

مدل جسم صلب-فنر با فرضیات سینماتیکی مبتنی بر روش اجزای محدود برای تحلیل ارتجاعی محیط‌های پیوسته

محمد صفرنژاد زنده‌جان^۱، شریف شاه‌بیک^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استادیار مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

shahbeyk@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۱۳۹۴/۱۲/۲۰]

تاریخ دریافت: [۱۳۹۴/۹/۲۹]

چکیده- در این مقاله، یک روش جدید برای فرمول‌بندی سینماتیک مدل جسم صلب-فنر ارائه می‌شود. در این روش، هر سلول دارای دو درجه آزادی انتقالی واقع در هسته سلول است. برای محاسبه بردارهای کرنش در نقاط تماس میان سلول‌ها از مقادیر تانسور کرنش المان‌های مثلثی مطابق با سینماتیک روش اجزای محدود بهره گرفته شده است. نتایج حاصل از این روش با مدل تیر-جسم صلب-فنر و همچنین نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود. در پایان، مزایا و محدودیت‌های این روش نسبت به روش تیر-جسم صلب-فنر مورد بحث قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: مدل جسم صلب-فنر، رفتار ارتجاعی، روش اجزای محدود، روش اجزای مجزا

۱- مقدمه

مدل‌های جسم صلب-فنر، گونه‌ای از مدل‌های مبتنی بر المان‌های مجزا است که بیشتر با هدف شبیه‌سازی رفتار مواد شبه ترد توسعه یافته‌اند. در این مدل‌ها، محیط به مجموعه‌ای از المان‌های صلب مجزا افراز می‌شود که به کمک فنرهایی به یکدیگر متصل شده‌اند.

ایده اولیه مدل جسم صلب-فنر به وسیله‌ی کاوایی و کوندو [۱] با هدف معرفی یک ابزار محاسباتی ساده برای توصیف فیزیکی رفتار سازه‌ها در حالت حدی ارائه شد. در این مدل، عناصر سازه به صورت اجزایی (سلول‌هایی) صلب که به وسیله مجموعه‌ای از فنرها به یکدیگر متصل شده‌اند شبیه‌سازی می‌شوند. در بیشتر موارد این فنرها در بخش‌هایی از اعضا که امکان تسلیم‌شدن و یا گسیختگی در آن محل‌ها پیش‌بینی می‌شود، توزیع می‌شود.

این مدل به منظور تحلیل مسائل محیط پیوسته و به صورت

خاص در حالت کرنش صفحه‌ای به وسیله‌ی کاوایی و توی [۲] فرمول‌بندی شد. آن‌ها محیط را به مجموعه‌ای از المان‌های مثلثی صلب که به کمک دو فنر خطی و یک فنر چرخشی به یکدیگر متصل شده بودند، افراز کردند. این فنرها در مرکز ضلع مشترک المان‌های مجاور یکدیگر قرار داشتند. فنرهای خطی در دو جهت عمود و مماس بر ضلع مشترک، به ترتیب برای انتقال نیروی محوری و برشی تماس تعبیه شدند و سختی آن‌ها از روابط ارتجاعی و با چشم‌پوشی کردن از آثار حجمی بر رفتار فنر محوری به دست آمد.

توی و چه [۳] این مدل را برای شبیه‌سازی مواد کریستالی صفحه‌ای استفاده نمودند. به منظور انطباق هندسه المان‌ها (سلول‌های صلب) با ریزساختار ماده، در افراز محیط از شبکه‌بندی ورونویی^۱ استفاده کردند. در [۴] توی و کیوسو مدل

1 Voronoi tessellation

سال ۲۰۱۲ با توجه به برخی مشکلات موجود در فرمول‌بندی این مدل که در [۱۶] تشریح شده است، مونس و ماریوتی [۱۸] مدل اصلاح شده‌ای ارائه نمودند و نشان دادند که مدل جدید از دقت مناسبی برای حل مسائل الاستودینامیک برخوردار است.

در این مقاله، یک مدل جسم صلب-فنر با فرضیه‌های سینماتیکی جدید ارائه می‌شود. در مدل پیشنهادی، هر سلول تنها دارای درجات آزادی انتقالی است و میزان کرنش در محل فنرها با استفاده از درونیابی یک المان مثلثی اجزای محدود محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از مدل پیشنهادی با مدل ارائه شده به وسیله مونس و ماریوتی و پاسخ‌های دقیق ارتجاعی در نمونه‌های مختلف مقایسه خواهد شد. از این رو و به منظور معرفی اجزای اصلی مدل‌های جسم صلب-فنر، ابتدا مدل مونس و ماریوتی در بخش ۲ به صورت خلاصه تشریح می‌شود. بخش ۳ مقاله به معرفی مدل پیشنهادی می‌پردازد و نتایج مقایسه‌ای در بخش ۴ ارائه خواهد شد. در پایان و در بخش نتیجه‌گیری مزایا و محدودیت‌های روش جدید تشریح می‌شود.

۲- مدل تیر-جسم صلب-فنر

نسخه اولیه مدل تیر-جسم صلب-فنر در سال ۲۰۰۷ به وسیله ماریوتی با هدف شبیه‌سازی انتشار امواج لرزه‌ای در محیط‌های صفحه‌ای همگن با رفتار مادی همسانگرد و ارتجاعی خطی معرفی شد [۱۷]. با توجه به برخی نقایص در مدل اولیه، نسخه جدید این مدل در سال ۲۰۱۲ با هدف توسعه مدل به حالت سه بعدی و همچنین لحاظ نمودن سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ ارائه شد [۱۸]. همچنین در نسخه جدید، اصلاحاتی ضروری در چگونگی تعریف برخی از کمیت‌های سینماتیکی مدل صورت گرفت. در این بخش، پیکربندی هندسی و روابط سینماتیک و استاتیک مدل تیر-جسم صلب-فنر در حالت تنش صفحه‌ای و با فرض تغییرشکل‌های کوچک، که در این مقاله استفاده می‌شود، تشریح می‌شود.

اخیر را برای حل مسائل سه بعدی توسعه دادند.

تاکنون مدل جسم صلب-فنر با ساختار هندسی و رونیوی در شبیه‌سازی محیط‌های گوناگونی استفاده شده است. به عنوان نمونه می‌توان به پژوهش‌های وسیع بولندر و همکاران در شبیه‌سازی رفتار بتن و همچنین اعضای بتنی با استفاده از این رویکرد اشاره نمود. نمونه‌ای از این کارها در مراجع [۵-۱۰] آورده شده است. همچنین کوساتیس و همکاران [۱۱ و ۱۲] مدلی را تحت عنوان مدل شبکه-دانه مجزا برای شبیه‌سازی ریزساختار بتن پیشنهاد داده‌اند که ساختار پایه‌ای آن مشابه بیشتر مدل‌های جسم صلب-فنر است.

توانایی مدل جسم صلب-فنر با ساختار هندسی و رونیوی در شبیه‌سازی رفتار ارتجاعی درشت مقیاس و همچنین ریزمقیاس مطابق با مبانی تئوری ارتجاعی لزوم اصلی در به کارگیری این مدل است، موضوعی که در بسیاری از پژوهش‌های مرتبط مورد توجه کافی نبوده است. بر این اساس، روابط نیرو-جابه‌جایی فنرهای تماس باید به گونه‌ای تعریف شود که مدل حاصل قادر به اغنای این شرایط باشد. بولندر [۱۳] نشان داد که مدل‌های موجود قادر به ارائه همزمان پاسخ‌های ارتجاعی مطلوب در سطح درشت مقیاس و ریزمقیاس نیست و با تنظیم سختی فنرها، تنها پاسخ مطلوب در یکی از این مقیاس‌ها تضمین می‌شود. از این رو، او و همکاران راهکارهایی را برای حل این مشکل ارائه نمودند [۱۴ و ۱۵]، اما عدم توجه به اثر کرنش محصورکننده بر رفتار فنرهای محوری در پژوهش‌های ایشان، موجب شده است که هیچ یک از این راهکارها پاسخ کاملی برای این مشکل نباشند. مشابه این پدیده در مدل پیشرفته شبکه-دانه مجزای کوساتیس و همکاران که مبتنی بر فرضیه ریزصفحه است نیز مشاهده می‌شود. بحث کاملی در مورد دقت و مشکلات هر کدام از این روش‌ها در [۱۶] ارائه شده است.

ماریوتی در سال ۲۰۰۷ اولین بار کرنش محصورکننده را در فرمول‌بندی مدل تیر-جسم صلب-فنر خود در نظر گرفت [۱۷]. البته در این مدل، فنرهای چرخشی در نقطه تماس با تیرهای خمشی واقع بین مراکز دو سلول جایگزین شدند. در

در روابط بالا، $\mathbf{n}$ و $\mathbf{t}$ به ترتیب بردارهای یکه در جهات قائم و مماس بر سطح تماس و l فاصله بین دو هسته سلول است. A مساحت سطح تماس است که از حاصل ضرب طول ضلع تماس، b ، در ضخامت نمونه، t ، به دست می آید. همچنین، u_N و u_T به ترتیب مولفه های پرش جابه جایی^۳ نقطه تماس، $[\mathbf{u}_{CP}]$ ، در جهات قائم و مماس بر ضلع تماس است که به کمک روابط زیر از جابه جایی و چرخش دو سلول، u ، v و θ ، محاسبه می شوند.

$$u_N = \epsilon_N l = \mathbf{n}^T [\mathbf{u}_{CP}] \quad (۴)$$

$$u_T = \epsilon_T l = \mathbf{t}^T [\mathbf{u}_{CP}] \quad (۵)$$

$$[\mathbf{u}_{CP}] = \mathbf{u}_{CP}^{(2)} - \mathbf{u}_{CP}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad (۶)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & y_{CP} - y_1 & 1 & 0 & y_2 - y_{CP} \\ 0 & -1 & x_1 - x_{CP} & 0 & 1 & x_{CP} - x_2 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$\mathbf{q} = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2] \quad (۸)$$

سختی فنرهای قائم و برشی، k_N و k_T ، به صورت زیر تعریف می شوند.

$$k_N = \frac{EA}{l} \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)} \quad (۹)$$

$$k_T = \frac{EA}{l} \frac{1}{(1+v)} \quad (۱۰)$$

E و ν به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون ماده می باشند. کرنش حجمی در نقطه تماس، ϵ_V ، از میانگین کرنش های حجمی دو سلول، $\epsilon_V^{(1)}$ و $\epsilon_V^{(2)}$ ، محاسبه می شود، یعنی

$$\epsilon_V = \frac{1}{2} (\epsilon_V^{(1)} + \epsilon_V^{(2)}) \quad (۱۱)$$

کرنش حجمی هر سلول که به وسیله n سلول احاطه شده است به صورت زیر تعریف می شود.

$$\epsilon_V^{\text{cell}} = \frac{1}{2V^{\text{cell}}} \sum_{i=1}^n u_N^{(\text{cell},i)} A^{(\text{cell},i)} \quad (۱۲)$$

در این رابطه، V^{cell} ، حجم سلول است.

شکل (۱) شبکه بندی ورونویی و مثلث بندی دلونی.

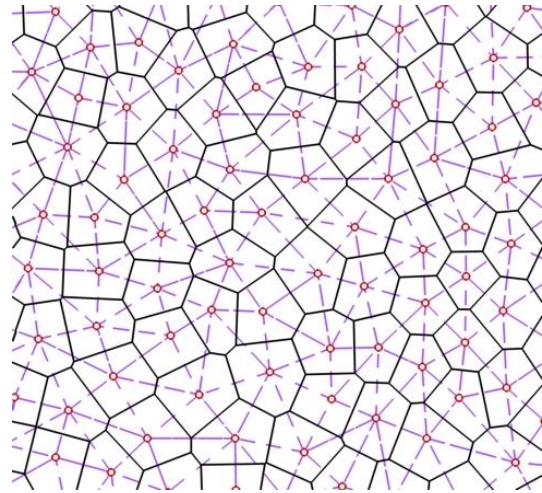


Fig 1. Voronoi tessellation and Delaunay triangulation.

در مدل تیر-جسم صلب-فنر، محیط نمونه به مجموعه ای از چندضلعی های محدب (سلول) افزای می شود. این سلول ها از شبکه بندی ورونویی روی مجموعه ای از نقاط (هسته سلول یا گره) که به صورت منظم و یا تصادفی در محیط پراکنده شده اند ایجاد می شوند. اضلاع این سلول ها، عمود منصف اضلاع المان های مثلثی حاصل از مثلث بندی دلونی^۱ روی همان مجموعه از نقاط است شکل (۱).

در حالت دوبعدی، هر سلول، که یک جسم صلب فرض می شود، دارای دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی چرخشی در هسته خود است. اندرکنش دو سلول مجاور از طریق دو فنر خطی واقع در مرکز ضلع مشترک دو سلول (نقطه تماس^۲) و یک المان تیر واقع بین هسته سلول ها تعریف می شود شکل (۲). فنرهای یاد شده در راستاهای عمود و مماس بر ضلع تماس قرار می گیرند و به ترتیب مولفه های محوری و برشی نیروی اندرکنش بین سلول ها را طبق روابط زیر مشخص می نمایند.

$$\mathbf{f} = f_N \mathbf{n} + f_T \mathbf{t} \quad (۱)$$

$$f_N = \sigma_N A = k_N \left[u_N + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_V l - u_N) \right] \quad (۲)$$

$$f_T = \sigma_T A = k_T u_T \quad (۳)$$

1 Delaunay triangulation

2 Contact point (CP)

3 Displacement jump

محوری و برشی، قرار داده می‌شود. رویکرد گفته شده در این مقاله استفاده شده است.

در حالت رفتار ارتجاعی خطی، تنها دو نقطه تماس در حالت دوبعدی نیاز است. با تقسیم نمودن ضلع تماس به دو بخش مساوی، این نقاط در فواصل $b/2\sqrt{3}$ از مرکز ضلع تماس قرار داده می‌شوند شکل (۳).

شکل (۳) گسسته‌سازی تماس در مدل تیر-جسم صلب-فنر.

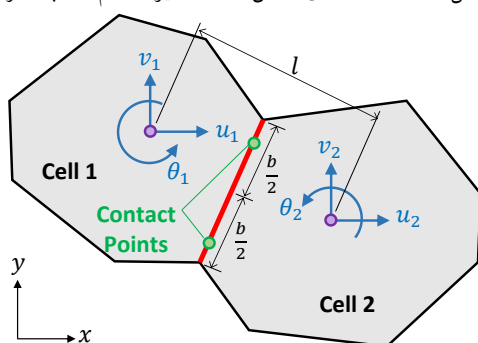


Fig 3. Discretization of contact in BRBSM.

۳- مدل پیشنهادی با فرضیه سینماتیکی مبتنی بر روش اجزای محدود

همان گونه در بخش قبل گفته شد، در مدل تیر-جسم صلب-فنر، مقادیر کرنش‌های محوری و برشی در نقاط تماس از پرش جابه‌جایی این نقاط، ناشی از حرکت نسبی سلول‌ها، به دست می‌آیند. این روش در بیشتر مدل‌های جسم صلب-فنر به کار گرفته شده است. به عنوان یک ایده جدید، می‌توان از درون-یابی‌های مرسوم در تعیین میدان کرنش و تنش در المان‌های اجزای محدود به صورت مستقیم استفاده نمود. از این رو در مدل پیشنهادی این مقاله، برای تعیین کرنش‌ها در هر نقطه تماس ابتدا تعیین می‌شود، که آن نقطه تماس در کدام یک از مثلث‌های ساختار دلونی قرار دارد. سپس تانسور کرنش در نقطه مورد نظر با استفاده از روابط درون‌یابی یک المان اجزای محدود سه گرهی کرنش ثابت تعیین شده و در نهایت کرنش‌های محوری، مماسی و محصورکننده در نقطه تماس از تصویر تانسور کرنش در راستاهای متناظر به دست می‌آید. شایان گفتن است سرعت پردازش فرمول‌بندی جدید مشابه با مقدار متناظر در فرمول‌بندی مدل مونس و ماریوتی است.

شکل (۲) اجزای مدل تیر-جسم صلب-فنر.

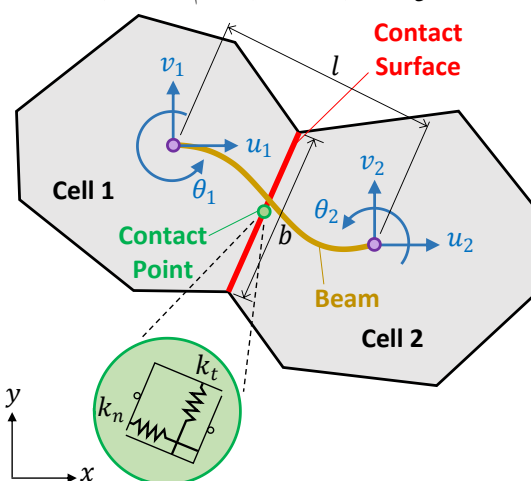


Fig 2. Beam-Rigid Body-Spring model (BRBSM).

در پایان، نیروهای گرهی هر سلول از تعادل نیروهای محوری و برشی سطوح تماس سلول با نیروهای گرهی آن محاسبه می‌شوند. همچنین، گشتاور اعمال شده روی یک سلول برابر مجموع گشتاور حاصل از نیروهای محوری و برشی در نقاط تماس حول هسته سلول و گشتاور خمشی تیرهای واقع بین هسته سلول با هسته سلول‌های مجاور، ناشی از چرخش نسبی سلول‌ها، است. در مورد آخر، این گشتاور برای هر المان تیر منتهی به سلول به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$M^{(cell,i)} = \frac{EI^{(cell,i)}}{l^{(cell,i)}} (\theta^{cell} - \theta^i) \quad (13)$$

در این رابطه، I گشتاور دوم سطح تماس حول محور عبوری از نقطه تماس است.

گفتنی است که فرض وجود تیر خمشی بین دو بخش مادی به جهت آن که منعکس کننده شاخصی از رفتار ماده در ریزمقیاس نیست، یک فرض غیر واقعی محسوب می‌شود. این فرض، به ویژه، کارایی مدل را در توسعه برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی مواد مانند شکست و خردشدگی با چالش جدی مواجه می‌نماید. رویکرد جایگزین، گسسته‌سازی سطح تماس به مجموعه‌ای از سطوح کوچک و استفاده از مجموعه نقاط تماس است. در این حالت، در هر نقطه تماس، دو فنر در راستاهای عمود بر سطح تماس و مماس بر آن، به ترتیب متناظر با رفتار

و یا درجات آزادی بیشتر بر دقت درونیابی کرنش و تنش در محل تماس دو سلول افزود. برای مثال می‌توان به ازای هر دو نقطه محاسباتی که بر روی پاره‌خط عمود بر ضلع مشترک بین دو مثلث دلونی، ضلع AC، قرار دارند (شکل ۴)، با ترکیب دو مثلث ABC و ACD و تشکیل یک المان چهار گرهی ABCD، با فرض آن که نقاط محاسباتی در داخل این المان واقع شده‌اند، تانسور کرنش در نقاط محاسباتی مورد نظر را با استفاده از روابط درونیابی یک المان اجزای محدود چهار گرهی با میدان کرنش خطی نیز محاسبه نمود. در راهکاری مشابه می‌توان با اضافه کردن درجات آزادی چرخشی در مثلث ABC، از درونیابی المان مثلثی با درجات آزادی چرخشی بهره گرفت.

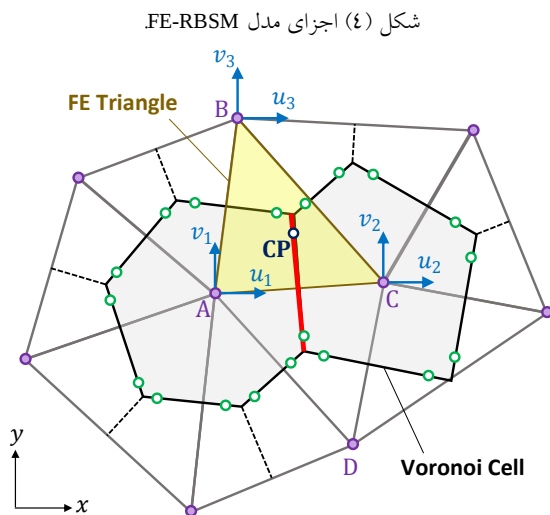


Fig 4. FE-Rigid Body-Spring model.

۴- مقایسه نتایج عددی

در این بخش به مقایسه عددی نتایج روش پیشنهادی (FE-RBSM) با نتایج مدل مونس و ماریوتی (RBSM) و نتایج تحلیلی در مسائل تنش صفحه‌ای پرداخته می‌شود. برای این منظور از دو دسته نمونه با میدان‌های تنش ثابت و متغیر استفاده شده است. برای حالت میدان تنش ثابت، یک نمونه مربعی با اندازه ضلع ۱۰۰ میلی‌متر، که با سلول‌هایی با بعد متوسط ۵ میلی‌متر شبکه‌بندی شده، به کار رفته است (نمونه ۱، شکل ۵). این نمونه تحت دو نوع بارگذاری تک محوری کششی و برشی خالص قرار داده شده است.

شکل (۴)، دو سلول ورونوی مجاور و همچنین مثلث‌های دلونی شامل گره‌های دو سلول را نشان می‌دهد. هر سلول دارای دو درجه آزادی انتقالی در هسته خود می‌باشد. در مختصات عمومی، تانسور کرنش یک المان سه گرهی کرنش ثابت از مقادیر جابه‌جایی گرهی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\epsilon = B\bar{u} \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\det J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (16)$$

$$\epsilon = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}] \quad (17)$$

$$\bar{u} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3] \quad (18)$$

x_i و y_i مختصات گره‌های المان مثلثی است. حال کرنش‌های محوری، مماسی و محصورکننده در نقطه تماس از تصویر تانسور کرنش طبق روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\epsilon_N = \epsilon_{xx}n_1^2 + \epsilon_{yy}n_2^2 + 2\epsilon_{xy}n_1n_2 \quad (19)$$

$$\epsilon_L = \epsilon_{xx}n_2^2 + \epsilon_{yy}n_1^2 - 2\epsilon_{xy}n_1n_2 \quad (20)$$

$$\epsilon_T = (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx})n_1n_2 + \epsilon_{xy}(n_1^2 - n_2^2) \quad (21)$$

با توجه به این که در بخش بعد نمونه‌های عددی برای حالت تنش صفحه‌ای تحلیل شده‌اند، تنش‌های محوری و برشی در نقطه تماس با استفاده از قانون هوک عبارتند از

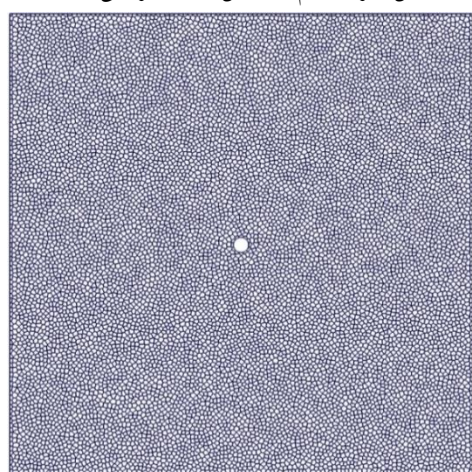
$$\sigma_N = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_N + \nu\epsilon_L) \quad (22)$$

$$\sigma_T = E\epsilon_T \quad (23)$$

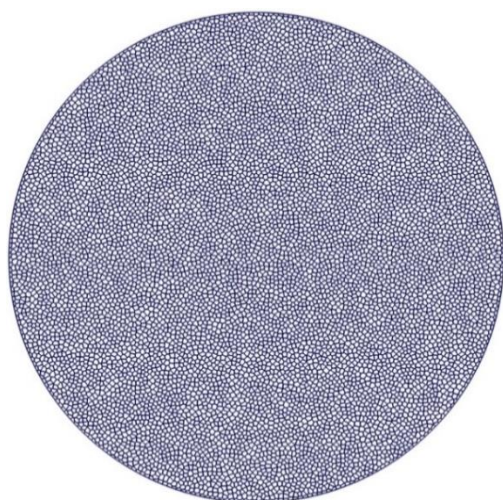
نیروهای محوری و برشی در نقاط تماس به ترتیب از حاصل ضرب تنش‌های محوری و برشی در مساحت متناظر با نقطه تماس به دست می‌آیند. در نهایت، نیروهای گرهی هر سلول (نیروهای گرهی المان‌های مثلثی) به کمک رابطه تعادل از نیروهای تماس موجود در نقاط تماس سلول محاسبه می‌شوند. لازم به گفتن است ایده معرفی شده در بالا در حقیقت تنها یک نمونه از تلفیق درونیابی‌های اجزای محدود و روش جسم صلب-فنر است و می‌توان با اضافه کردن مشارکت نقاط بیشتر

شکل (۷) دواير موهر تنش در نقاط تماس در بارگذاری‌های تک محوری کششی و برش خالص بر روی نمونه ۱ را نشان می‌دهند. جداول (۱ و ۲) نیز مقادیر آماری پاسخ‌های دو مدل را به ترتیب در تحلیل‌های تک محوری کششی و برش خالص ارائه می‌نمایند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، هر دو مدل قادر به ارائه مقادیر تنش در ریزمقیاس با دقت قابل قبولی است. با این حال، پراکندگی نتایج در مدل پیشنهادی (FE-RBSM) کمتر است.

شکل (۶) الف: نمونه مربعی سوراخ‌دار مورد استفاده در بارگذاری‌های تک محوری و دو محوری و ب: نمونه دایره‌ای مورد استفاده در بارگذاری کشش غیر مستقیم (آزمایش شکاف برزيلي).



الف



ب

Fig 6. (a) The square sample with a centric circular hole used in uniaxial and equal biaxial loadings and (b) the circular sample used in indirect tension (Brazilian splitting test).

شکل (۵) نمونه مربعی مورد استفاده در بارگذاری‌های تک محوری کششی و برشی خالص.

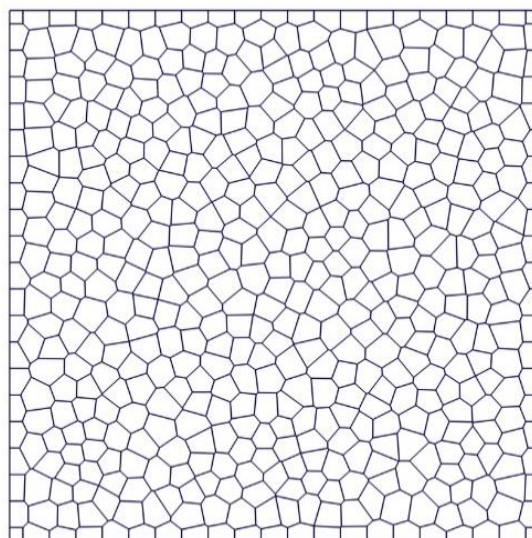


Fig 5. Square sample used in uniaxial tension and pure shear loadings.

برای حالت میدان تنش متغیر، یک نمونه مربعی دارای سوراخ مرکزی دایره‌ای (نمونه ۲، شکل ۶الف) و یک نمونه دایره‌ای با قطر ۳۰۰ میلی‌متر (نمونه ۳، شکل ۶ب) استفاده شده است. در نمونه اول اندازه ضلع مربع ۳۰۰ میلی‌متر و قطر سوراخ ۱۰ میلی‌متر فرض شده و نمونه تحت دو بارگذاری کششی تک محوری و دو محوری قرار گرفته است. نمونه دوم نیز تحت تحلیل کشش غیر مستقیم (آزمایش شکاف برزيلي) بررسی شده است. هر دو نمونه به وسیله سلول‌هایی با بعد متوسط ۳ میلی‌متر شبکه‌بندی شده‌اند.

قابل گفتن است در کلیه تحلیل‌های صورت گرفته از مدول یانگ $E_0 = 30 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu_0 = 0.2$ استفاده شده است.

بارگذاری‌ها به صورت جابه‌جایی-کنترل صورت گرفته است. در ارائه نتایج در نمونه‌های ۱ و ۲، مقادیر تنش در نقاط تماس به وسیله مقدار تنش متوسط درشت مقیاس در سطح بارگذاری، $\sigma_0 = R/A$ ، یک‌ه شده است. R واکنش تکیه‌گاهی در مرز بارگذاری شده و A نیز مساحت سطح یاد شده می‌باشد. به صورت مشابه، در نمونه ۳، مقادیر تنش به وسیله تنش $\sigma_0 = 2R/\pi Dt$ یک‌ه شده است. D و t به ترتیب قطر نمونه دایره‌ای و ضخامت نمونه، که برابر واحد فرض می‌شود، است.

جدول (۱) مقایسه آماری پاسخ‌های دو مدل در تحلیل کشش تک محوری.

Variable	v/v_0		σ_{xy}/σ_0		σ_{yy}/σ_0		σ_{xx}/σ_0	
Model	FE-RBSM	RBSM	FE-RBSM	RBSM	FE-RBSM	RBSM	FE-RBSM	RBSM
Average	0.999208	0.994955	0.000000	-0.000419	0.999948	0.999997	0.000165	0.001552
Standard Deviation	0.000329	0.187267	0.000038	0.016681	0.001287	0.038837	0.000069	0.038956
Maximum Value	1.000030	2.034970	0.000137	0.086140	1.003062	1.174648	0.000469	0.178039
Minimum Value	0.997755	0.149745	-0.000101	-0.065584	0.998402	0.845241	-0.000006	-0.215567

Table 1. Mohr's stress circle of two models in uniaxial tension analysis.

جدول (۲) مقایسه آماری پاسخ‌های دو مدل در تحلیل برش خالص.

Variable	σ_{xy}/σ_0		σ_{yy}/σ_0		σ_{xx}/σ_0	
Model	FE-RBSM	RBSM	FE-RBSM	RBSM	FE-RBSM	RBSM
Average	0.000001	0.000896	-0.999915	-1.000228	0.999929	0.997809
Standard Deviation	0.000025	0.033392	0.001556	0.077255	0.001556	0.077838
Maximum Value	0.000170	0.128849	-0.997448	-0.687405	1.003824	1.432923
Minimum Value	-0.000147	-0.173639	-1.003769	-1.343613	0.997461	0.646314

Table 2. Statistical comparison of two models in pure shear analysis.

شکل (۷) دایره موهر تنش در تحلیل‌های الف: تک محوری کششی و ب: برش خالص.

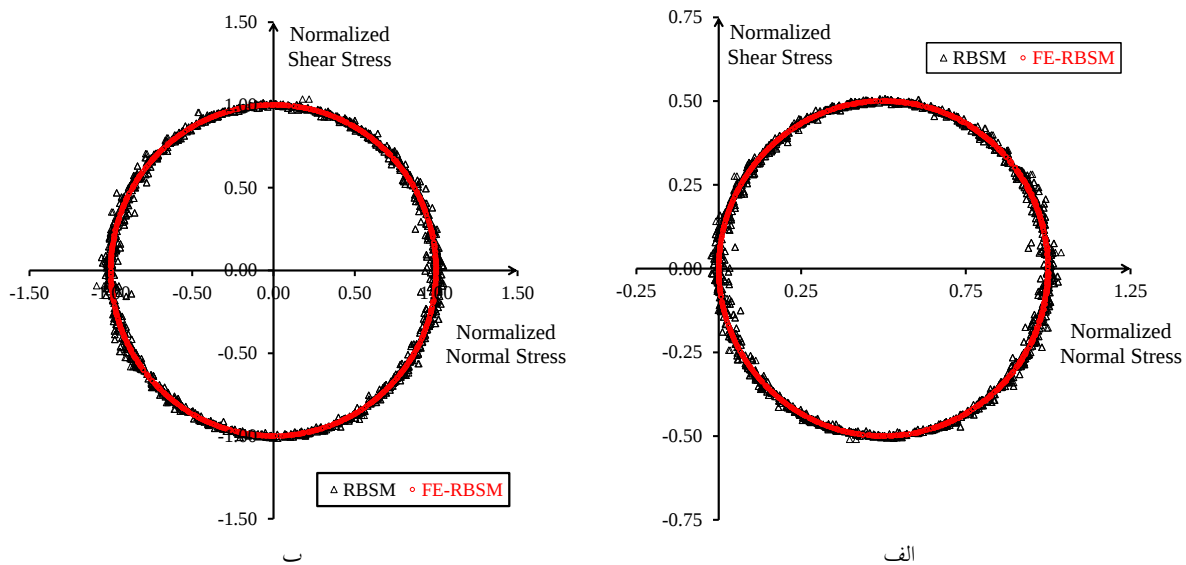


Fig 7. Stress Mohr circle for (a) uniaxial tension and (b) pure shear.

است، می‌باشند. r_0 شعاع سوراخ است.

در شکل (۹) مقدار تنش حاصل از دو مدل در نقاط تماس که در فاصله کمتر از ۲ میلی‌متر از سوراخ قرار دارند با مقدار حاصل از تئوری ارتجاعی مقایسه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود مدل RBSM تغییرات شدید تنش در این ناحیه را با دقت بیشتری پیش‌بینی می‌نماید.

شکل (۸) مقادیر تنش σ_{yy} و σ_{xx} را در نقاط تماس نمونه مربعی سوراخدار در بارگذاری کششی دو محوری نشان می‌دهد. به منظور وضوح در بیان نتایج، مقادیر تنش تنها در مقطع $x = 0$ نشان داده شده است (در تمامی نمونه‌ها، مرکز مختصات بر مرکز نمونه منطبق است). مطابق شکل، هر دو مدل قادر به بیان توزیع تنش با دقت قابل قبول در فاصله $r > 4r_0$ از سوراخ، که در آن نقاط میدان تنش تقریباً یکنواخت

شکل (۸) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یک‌ه شده در مقطع $x = 0$ در تحلیل کشش دو محوری.

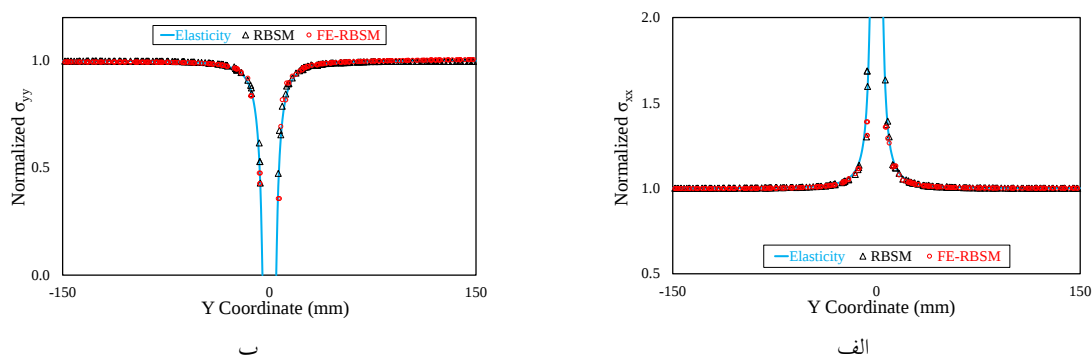


Fig 8. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} in $x = 0$ for equal biaxial tension.

شکل (۹) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یک‌ه شده در نقاط تماس نزدیک سوراخ در تحلیل کشش دو محوری.

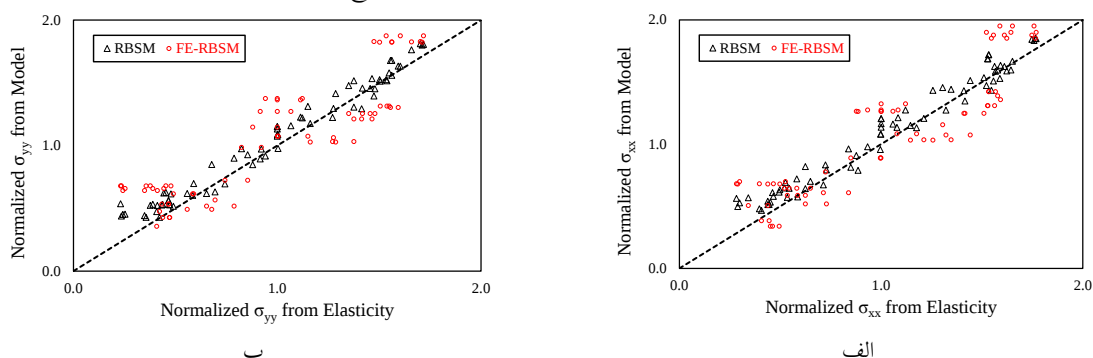


Fig 9. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} of CPs near the hole for equal biaxial tension.

شکل (۱۰) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یک‌ه شده در مقطع $x = 0$ در تحلیل کشش تک محوری.

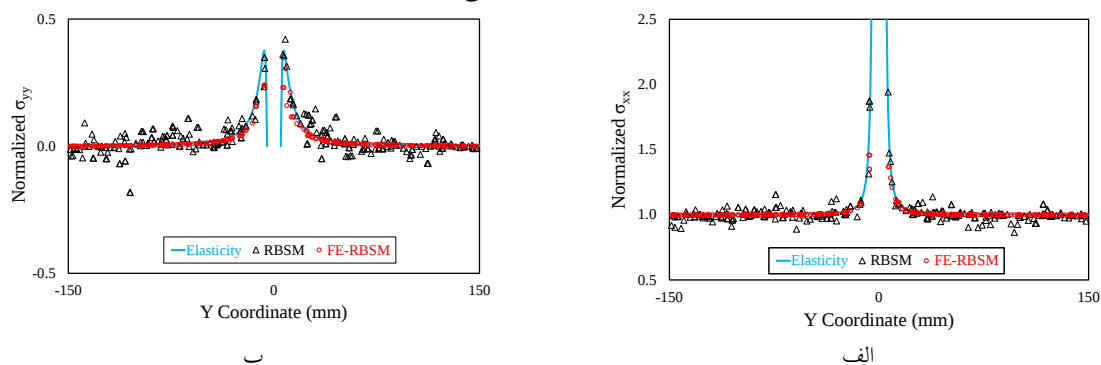


Fig 10. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} in $x = 0$ for uniaxial tension.

شکل (۱۱) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یک‌ه شده در مقطع $x = 75\text{mm}$ در تحلیل کشش تک محوری.

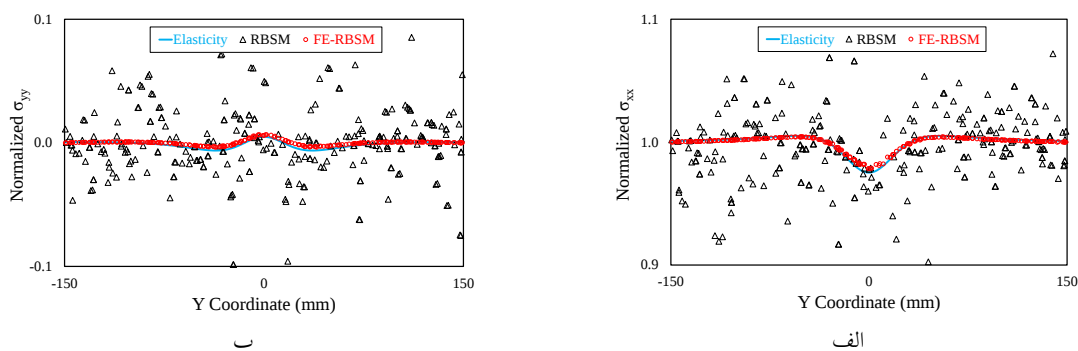


Fig 11. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} in $x = 75\text{mm}$ for uniaxial tension.

شکل (۱۲) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یکه شده در نقاط تماس نزدیک سوراخ در تحلیل کشش تک محوری.

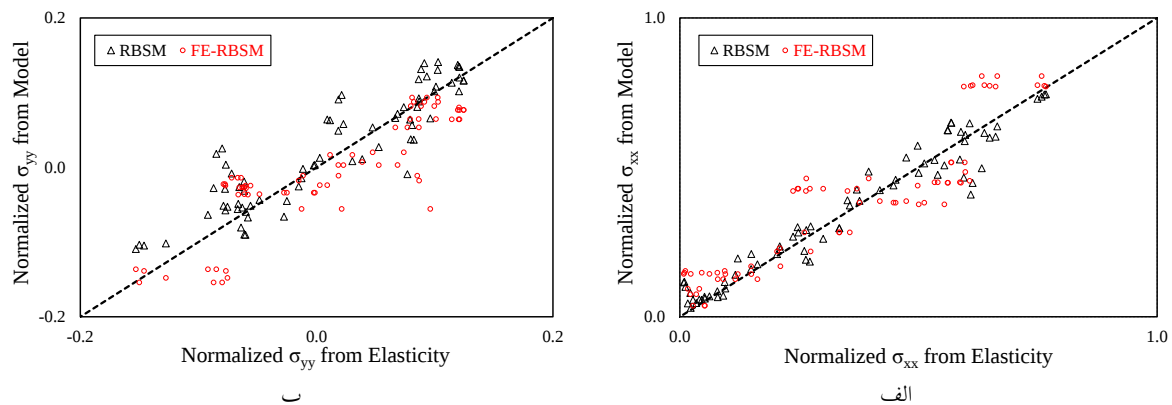


Fig 12. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} of CPs near the hole for uniaxial tension.

نسبت به پاسخ دقیق آشکار است. از طرفی در مدل RBSM، به دلیل وجود درجه آزادی چرخشی، توزیع تنش در حالت کلی با پراکندگی همراه می‌باشد و این پراکندگی در برخی موارد بسیار محسوس است.

از سوی دیگر، در بخش‌هایی از نمونه که گرادیان شدید تنش وجود دارد، به دلیل وجود درجه آزادی چرخشی، مدل RBSM قادر به بیان بهتر مقادیر تنش در این نواحی است.

شکل‌های (۱۳) و (۱۴) مقادیر تنش σ_{xx} و σ_{yy} را در نقاط تماس نمونه دایروی در بارگذاری کشش غیر مستقیم نشان می‌دهد. به منظور وضوح در بیان نتایج، مقادیر تنش تنها در مقاطع $y = 0$ و $y = 75\text{mm}$ نشان داده شده‌اند.

همان‌گونه که در این شکل‌ها نیز مشخص است، تنش‌ها در مدل FE-RBSM پراکندگی کمتری نسبت به مدل RBSM دارند.

شکل‌های (۱۰ و ۱۱) مقادیر تنش σ_{xx} و σ_{yy} را در نقاط تماس نمونه مربعی سوراخدار در بارگذاری کشش تک محوری به ترتیب در مقاطع $x = 0$ و $x = 75\text{mm}$ نشان می‌دهند. مطابق شکل‌ها و مشابه نمونه پیشین، پراکندگی نتایج در مدل FE-RBSM بسیار کمتر از مدل RBSM می‌باشد.

در شکل (۱۲) مقدار تنش حاصل از دو مدل در فاصله کمتر از ۲ میلی‌متر از سوراخ با مقدار حاصل از تئوری ارتجاعی مقایسه شده است. مطابق شکل و مشابه نمونه پیشین، خطای مدل RBSM در این ناحیه کمتر است.

مطابق نتایج حاصل از تحلیل‌ها، مدل FE-RBSM در نمونه‌های با میدان تنش یکنواخت و همچنین بخش‌هایی از نمونه‌های با میدان تنش متغیر که گرادیان تنش در آن جا هموار است، توانایی بهتری در تخمین توزیع تنش در این نواحی دارد. این امر از پراکندگی اندک تنش‌های به دست آمده از این مدل

شکل (۱۳) الف: تنش σ_{xx} و ب: تنش σ_{yy} یکه شده در مقطع $y = 0$ در تحلیل کشش غیر مستقیم.

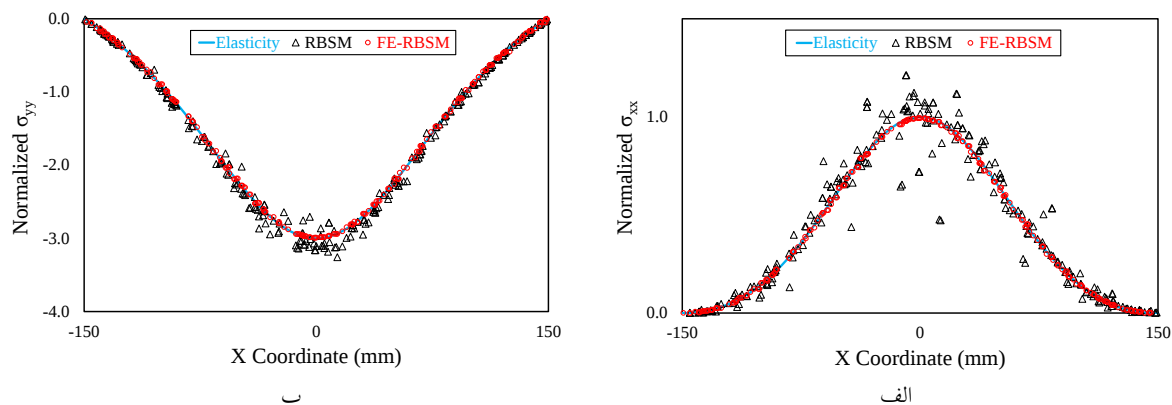


Fig 13. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} in $y = 0$ for indirect tension.

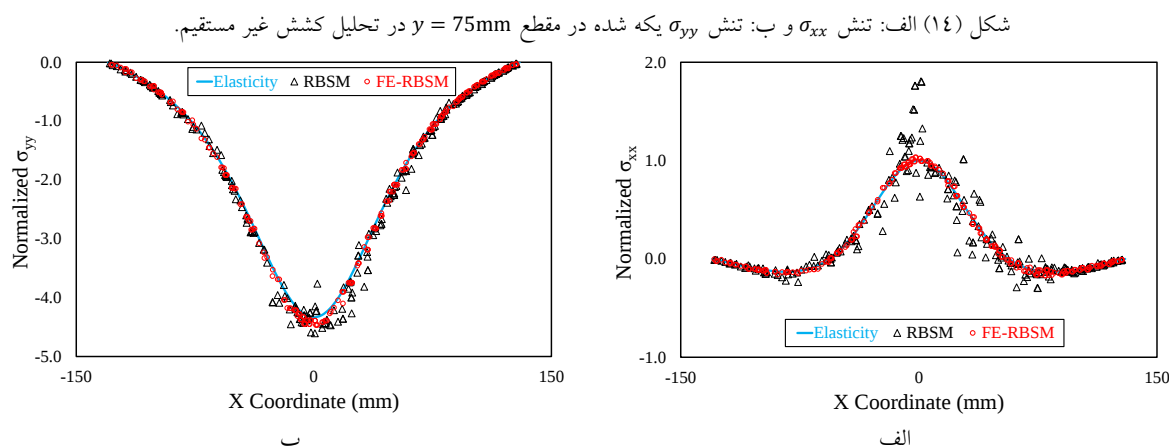


Fig 14. (a) Normalized σ_{xx} and (b) normalized σ_{yy} in $y = 75\text{mm}$ for indirect tension.

Kenkyu, **28**(9), 409-412.

[2] Kawai T. & Toi Y. 1977 A new element in discrete analysis of plane strain problems. *Seisan Kenkyu*, **29**(4), 204-207.

[3] Toi Y. & Che J.S. 1994 Computational damage mechanics models for brittle microcracking solids based on mesoscopic simulations. *Engineering Fracture Mechanics*, **48**(4), 483-498.

[4] Toi Y. & Kiyosue T. 1995 Damage mechanics models for brittle microcracking solids based on three-dimensional mesoscopic simulations. *Engineering Fracture Mechanics*, **50**(1), 11-27.

[5] Bolander J. E. & Saito S. 1998 Fracture analyses using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, **61**(5-6), 561-591.

[6] Bolander J. E., Hong G. S. & Yoshitake K. 2000 Structural concrete analysis using rigid body spring networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, **15**(2), 120-133.

[7] Bolander J. E. & Berton S. 2004 Simulation of shrinkage induced cracking in cement composite overlays. *Cement & Concrete Composites*, **26**(7), 861-871.

[8] Bolander J. E. & Sukumar N. 2005 Irregular lattice model for quasistatic crack propagation. *Physical Review B*, **71**(9), 1-12.

[9] Asahina D., Landis E. N. & Bolander J. E. 2011 Modeling of phase interfaces during pre-critical crack growth in concrete. *Cement & Concrete Composites*, **33**(9), 966-977.

[10] Kang J., Kim K., Lim Y. M. & Bolander J. E. 2014 Modeling of fiber-reinforced cement composites: Discrete representation of fiber pullout. *International Journal of Solids and Structures*, **51**(10), 1970-1979.

[11] Cusatis G., Pelessone D. & Mencarelli A. 2011

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش جدید برای محاسبه متغیرهای سینماتیک روش جسم صلب-فنر ارائه شد. در این روش، از فرضیه‌های سینماتیک مبتنی بر روش اجزای محدود بهره گرفته شد. به این منظور، از مثلث‌بندی دلونی روی هسته سلول‌های ورونوئی استفاده شد. در مدل جدید، هر سلول تنها دارای دو درجه آزادی انتقالی در صفحه است. مقادیر کرنش در نقاط تماس بین سلول‌ها از تانسور کرنش ثابت المان‌های مثلثی سه گرهی شامل نقطه تماس محاسبه شد. نتایج تحلیل روی نمونه‌های با میدان‌های تنش ثابت و متغیر نشان داد که مدل جدید قادر به پیش‌بینی بهتر میدان تنش در بخش‌های با گرادیان تنش هموار نسبت به مدل تیر-جسم صلب-فنر است. وانگهی، در نواحی دارای گرادیان شدید تنش، مدل تیر-جسم صلب-فنر از توانایی بیشتری در ارائه میدان تنش در این نواحی برخوردار است هرچند در این نواحی نیز به واسطه وجود درجه آزادی چرخشی برای هر سلول، پاسخ‌ها نسبت به جواب دقیق (تئوری ارتجاعی) دارای پراکندگی است. نکته پایانی آن که عدم وجود درجه آزادی چرخشی در مدل پیشنهادی از یک سو موجب کاهش حجم محاسبات می‌شود اما از سوی دیگر کاربرد مدل جدید را محدود به تغییر مکان‌های کوچک می‌نماید.

References

[1] Kawai T. & Kondou K. 1976 New beam and plate bending elements in finite element analysis. *Seisan*

مراجع

- [15] Asahina D., Ito K., Houseworth J. E., Birkholzer J. T. & Bolander J. E. 2015 Simulating the Poisson effect in lattice models of elastic continua. *Computers and Geotechnics*, **70**, 60-67.
- [16] Safarnejad M., 2016 *A Felexible Cell Model for the Mesoscopic Simulation of Heterogeneous Materials*. PhD thesis, Structural Engineering Group, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran (In Persian).
- [17] Mariotti C. 2007 Lamb's problem with the lattice model Mka3D. *Geophysical Journal International*, **171**(2), 857-864.
- [18] Mariotti C. & Monasse L. 2012 An energy-preserving Discrete Element Method for elastodynamics; ESAIM: *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **46**(6), 1527-1553.
- Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete I: Theory. *Cement & Concrete Composites*, **33**(9), 881-890.
- [12] Cusatis G., Mencarelli A., Pelessone D. & Baylot J. 2011 Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete II: Calibration and validation. *Cement & Concrete Composites*, **33**(9), 891-905.
- [13] Bolander J. E., Yoshitake K. & Thomure J. 1999 Stress analysis using elastically homogeneous rigid-body-spring networks. *JSCE Journal of Structural Engineering*, **16**(2), 125-132.
- [14] Bolander J. E., Yip M., Moriizumi K. & Kunieda M. 2001 Rigid-Body-Spring Network modeling of cement-based composites. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, de Borst et al (eds); Swets & Zeitlinger, Lisse, 773-780.

A Rigid Body-Spring Model with FE-Based Kinematic Assumptions for the Elastic Analysis of Continua

M. Safarnejad¹, S. Shahbeyk^{2*}

1- PhD Student of Structural Engineering, Faculty of Civil and Environmental Eng., Tarbiat Modares University

2- Assistant Prof., Structural Eng. Dept., Faculty of Civil and Environmental Eng., Tarbiat Modares University

shahbeyk@modares.ac.ir

Abstract:

Rigid Body-Spring Models (RBSMs) are a kind of discrete models which are developed mainly for the simulation of quasi-brittle materials ranging from ceramic, concrete, and masonry, to rock and soil. In this approach, material domain is discretized to a set of rigid cells interconnected through a set of translational and rotational springs located at cell interfaces. These cells are constructed over a set of points (seeds) distributed regularly or randomly over the domain. When it comes to heterogeneous materials, the seeds may be located in accord to the geometry and distribution of inclusions. For two-dimensional problems, each rigid cell has normally two translational and one rotational degrees of freedom (DOFs). The springs may be distributed along the interface or lumped at a point called contact/computational point (CP) and activated by the relative movement of connecting cells. As a fundamental issues, before being applicable for the simulation of inelastic behavior of materials, the kinematics of an RBSM and also the force-displacement relations of its springs should be defined in such a way that the model can adequately predict the elastic behavior of continuum at both macro and micro scales. Our review of the literature shows that except one of the RBSMs, used in the current paper for comparison, others suffer from some shortcomings which result in their inaccurate elastic predictions. In the aforementioned model, cells are convex polygons generated by the Voronoi diagram of seeds (cell nucleus) and the spring set of an interface is comprised of two translational (normal and tangential) and one rotational springs located at the midpoint of the interface. Our study shows that, although this RBSM presents generally a reliable predictions, however, there exists some kind of scattering in the predicted micro strain and stress distributions. Accordingly, with the aim of eliminating the observed scatters, this paper borrows the interpolation functions of the conventional finite element method and presents a new kinematic formulation for the RBSM. In the new model, called FE-RBSM, a Delaunay tessellation is constructed over cell nuclei. This results in a network of triangular elements which can be considered as 3-node constant strain triangular finite elements. Two translational DOFs at each nucleus and two CPs per interface with normal and tangential springs are assumed. Next the triangles including the CPs are determined. Finally, the normal, tangential, and lateral strains of each CP are calculated by projecting the constant strain tensor of the associated triangle on the corresponding interface. In order to examine the efficiency and accuracy of the proposed FE-RBSM formulation, two kinds of numerical analyses including constant and variable stress fields are employed. For the case of constant stress field, a 100mm square sample is analyzed in uniaxial tension and pure shear. Besides, for the case of variable stress field, a 300mm square sample including a 10mm diameter hole at its centroid is analyzed in uniaxial and biaxial tension. Also, a 300mm diameter circle sample is analyzed under splitting compression. The results are compared with those of the selected RBSM and also the analytical solutions. They show that, compared to the RBSM, the FE-RBSM can better predict the macro elastic properties and gives scatter-free microstress fields.

Keywords: Rigid Body-Spring Model, Elastic Behavior, Finite Element Method, Discrete Element Method.