$\{\mathbf{u}_R\}^T = \{w_3, \phi_3, w_4, \phi_4\} \quad (۱۱)$$

$$\mathbf{k}_R = \frac{EI_c}{\beta_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\beta_c & -12 & 6\beta_c \\ 6\beta_c & 4\beta_c^2 & -6\beta_c & 2\beta_c^2 \\ -12 & -6\beta_c & 12 & -6\beta_c \\ 6\beta_c & 2\beta_c^2 & -6\beta_c & 4\beta_c^2 \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

که $\beta_c = l_e - x_c$ و I_c مطابق رابطه (۱۳) تعریف می‌شود.

$$I_c = \frac{b(h-a)^3}{12} + b(h-a) \left(\frac{h-a}{2} - \bar{y}_c \right)^2 + A_s n_1 (d_s - \bar{y}_c)^2 + A_F n_2 (d_F - \bar{y}_c)^2 \quad (۱۳)$$

به طور مشابه $\bar{y}_c$ با جایگذاری $h - a$ به جای پارامتر h در رابطه (۲-۴) استخراج می‌شود. پارامترهای فوق مطابق شکل

پایه محاسبه می شود.

در تحلیل تیر ترک دار، ماتریس سختی المان های بدون ترک تیر بتن آرمه ی تقویت شده (K_0) با ماتریس سختی المان ترک خورده (K_c) ترکیب و ماتریس سختی کل (K_t) استخراج می شود.

۴- فرمول بندی تحلیل ارتعاشی

معادله پایه ی استخراج فرکانس های طبیعی تیر بتن آرمه ترک دار مقاوم سازی شده با ورق کامپوزیتی به صورت زیر ارائه می شود.

$$|K_t - \omega^2 M_t| = 0 \quad (23)$$

که در آن ماتریس سختی کل تیر از روابط بخش پیشین تعیین می شود؛ همچنین ماتریس جرم کل، با ترکیب ماتریس جرم المان های بدون ترک و ترک دار مطابق دو بخش (۴-۱) و (۴-۲) استخراج می شود.

۴-۱- استخراج ماتریس جرم المان بدون ترک

ماتریس جرم المان های بدون ترک با استفاده از معادله انرژی جنبشی مطابق با مرجع [۱۰] تعیین می شود. در این حالت انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{x_c} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۳) در رابطه (۲۴) ماتریس جرم المان بدون ترک تعیین می شود.

$$M_0 = \int_0^{l_e} \rho [N]^T [N] dv \quad (25)$$

۴-۲- استخراج ماتریس جرم المان ترک دار

برای تعیین ماتریس جرم المان دارای ترک، انرژی جنبشی ریزالمان های سمت چپ و راست فنر پیچشی تعیین و با یکدیگر جمع می شوند. در این حالت از جرم و انرژی جنبشی فنر صرف نظر می شود. در نتیجه انرژی جنبشی المان دارای ترک به صورت زیر ارائه می شود.

$$T_t^c = T_L + T_R \quad (26)$$

انرژی جنبشی اصلاح شده ریزالمان های سمت چپ و راست فنر پیچشی بر حسب سرعت گره های پایه به ترتیب به صورت زیر

$$U_L = \frac{1}{2} \{u\}^T [C_L]^T [k_L] [C_L] \{u\} \quad (1-16)$$

$$U_R = \frac{1}{2} \{u\}^T [C_R]^T [k_R] [C_R] \{u\} \quad (2-16)$$

در اینجا، انرژی کرنشی فنر پیچشی بر حسب دوران خالص فنر محاسبه می شود.

$$U_s = \frac{1}{2} k_{ds} \Delta \phi^2 = \frac{1}{2} k_{ds} (\phi_3 - \phi_2)^T (\phi_3 - \phi_2) \quad (17)$$

که در آن دوران دو طرف فنر پیچشی (گره های ۲ و ۳) با استفاده از ماتریس های تبدیل به صورت ذیل تعیین می شود.

$$\phi_2 = \{C_L^{41} \ C_L^{42} \ C_L^{43} \ C_L^{44}\} u \quad (1-18)$$

$$\phi_3 = \{C_R^{21} \ C_R^{22} \ C_R^{23} \ C_R^{24}\} u \quad (2-18)$$

با جایگذاری روابط (۱-۱۸) و (۲-۱۸) در رابطه (۱۷)، انرژی کرنشی فنر پیچشی بر حسب بردار جابه جایی گره های پایه ارائه می شود.

$$U_s = \frac{1}{2} \{u\}^T k_{ds} \{C_M\}^T \{C_M\} \{u\} \quad (19)$$

که در آن:

$$\{C_M\} = \begin{Bmatrix} C_R^{21} - C_L^{41} \\ C_R^{22} - C_L^{42} \\ C_R^{23} - C_L^{43} \\ C_R^{24} - C_L^{44} \end{Bmatrix}^T \quad (20)$$

با بررسی روابط (۱-۱۶)، (۲-۱۶) و (۱۹) ماتریس سختی اصلاح شده ی ریزالمان های چپ و راست و فنر پیچشی به ترتیب به فرم زیر ارائه می شود.

$$k_L^c = [C_L]^T [k_L] [C_L] \quad (1-21)$$

$$k_R^c = [C_R]^T [k_R] [C_R] \quad (2-21)$$

$$K_s = k_{ds} \{C_M\}^T \{C_M\} \quad (3-21)$$

بدین ترتیب، ماتریس سختی یک المان ترک دار با جایگذاری روابط (۱۶) و (۲۱) در رابطه (۶) به صورت زیر حاصل می شود.

$$K_c = k_L^c + k_R^c + K_s \quad (22)$$

تعیین می شود.

$$T_L^c = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C_L]^T [M_L] [C_L] \{\dot{u}\} \quad (1-27)$$

$$T_R^c = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C_R]^T [M_R] [C_R] \{\dot{u}\} \quad (2-27)$$

در نتیجه ماتریس جرم اصلاح شده برای ریزالمان های سمت چپ و راست، به ترتیب مطابق زیر استخراج می شود.

$$M_L^c = [C_L]^T [M_L] [C_L] \quad (1-28)$$

$$M_R^c = [C_R]^T [M_R] [C_R] \quad (2-28)$$

که در آن

$$M_L = \frac{\rho A}{l_e} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} x_c & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} x_c \\ \frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 & \frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} x_c & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} x_c \\ -\frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 & -\frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$M_R = \frac{\rho A}{\beta_c} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} \beta_c & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} \beta_c \\ \frac{11}{210} \beta_c & \frac{1}{105} \beta_c^2 & \frac{13}{420} \beta_c & -\frac{1}{140} \beta_c^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} \beta_c & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} \beta_c \\ -\frac{13}{420} \beta_c & -\frac{1}{140} \beta_c^2 & -\frac{11}{210} \beta_c & \frac{1}{105} \beta_c^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

بنابراین ماتریس جرم المان ترک دار به صورت زیر تعیین می شود.

$$M_c = M_L^c + M_R^c \quad (31)$$

در تحلیل ارتعاشی تیر، ماتریس جرم المان های بدون ترک تیر بتن آرمه ی تقویت شده (M_0) با ماتریس جرم المان ترک خورده (M_c) ترکیب شده و ماتریس جرم کل تیر (M_t) استخراج می شود. نهایتاً با استفاده از معادله ی مقدار ویژه (۲۳) فرکانس های طبیعی تیر دارای ترک تحت ارتعاش آزاد، تعیین می شود.

۵- بحث و نتایج

در این بخش رفتار ارتعاشی تیر بتن آرمه تقویت شده دارای ترک در قالب چند مطالعه موردی بررسی می شود. به گونه ای که آثار تغییر عمق و مکان ترک، ضخامت ورق تقویتی و قطر میلگرهای فولادی روی میزان فرکانس طبیعی تیر الاستیک

مطالعه و مقادیر آن با نرم افزار آباکوس مقایسه و راستی آزمایی می شود.

۵-۱- مشخصات مدل

تیر بتن آرمه ی ترک دار تقویت شده با ورق کامپوزیتی با مشخصات مفروض مطابق با جدول (۱)، تحت شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۱. ویژگی های مادی و هندسی تیر بتن آرمه ی ترک دار تقویت شده با

ورق کامپوزیتی

ویژگی های مادی	ویژگی های هندسی
$E_c = 2.5e10 \text{ N/m}^2$	$L = 5 \text{ m}$
$E_s = 2.0e11 \text{ N/m}^2$	$h = 0.3 \text{ m}$
$E_F = 2.6e11 \text{ N/m}^2$	$b = \text{Unit}$
$\nu = 0.25$	$t_F = 0.001 - 0.004 \text{ m}$
	$d_s = 0.27 \text{ m}$
	$d_F = 0.3 \text{ m}$
	$D_s = 0 - 28 \text{ mm}$
	$A_s = \pi D_{Rc}^2 / 4 \text{ m}^2$
	$A_F = 0.001 \text{ m}^2$

Table 1. Material and geometric parameters of cracked reinforced concrete beam strengthened with composite sheet

در این مطالعه، آثار افزایش عمق ترک از صفر تا ۰/۷ ارتفاع تیر، تغییرات محل ترک در ناحیه ی بین ۰/۹۵-۰/۰۵ طول تیر، تغییر ضخامت ورق کامپوزیتی در پنج وضعیت و تغییر ابعاد میلگرها در چهار حالت مورد بررسی قرار می گیرد.

۵-۲- اعتبار سنجی نتایج

در اینجا، نتایج حاصل از دو روش المان محدود بهبود یافته و نرم افزار آباکوس در تعیین فرکانس طبیعی تیر ترک دار مقاوم سازی شده با ورق کامپوزیتی، با یکدیگر مقایسه می شوند. در استخراج نتایج، عمق ترک ثابت (۰/۲ ارتفاع تیر) فرض می شود. تغییرات فرکانس طبیعی با تغییر محل ترک در سه شرایط مرزی مفروض، مطابق شکل های (۶) الی (۸) ارائه می شود. در اینجا ضخامت ورق کامپوزیتی ۰.۰۰۱ m و قطر میلگرها ۲۲ mm در نظر گرفته می شود. تعداد میلگرها، فاصله ی میلگرها تا

مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی گیردار-گیردار. گیردار خطای ۰,۷۷ درصد بین نتایج را نشان می‌دهد.

به طور مشابه، نتایج مقایسه دو روش المان محدود بهبود یافته و شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس در شرایط مرزی گیردار-آزاد مطابق با شکل (۸) ارائه می‌شود.

شکل ۸. فرکانس طبیعی بر حسب محل ترک در شرایط مرزی گیردار-آزاد

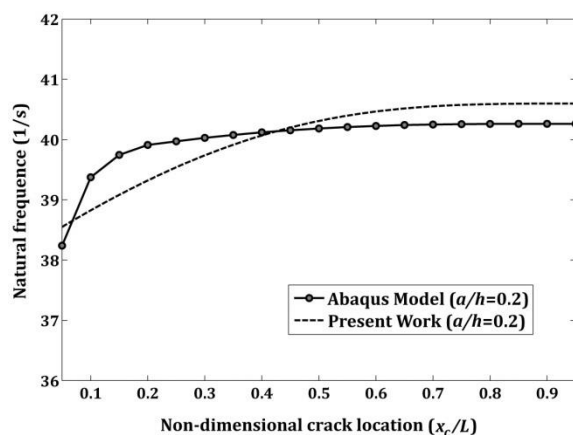


Fig. 8. The natural frequency in terms of the crack location in clamped-free boundary conditions

بیشینه‌ی خطا در این حالت ۱/۷۵ درصد گزارش می‌شود. با توجه به شکل‌های (۶) الی (۸) مشاهده می‌شود که نتایج دو روش ارائه شده، تطابق بسیار نزدیکی با یکدیگر دارند. چند منبع اصلی ایجاد خطای حداکثر ۱/۷۵ درصدی بین نتایج آباکوس و روش اجزای محدود بهبود یافته به شرح ذیل معرفی می‌شود:

الف) چشم‌پوشی از آثار برشی: با توجه به آنکه تئوری تیر تیموشنکو می‌تواند آثار برشی را در نظر بگیرد؛ استفاده از این تئوری به جای تئوری تیر اویلر برنولی می‌تواند دقت نتایج را افزایش دهد.

ب) استفاده از روش مقطع تبدیل یافته: در این روش آثار ورق تقویتی و میلگردها به صورت اصلاح گشتاور دوم سطح، اصلاح مدول خمشی و مساحت مقطع تیر در معادلات پایه وارد می‌شود. به طوریکه مقطع ترکیبی به صورت یک مقطع معادل با بتن فرض می‌شود. مدل‌سازی میلگردهای طولی و ورق

دورترین تار فشاری و سایر ویژگی‌های مادی و هندسی تیر مطابق جدول (۱) فرض شده است.

شکل ۶. فرکانس طبیعی بر حسب محل ترک در شرایط مرزی ساده-ساده

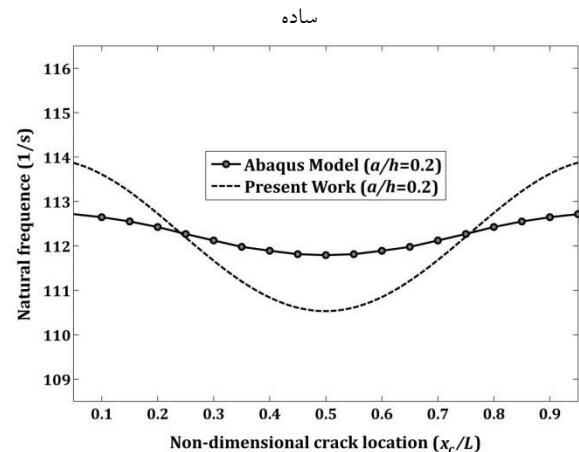


Fig. 6. The natural frequency in terms of the crack location in simply supported-simply supported boundary conditions

مقایسه تغییر فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی ساده-ساده نشان می‌دهد که با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا میانه‌ی تیر، میزان خطا ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بیشینه‌ی خطا در این حالت ۱/۰۸ درصد گزارش می‌شود.

نتایج فرکانس طبیعی تیر تقویت شده ترک‌دار با استفاده از دو روش المان محدود بهبود یافته و شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس، در شرایط مرزی گیردار-گیردار مطابق با شکل (۷) مقایسه می‌شود.

شکل ۷. فرکانس طبیعی بر حسب محل ترک در شرایط مرزی گیردار-گیردار

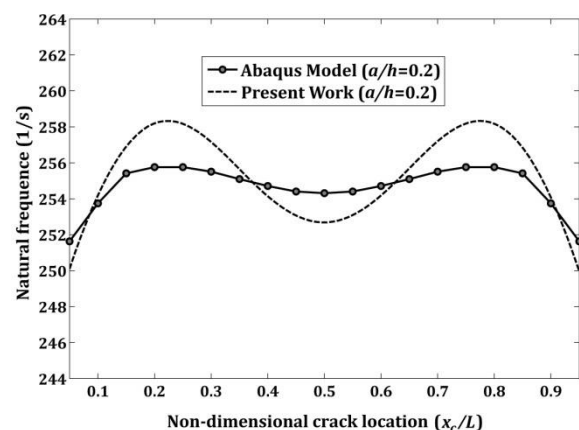


Fig. 7. The natural frequency in terms of the crack location in clamped-clamped boundary conditions

شرایط مرزی ساده-ساده مطابق با شکل (۹) ارائه می شود.

شکل ۹. تاثیر عمق و محل ترک بر فرکانس طبیعی در شرایط مرزی

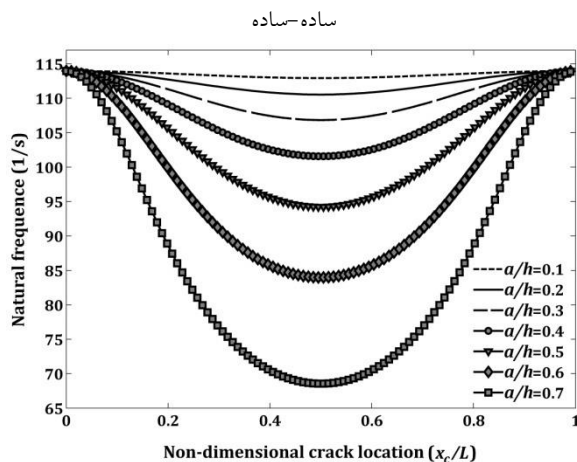


Fig. 9. Effects of different crack depths and locations on the natural frequency in simply supported-simply supported boundary conditions

نتایج شکل (۹) نشان می دهد که همواره کمترین میزان فرکانس طبیعی در مود اول، زمانی اتفاق می افتد که ترک در میانه ی تیر قرار گرفته باشد. در اینجا با تغییر محل ترک از میانه ی تیر به سمت تکیه گاه ها، فرکانس طبیعی تیر، به فرکانس طبیعی تیر کامل نزدیک می شود.

تغییرات فرکانس طبیعی تیر ترک دار تقویت شده در شرایط مرزی گیردار-گیردار مطابق شکل (۱۰) ارائه می شود.

شکل ۱۰. تاثیر عمق و محل ترک بر فرکانس طبیعی در شرایط مرزی

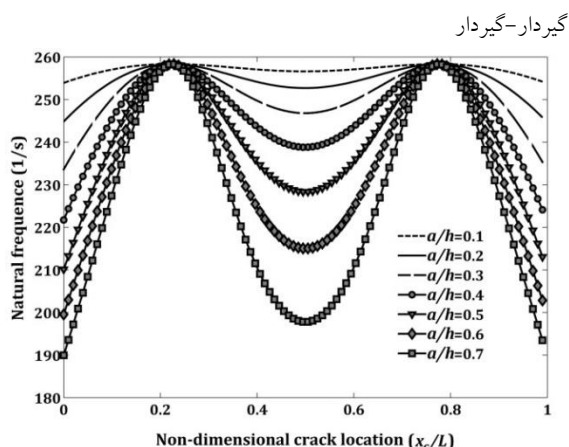


Fig. 10. Effects of different crack depths and locations on the natural frequency in clamped-clamped boundary condition

نمودار فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار نشان

کامپوزیتی با دو فنر خطی در محل ترک، می تواند خطای محاسبات را کاهش دهد.

ج) مدل سازی خطی ترک توسط فنر پیچشی: رفتار سازه های بتن آرمه ترک خورده، غیر خطی است. زمانی که ترک بیش از نیمی از ارتفاع تیر را در بر گیرد، آثار غیر خطی معادلات به شدت روی نتایج موثر است. استفاده از معادلات خطی برای توجیه رفتار غیر خطی تیر یکی دیگر از عوامل ایجاد خطا ارزیابی می شود.

د) تحلیل یک بعدی: از آنجا که نرم افزار آباکوس یک تحلیل دو بعدی از مسئله را ارائه می کند؛ استفاده از یک تحلیل یک بعدی و مقایسه ی آن با نتایج تحلیل دوبعدی از دیگر عوامل ایجاد اختلاف نتایج است.

۳-۵- بررسی آثار عمق و محل ترک روی فرکانس طبیعی

در اینجا، آثار تغییر شرایط مرزی، عمق و محل ترک روی مقادیر فرکانس طبیعی بررسی می شود. تاثیر افزایش عمق ترک، روی میزان سفتی فنر پیچشی و ممان اینرسی مقطع ترک خورده مطابق جدول (۲) ارائه می شود.

جدول ۲. مشخصات فنر پیچشی بر حسب عمق ترک

$\frac{a}{h}$	λ_M	k_{ds}	$I_c \text{ (m}^4\text{)}$	$\psi = \frac{EI_c}{k_{ds}}$
0	0	0	0.0025	0
0.1	5.30e-10	1.88e9	0.0020	0.0273
0.2	2.03e-9	4.91e8	0.0016	0.0843
0.3	4.70e-9	2.12e8	0.0013	0.1602
0.4	9.16e-9	1.09e8	0.0011	0.2678
0.5	1.68e-8	5.91e7	0.00105	0.4466
0.6	3.14e-8	3.17e7	0.001009	0.7938
0.7	6.70e-8	1.49e7	0.001000	1.6776

Table 2. Rotational spring characteristics in terms of crack depths

مطابق جدول (۲) مشاهده می شود؛ با افزایش عمق ترک اندازه سفتی فنر پیچشی و ممان اینرسی المان ترک خورده کاهش می یابد. نتایج تحلیل ارتعاشی تیر ترک دار تقویت شده، تحت

22 mm فرض می‌شود.

شکل ۱۲. تاثیر محل ترک و ضخامت ورق کامپوزیتی بر فرکانس طبیعی

در شرایط مرزی ساده-ساده

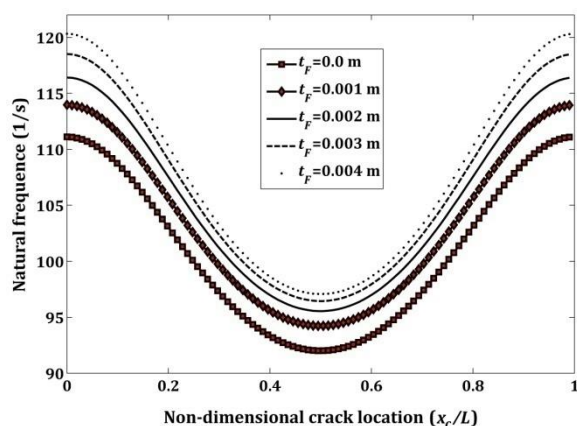


Fig. 12. Effects of different crack locations and thickness of reinforcement sheet on the natural frequency in simply supported-simply supported boundary conditions

نتایج این تحلیل نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق تقویتی، فرکانس طبیعی تیر افزایش پیدا می‌کند. این تغییرات زمانی که ترک در میانه‌ی تیر قرار دارد اثر کمتر روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر دارد. با تغییر محل ترک به سمت تکیه‌گاه، اثر ضخامت ورق روی نتایج افزایش پیدا می‌کند.

۵-۵- بررسی اثر قطر میلگردهای فولادی روی فرکانس طبیعی

در این بخش، اثر تغییر قطر میلگردهای فولادی روی نتایج فرکانس طبیعی تیر دارای ترک در چهار حالت مطابق شکل (۱۳) بررسی می‌شود. ضخامت ورق کامپوزیتی برابر با 0.001 m، فرض می‌شود.

شکل ۱۳. تاثیر محل ترک و قطر میلگردهای فولادی بر فرکانس طبیعی

در شرایط مرزی ساده-ساده

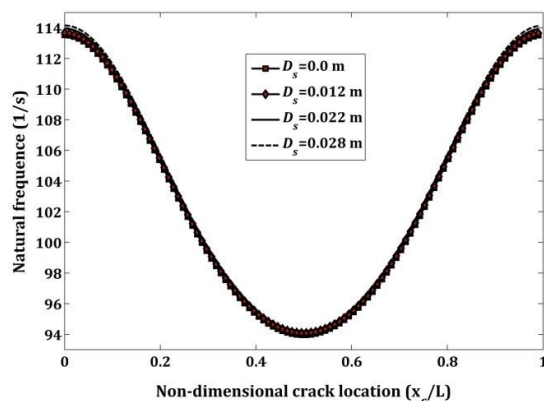


Fig. 13. Effects of different crack locations and diameter of steel bars on the natural frequency in simply supported-

می‌دهد که چنانچه ترک در مکان حدود ۰/۲ و ۰/۷ طول تیر قرار گیرد. می‌توان از آثار ترک روی فرکانس طبیعی چشم‌پوشی نمود. به عبارت دیگر، نتایج فرکانس تیر ترک دارای ترک در مکان‌های اشاره شده نزدیک به نتایج فرکانس تیر کامل است. تغییرات فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار تقویت شده تحت شرایط مرزی گیردار-آزاد مطابق شکل (۱۱) ارائه می‌شود.

شکل ۱۱. تاثیر عمق و محل ترک بر فرکانس طبیعی در شرایط مرزی

گیردار-آزاد

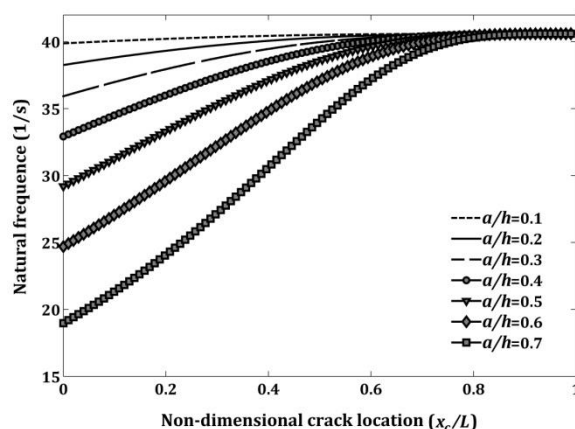


Fig. 11. Effects of different crack depths and locations on the natural frequency in clamped-free boundary condition

تغییرات فرکانس طبیعی در شرایط مرزی گیردار-آزاد نشان می‌دهد که با نزدیک شدن ترک به سمت تکیه‌گاه، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در عمق‌های مختلف ترک، چنانچه مکان ترک بزرگتر از ۰/۷ طول تیر و به طرف انتهای آزاد تیر باشد، نتایج فرکانس طبیعی تیر دارای ترک به پاسخ فرکانس تیر کامل نزدیک خواهد شد. نتایج نشان می‌دهد، در تمام شرایط مرزی مذکور، همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

۴-۵- بررسی اثر ضخامت ورق کامپوزیتی روی فرکانس طبیعی

در این بخش، آثار تغییر ضخامت ورق تقویتی روی پاسخ فرکانس طبیعی تیر دارای ترک در پنج وضعیت بحث؛ و تغییر فرکانس طبیعی با تغییر محل ترک و ضخامت ورق تقویتی مطابق شکل (۱۲) مقایسه و بررسی می‌شود. در اینجا، عمق ترک ثابت (۰/۵ ارتفاع تیر) و قطر میلگردهای فولادی برابر با

References

۷- مراجع

- [1] Krishnamoorthy C. & Panneerselvam S. A. 1978 FEPACSI-a finite element program for nonlinear analysis of reinforced concrete framed structures. *Journal of Computer and Structures*, 9(5), 451-461.
- [2] Zdenek P. B. & Byung H. 1984 Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, 71(3), 268-278.
- [3] Hu H. & William C. 1990 Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete. *ACI Structural Journal*, 87(2), 199-207.
- [4] Chandra, R. & Choprat I. 1993 Analytical-experimental investigation of free-vibration characteristics of rotating composite I-beams. *Journal of Aircraft*, 30(6), 927-934.
- [5] Massenzio M., Jacquelin E. & Ovigne P. A. 2005 Natural frequency evaluation of a cracked RC beam with or without composite strengthening for a damage assessment. *Journal of Materials and Structures*, 30(10), 865-873.
- [6] Hsu M. H. 2006 Concrete beams strengthened with externally bonded glass fiber reinforced plastic plates. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 9(3), 223-232.
- [7] Atlihan G., Callioglu H., Conkur E. S. & Topcu M. 2009 Free vibration analysis of the laminated composite beams by using DQM. *Journal of Reinforced Plastics and Composite*, 28(7), 1-12.
- [8] Baghiee N, Esfahani M. R. & Moslem K. 2009 Studies on damage and FRP strengthening of reinforced concrete beams by vibration monitoring. *Engineering Structures*, 31(4), 875-893
- [9] Kabir M. Z. & Shafei E. 2009 Analytical and numerical study of FRP retrofitted RC beams under low velocity impact. *Scientia Iranica*, 16(5), 415-428.
- [10] Lau D., Pamb H. J. 2010 Experimental study of hybrid FRP reinforced concrete beams. *Engineering Structures*, 32(12), 3857-3865.
- [11] Behera G. C., Rao T. D. G. & RAO C. B. K. 2014 Study of post-cracking torsional behaviour of high-strength reinforced concrete beams with a ferrocement wrap. *Slovak Journal of Civil Engineering*, 22(3), 1-12.
- [12] Chen D. & Liu F. 2014 Free vibration of a single-edge cracked RC beam strengthened with FRP. *Journal of Engineering Mechanics*. 140(6), 04014035-1-9.
- [13] Capozucca R. 2014 Vibration of CFRP cantilever beam with damage. *Composite Structures*, 116(1), 211-222.

simply supported boundary conditions

نتایج بررسی ها نشان می دهد که افزایش قطر میلگردهای فولادی در بازه ی بین 0-0.028 mm تاثیر چندانی روی افزایش فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه تقویت شده ایجاد نمی کند.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاشی تیر بتن آرمه ی ترک دار تقویت شده با ورق کامپوزیتی تحلیل و بررسی شده است. تحلیل انجام شده بر مبنای یک تکنیک ویژه در روش اجزای محدود پیاده سازی شده که در آن المان ترک دار به دو ریزالمان تقسیم و از مدل فنر پیچشی برای شبیه سازی ترک استفاده شده است. در این روش، ماتریس های سختی و جرم المان های بدون ترک و ترک دار، اصلاح شده و فرکانس های طبیعی تیر ترک دار تقویت شده، تعیین می شود. در این مطالعه ی اثر تغییر عمق و محل ترک، ضخامت ورق کامپوزیتی و قطر میلگردها روی فرکانس طبیعی تیر در سه شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن درستی آزمایی شده است. مقایسه و بررسی نتایج به دست آمده نشان می دهد:

- عوامل اصلی خطا در تحلیل حاضر عبارتند از: صرف نظر کردن از آثار برشی، استفاده از روش مقطع تبدیل یافته، مدل سازی خطی ترک توسط فنر پیچشی و تحلیل یک بعدی تیر با تئوری اوایلر-برنولی.
- در تمامی شرایط مرزی، با افزایش عمق ترک، میزان فرکانس طبیعی کاهش پیدا می کند. روند کاهش فرکانس طبیعی به صورت تابعی از عمق ترک قابل بیان است.
- افزایش ضخامت ورق کامپوزیتی موجب افزایش فرکانس طبیعی تیر دارای ترک می شود.
- افزایش قطر میلگردهای فولادی تاثیر چندانی روی فرکانس طبیعی تیر دارای ترک ندارد.
- بیشینه خطای ۱/۷۵ درصدی بین نتایج روش اجزای محدود بهبود یافته و آباکوس، دقت و کارایی روابط ارائه شده را تایید می نماید.

- [28] Yokoyama T. & Chen M. C. 1998 Vibration analysis of edge-cracked beams using a linespring model. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 59(3), 403-409.
- [29] Logan D. L. 2007 *A First Course in the Finite Element Method*. 4rd edn. Canada: Thomson.
- [14] Yasmeen S. A., Abhijit A. & Rao D. S. 2014 Modal analysis of fibre reinforced composite beams with a transverse crack using ansys. *International Journal of Modern Engineering Research (IJMER)*, 4(8), 8-14.
- [15] Fan Y. & Wang H. 2015 Nonlinear vibration of matrix cracked laminated beams containing carbon nanotube reinforced composite layers in thermal environments. *Composite Structures*, 124(1), 35-43.
- [16] Nguyen-Minh L. & Rovnak M. 2015 Size effect in uncracked and pre-cracked reinforced concrete beams shear-strengthened with composite jackets. *Composites Part B*, 78(1) 361-376.
- [17] Jadhav V. D., Bhoomkar M. M. 2016 Experimental and numerical fem analysis of cracked composite cantilever beam by vibration techniques. *International Journal of Engineering Science and Computing*, 6(4), 3347-4451.
- [18] Yang R., He X. & Dai L. 2016 Damage behaviour of concrete beams reinforced with GFRP bars. *Composite Structures*, 161(1), 173-186.
- [19] Khalate A. B. & Bhagwat V. B. 2016 Detection of cracks present in composite cantilever beam by vibration analysis technique. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*. 3(1), 400-4004.
- [20] Mustafa S. A. A. & Hilal H. 2017 Behavior of concrete beams reinforced with hybrid steel and FRP composites. *Housing and Building National Research Center Journal*, in press, x(x), xxx-xxx.
- [21] Baghi H., Barros J. A. O. & Rezazadeh M. Shear strengthening of damaged reinforced concrete beams with hybrid composite plates. *Composite Structures*, 178(1), 353-371.
- [22] Razzaghi J., Abadi M. Kh. & Alijani A. 2018 A new approach for modeling of crack in reinforced concrete beams using finite element method. *Concrete Research*. in press, (in Persian)
- [23] Alijani A., Mastan Abadi M., Darvizeh A. & Abadi, M. Kh. 2018 Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler-Bernoulli cracked beams. *Archive of Applied Mechanics*, 88(6), 875-895.
- [24] Irwin G. R. & Kies J. A. 1954 Critical energy rate analysis of fracture strength. *Journal of Welding*, 33(1), 193-198.
- [25] Irwin G. R. 1957 Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(1), 361-364.
- [26] Kienzler R. & Herrmann G. 1986 An elementary theory of defective beams. *Journal of Acta Mechanica*, 62(1), 37-46.
- [27] Kienzler R. & Herrmann G. 1986 On material forces in elementary beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 53(1), 561-564.

فهرست علائم

a	عمق ترک
A	مساحت مقطع تبدیل یافته
$A_{s(F)}$	مساحت سطح مقطع میلگردها (ورق تقویتی)
b	ضخامت تیر
$C_{L(R)}$	ماتریس اصلاح ریزالمان سمت چپ (راست)
d_F	فاصله محل ورق تقویتی تا بالاترین تار فشاری بتن
d_s	فاصله محل آرماتورها تا بالاترین تار فشاری بتن
E	مدول الاستیسته مقطع تبدیل یافته
$E_{c(s)}$	مدول الاستیسته بتن (فولاد)
E_F	مدول الاستیسته ورق تقویتی
$EI_{0(c)}$	مدول خمشی مقطع کامل (ترک دار) تیر تقویت شده
h	ارتفاع تیر
$I_{0(c)}$	گشتاور دوم سطح مقطع کامل (ترک دار) تیر تقویت شده
$k_{L(R)}$	ماتریس سختی ریزالمان سمت چپ (راست)
$k_{L(R)}^c$	ماتریس سختی اصلاح شده ریزالمان سمت چپ (راست)
k_{ds}	ضریب سختی فنر پیچشی
K_0	ماتریس سختی المان بدون ترک تیر بتن آرمه تقویت شده
K_c	ماتریس سختی المان ترک دار تیر بتن آرمه تقویت شده
K_t	ماتریس سختی کل تیر
K_{IM}	ضریب شدت تنش تحت خمش خالص
K_s	ماتریس سختی اصلاح شده فنر پیچشی
$L(l_e)$	طول تیر (طول المانها)
M	ممان خمشی
M_0	ماتریس جرم تقویت شده ی المان بدون ترک
M_c	ماتریس جرم تقویت شده ی المان ترک دار
$M_{L(R)}$	ماتریس جرم ریزالمان سمت چپ (راست)
$M_{L(R)}^c$	ماتریس جرم اصلاح شده ریزالمان سمت چپ (راست)
M_t	ماتریس جرم کل تیر
$n_{1(2)}$	نسبت ضریب الاستیسته فولاد (کامپوزیت) به بتن
N	توابع شکل
t_F	ضخامت ورق تقویتی
T	انرژی جنبشی
T_t^c	انرژی جنبشی ریزالمان دارای ترک
$T_{L(R)}$	انرژی جنبشی ریزالمان سمت چپ فنر (راست)

ω	فرکانس طبیعی	انرژی جنبشی اصلاح شده ریزالمان چپ (راست)	$T_{L(R)}^c$
		بردار جابجایی برحسب گره‌های اصلی	u
		بردار سرعت برحسب گره‌های اصلی	$\dot{u}$
		بردار جابجایی گره‌های ریزالمان سمت چپ (راست)	$u_{L(R)}$
		انرژی کرنشی	U
		انرژی کرنشی المان دارای ترک	U_c
		انرژی کرنشی المان سمت چپ (راست)	$U_{L(R)}$
		انرژی کرنشی فنر پیچشی	U_s
		جابجایی گره‌ها	w
		سرعت گره‌ها	$\dot{w}$
		سرعت گره سمت چپ (راست) فنر	$\dot{w}_{L(R)}$
		محل ترک در طول تیر	x_0
		محل فنر پیچشی در المان دارای ترک	x_c
		محل تار خنثی مقطع کامل (ترک‌دار) تیر تقویت شده	$\bar{y}_{0(c)}$
		ضریب نرمی فنر پیچشی	λ_M
		نسبت پواسون مقطع تبدیل یافته	ν
		چگالی مقطع تبدیل یافته	ρ
		شیب	ϕ

Crack modeling and vibration analysis of cracked reinforced concrete beams strengthened with composite sheets

J. Razzaghi¹, M. Kh. Abadi², A. Alijani^{3*}

1- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

2- Master of Science, Department of Civil Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

3- Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran

*alijani@iaubanz.ac.ir

Abstract:

In this paper, a numerical method is presented for crack modeling in the opening mode in which a vibration analysis for cracked reinforced concrete beams strengthened with composite sheets is carried out by using the fundamental relationships of fracture mechanics and finite element method. A one-dimensional beam is assumed to fulfill the finite element method in which two degrees of freedom (including the transverse displacement and the rotation) are considered at each node. The Hermitian shape functions are applied to interpolate the displacement field. The effects of composite sheets, steel bars and cracks are investigated in the analysis of the Euler-Bernoulli beam by correcting the second moment of inertia in cracked and uncracked sections. In this study, the cracked element is divided into two sub-elements. The continuity conditions are defined by equality of the transverse displacement, the moment and the shear force at the right- and left-hand sides of the crack point, while the rotation at there is different. The equations of the two sub-elements are connected together by continuity conditions in the point of the crack simulated by a rotational spring. The stiffness of this spring is regulated as a function of the stress intensity factor. This factor depends on the parameters such as the location of the reinforcement, the distance of the composite sheet from the center of the cross-section, the crack depth and loading conditions. This technique of the problem solution called as "Conversion Matrix" is implemented in the cracked element according to the expression of the displacement of the two nodes at the crack point in terms of the displacement of the basic nodes of the same element. The stiffness and mass matrices of the beam are enriched by inserting the effects of composite sheets, the steel reinforcement and the crack in the equations. These enriched matrices are used to implement the vibration analysis and the derivation of the natural frequency; for this purpose, an eigenvalue solution including the enriched stiffness and mass matrices is carried out to determine the natural frequency. In this research, the effects of the crack depth and location, boundary conditions, the composite sheet thickness and the cross-sectional area of steel bars on the response of the natural frequency of beam are discussed. The results show that if the crack depth increases, the value of the natural frequency decreases in which the natural frequency can be expressed in terms of a function of the crack depth. Also, increasing the thickness of the composite sheet results in increasing the natural frequency of the cracked reinforced concrete beams, while the effect of the diameter of the steel bar is negligible on the natural frequency. In this paper, three boundary conditions of simply supported-simply supported (SS-SS), clamped-clamped (C-C) and clamped-free (C-F) are applied in the extraction of results. In the C-C boundary conditions, if the crack is situated at $x_c/L = 1/2$ and $3/4$, the effect of the crack on the natural frequency can be ignored. The accuracy of the results is ensured by performing a full analysis in Abaqus software. The comparison of the results shows that the proposed method is appropriate for analyzing cracked reinforced concrete beams strengthened with composite sheets.

Keywords: Crack Modeling, Vibration Analysis, Reinforced Concrete Beams, Composite Sheets, Stress Intensity Factor