

بهبود شبکه نقاط کنترل در تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌های متقارن محوری با استفاده از روش‌های تخمین خطا مبتنی بر بازیافت تنش

ابوذر میرزاخانی^۱، بهروز حسنی^{۲*}، کارن خانلری^۳ و احمد گنجعلی^۴

۱- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشگاه آزاد اسلامی

۲- استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۳- استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی

۴- استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی

b_hassani@um.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۱۳۹۳/۴/۱۵]

تاریخ دریافت: [۱۳۹۳/۱/۱۶]

چکیده- روش ابداعی این پژوهش، با استفاده از برآورد خطای مبتنی بر بازیافت تنش، به حل تطبیقی و بهبود شبکه مسائل متقارن محوری در تحلیل ایزوژئومتریک می‌پردازد. بدین منظور، بعد از محاسبه نرم خطای انرژی، مقادیر تخمینی خطا در مجاورت نقاط کنترلی به عنوان گرادین حرارتی به المان‌های رابط بین این نقاط اختصاص می‌یابد. پس از تحلیل شبکه المان‌های فرضی که دچار تغییر دما شده‌اند آرایش جدیدی از نقاط کنترلی و بردارهای گرهی حاصل می‌شود؛ که انتظار می‌رود به‌کارگیری این روند در چند سیکل در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری منجر به توزیع بهتر خطا در دامنه و در نتیجه حصول شبکه‌ای بهینه برای محاسبه انتگرال‌ها شود. برای بررسی کارایی و نشان دادن افزایش دقت در نتایج تحلیل مسائل متقارن محوری به مدل‌سازی عددی دو مسئله الاستیسیته با شرایط تقارن محوری، که دارای حل تحلیلی هستند، پرداخته شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش بهبود شبکه ارائه شده در کاهش میزان خطا موثر بوده و می‌تواند برای افزایش دقت نتایج تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری مورد استفاده قرار گیرد.

واژگان کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، نقاط کنترلی، حل تطبیقی، متقارن محوری، نرم خطا.

۱- مقدمه

روش‌های تفاضل محدود و بدون مش، بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را برطرف ساخته است. اما با وجود این پیشرفت قابل ملاحظه، هنوز هم نمی‌شود روشی را یافت که بتوان آن را کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان‌ها در برخی مسائل، مانند مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه،

روش‌های مختلف عددی در دهه‌های اخیر برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مهندسی توسعه چشمگیری یافته‌اند که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهه ۱۹۵۰ شکل گرفت و امروزه با کاهش عیوب و ادغام با

اشاره نمود.

برای اولین بار، ورود تکنیک های طراحی به کمک رایانه به حوزه تحلیل سازه در سال ۱۹۹۸ به وسیله کیگان صورت پذیرفت [۱]؛ که در آن به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع بی-اسپلاین نسبی غیریکنواخت (NURBS)^۱ که از توسعه توابع اسپلاین به دست می آیند به وسیله هیوز و همکارانش [۲] تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتری نام گرفت. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آن ها برای درونیابی هم استفاده می شود. به طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتری در مقایسه با دیگر روش های عددی می توان به مواردی چون امکان مدل سازی دقیق تر، دقت قابل ملاحظه در اقناع شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می شود، کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب آن ها خود توابعی متغیر می باشند، اشاره کرد [۱]. در چند سال اخیر نیز، روش ایزوژئومتری به سرعت در زمینه های مختلفی همچون مکانیک سازه ها، دینامیک سیالات و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است.

برای انجام تحلیل به روش ایزوژئومتری، ابتدا هندسه با دقت بالا به وسیله سطوح نربز (NURBS) که یک فناوری استاندارد برای سیستم های CAD^۲ است، ایجاد شده و سپس یک شبکه المان با چشمه های درشت به وسیله المان های نربز ساخته می شود. به این ترتیب در اصلاح شبکه المان ها نیاز به ارتباط با سیستم CAD نیست، و می توان به سادگی شبکه المان ها را اصلاح کرد. در این روش از همان متغیرهایی که در تعریف هندسه مسئله استفاده شده است، برای تعریف هندسه مدل تحلیلی و همچنین تحلیل استفاده می شود.

پس از انجام تحلیل ایزوژئومتری همچون سایر روش های عددی نیازمند سنجش خطای تحلیل هستیم. در برآورد خطا به روش استتاجی دو رویکرد وجود دارد. تخمین خطا بر اساس روش های باقیمانده که ادامه کار بابوشکا^۳ می باشد و روش استفاده از وصله های خود تعادلی^۴ که امروزه بر استفاده از آن تأکید می شود [۳]. روش های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) که در این پژوهش استفاده می شود در دسته دوم قرار می گیرند. استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتری اولین بار به وسیله حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [۴]. اساس روش آن ها برگرفته از دقت بیشتر تنش در نقاط انتگرال گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط نمونه گوسی برای هر مؤلفه تنش در حالت دو بعدی تنش و کرنش مسطح، یک سطح بهبود یافته تشکیل می شود که برای برآورد خطای ایزوژئومتری مورد استفاده قرار می گیرد [۶ و ۵].

در مرحله بعد از تحلیل و تخمین خطا نوبت به اصلاحاتی برای کاهش خطا و یا دستیابی به تحلیلی با یکنواختی بهتر در توزیع خطا است که این فرآیند را تطریف تطبیقی می نامیم. هر فرآیند تطریف تطبیقی شامل دو بخش اصلی است: بخش اول برآورد کننده خطا که پیش از این اشاره شد و دیگری ابزاری برای فرآیند تطریف. برآورد کننده خطا مقدار خطا را در هر نقطه تخمین زده و فرآیند تطریف بر اساس اطلاعات برآورد کننده خطا مشخص می نماید که چه قسمت هایی از حوزه مسئله نیاز به تطریف دارد. در این پژوهش توسعه این روش در بازیافت تنش و برآورد خطای مسائل متقارن محوری دنبال می شود.

در زمینه بهبود شبکه در روش ایزوژئومتری تاکنون تلاش هایی انجام شده که تکیه بیشتر آن ها بر استفاده از توابع پایه T-Spline برای افزایش نقاط کنترلی در نواحی با خطای بالاتر بوده است. جانسن^۵ برای اولین بار تحلیل تطبیقی به این سبک را ارائه کرد [۷]، دورفل^۶ و همکاران در ۲۰۱۰ بهبود

3- Babuska

4-self-equilibrating patches

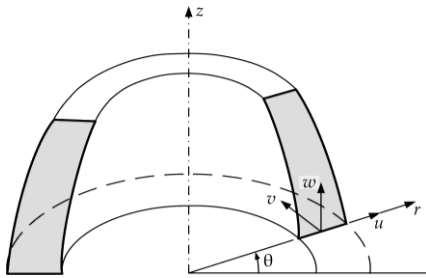
5- Johannessen

6- Dörfel

1- NURBS (NonUniform Rational B-Spline)

2- Computer Aided Design

نتیجه یک مسئله سه بعدی در مختصات (r, θ, z) به مسئله دو بعدی در صفحه rz کاهش پیدا می کند.



شکل ۱- تحلیل دوبعدی در حالت تقارن محوری

در روش ایزوژئومتری یک مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی، به عنوان یک سطح نرَبز، طوری تعیین می شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان کننده مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل متقارن محوری، اگر نقاط کنترلی را به گونه ای انتخاب کنیم که مؤلفه های اول و دوم مختصات این نقاط، (P_r, P_z) ، بتوانند هندسه مسئله را در صفحه rz برآورد کنند، در این صورت مؤلفه سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می کنیم که درونیابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نرَبز نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه rz نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه rz نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییر شکل های شعاعی (در جهت r) و محوری (در جهت z) هر نقطه را به ترتیب با u و v نشان دهیم، می توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نرَبز را به صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درونیابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u,i,j} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v,i,j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه ی بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ ها نمایان گر بردار مؤلفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نرَبز، $R_{i,j}$ توابع پایه ای نرَبز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت های r و z است.

با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع نرَبز، که بیان می کند برای

محلی شبکه با افزایش نقاط کنترلی و با استفاده از تی-اسپلاین ها را پیشنهاد کردند [۸]. ونگ^۱ و همکاران در ۲۰۱۱ با استفاده از Rational PHT-Splines یا تی-اسپلاین های مرتبه ای نوعی بهبود محلی را ارائه دادند [۹]. در مجموع همه روش های گفته شده با افزایش تعداد نقاط و حجم محاسبات همراه بوده است.

در این پژوهش برای اولین بار روشی بر پایه استفاده از گرادیان حرارتی برای بهبود شبکه نقاط کنترلی تحلیل ایزوژئومتریک مبتنی بر جابه جایی نقاط ارائه شده است. ویژگی بارز این روش عدم افزایش حجم محاسبات به دلیل اضافه نشدن نقاط کنترلی جدید و همچنین امکان بهبود شبکه در چندین چرخه مختلف است.

در ادامه برای آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه تحلیل ایزوژئومتریک، به چگونگی مدل سازی و تحلیل مسائل متقارن محوری در این روش پرداخته شده است. بخش سوم مربوط به معرفی روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک است. تشریح روش بهبود شبکه با استفاده از تولید گرادیان حرارتی در بخش چهارم و صحت سنجی این روش با حل دو نمونه در بخش پنجم از این پژوهش ارائه شده است.

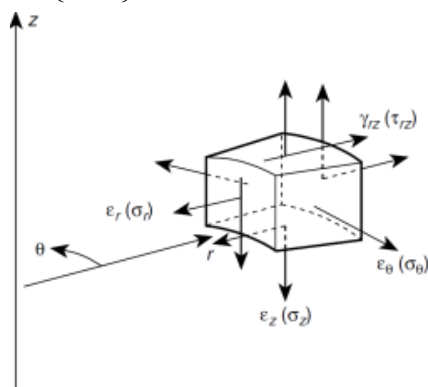
۲- فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل متقارن محوری

تحلیل اجسامی که هندسه آن ها تقارن محوری دارند و بار اعمالی به آن ها نیز متقارن محوری است در بسیاری از پروژه های مهندسی مورد نیاز است. از کاربردهای این نوع تحلیل می توان بررسی تنش و کرنش های اعمالی به یک مخزن بزرگ تحت فشار، پی های استوانه ای قرار گرفته روی بستر خاکی و تحلیل جریان سیال در لوله ها را نام برد. سازه های متقارن محوری سازه هایی است که از نظر هندسه، خواص ماده، شرایط مرزی و بارگذاری در دستگاه مختصات استوانه ای نسبت به θ مستقل است (شکل ۱) و در آن ها هیچ نوع تغییر مکانی در امتداد زاویه θ وجود ندارد. در

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_{u \ i-p, j-q} \\ P_{v \ i-p, j-q} \\ \vdots \\ P_{u \ i-p, j} \\ P_{v \ i-p, j} \\ \vdots \\ P_{u \ i, j} \\ P_{v \ i, j} \end{bmatrix} \quad (6)$$

در مسائل دارای تقارن محوری بردار کرنش ها دارای چهار مؤلفه مستقل از هم است (شکل ۶)؛ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$



شکل ۲- تنش ها و کرنش های ایجاد شده در مسائل تقارن محوری

با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیر دامنه، می توانیم کرنش ها را در هر نقطه مطابق رابطه زیر بنویسیم:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\mathbf{u}$ بردار تغییر مکان ها و $\mathbf{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی است که برای مسائل مقارن محوری به صورت زیر است:

هر ξ, η فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر است، می توان برای کم کردن هزینه محاسبات، معادله (۱) را به صورت زیر تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم ξ, η به ترتیب در دهانه های گرهی i ام و j ام قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1})$)، و درجه توابع پایه ای در جهت بردار گرهی Ξ ، p و در جهت بردار گرهی $\mathcal{H}$ ، q باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت می توان معادله (۱) را به معادله (۲) کاهش داد [۱۰].

همچنین می توان معادله (۲) را به صورت ماتریسی معادله (۳) نوشت.

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u \ k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v \ k,l} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (3)$$

که $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان ها به صورت زیر است:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,j} & v_{i,j} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

همچنین $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نرئز و $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی به صورت زیر است:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i-p, j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p, j}(\xi, \eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i, j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i, j}(\xi, \eta) \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

یکی از روش‌هایی که در تحلیل‌های عددی برای هم‌ارز سازی استاتیکی نیروهای گرهی با تنش‌های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی استفاده می‌شود، به کار بردن روش تغییر مکان مجازی است. از همین طریق می‌توان برای محاسبه ماتریس ضرایب در روش ایزوژئومتریکی نیز استفاده کرد؛ که در نهایت به صورت رابطه زیر خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (15)$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس سختی، $\bar{\mathbf{P}}$ مجهولات مسئله (مختصه سوم نقاط کنترلی) و $\mathbf{F}$ نیروهای خارجی وارد بر زیر دامنه است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dv + \int_\Gamma \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (17)$$

و در نهایت با حل رابطه (۱۵) و مشخص شدن بردار $\bar{\mathbf{P}}$ می‌توان مؤلفه‌های کرنش و تنش را به صورت زیر جستجو کرد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{P}} ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

۳- چگونگی محاسبه توزیع خطا

در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مؤلفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابه‌جایی) استفاده شده‌اند، به دست می‌آید.

یک سطح نربز زمانی به دست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. در مسائل متقارن محوری با تعریف مختصات Γ و Z هر نقطه کنترلی به وسیله‌ی کاربر، تنها مؤلفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافته تنش، مؤلفه سوم نقطه کنترلی می‌باشد. نحوه محاسبه مختصات سوم نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریکی به دست آمده است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود. اساس محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه به دست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آن‌ها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

با جاگذاری رابطه (۳) در رابطه (۸) می‌توان کرنش‌ها را به صورت زیر تقریب زد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{P}} \quad (10)$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل‌گیری $\mathbf{L}$ ماتریس $\mathbf{B}$ برای مسائل تقارن محوری به صورت رابطه (۱۱) خواهد بود. هم چنین در مسائل متقارن محوری می‌توان چهار مؤلفه تنش را به صورت رابطه (۱۲) برای بردار تنش‌ها در نظر گرفت.

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \dots \\ \frac{R(\xi, \eta)}{r} & 0 & \dots \\ \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & \dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها خطی و به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (13)$$

$\boldsymbol{\sigma}_0$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ تنش‌ها و کرنش‌های اولیه و $\mathbf{D}$ ماتریس خواص مصالح است که برای مصالح همسان گرد:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{P}_{rr})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{P}_{rr} = \mathbf{B}_{rr} \Rightarrow \mathbf{P}_{rr} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{rr} \quad (24)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B}_{rr} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \bar{\sigma}_{rr} \quad (25)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی هر یک از مؤلفه های تنش، سطح مربوط به آن نیز به دست می آید. همان گونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش به دست آمده از روش ایزوژئومتری دقیق تر می باشد و از این رو می تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتری که به کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری برای هر المان، به صورت تقریبی به معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا می کند [۴].

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می شود [۱۱]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

در این رابطه σ مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\sigma}$ تنش به دست آمده از حل تقریبی، $\mathbf{D}$ ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نیست، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبودیافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \bar{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است. در تحلیل ایزوژئومتری مسائل متقارن محوری این نقاط فوق همگرا بر حداقل تعداد نقاط گوسی مورد نیاز المان چهارضلعی منطبق هستند. مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با کمینه کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتری در نقاط گوس المان های هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می شود [۴].

$$\sigma^* = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^* \\ \sigma_{zz}^* \\ \sigma_{\theta\theta}^* \\ \sigma_{rz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{rr} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{zz} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{\theta\theta} \\ \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{rz} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{P}$ و $\mathbf{R}$ مطابق روابط (۵) و (۶) تعریف می شوند. همان طور که مشاهده می شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین سطح هر مؤلفه تنش، مختصات سوم نقاط کنترلی (بردار $\mathbf{P}$) می باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و تنش بهبودیافته را در نقاط گوس کمینه می کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را برای هر مؤلفه تنش به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(\mathbf{P}_{rr}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{rr} - \bar{\sigma}_{rr})^2 \quad (20)$$

$$F(\mathbf{P}_{zz}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{zz} - \bar{\sigma}_{zz})^2 \quad (21)$$

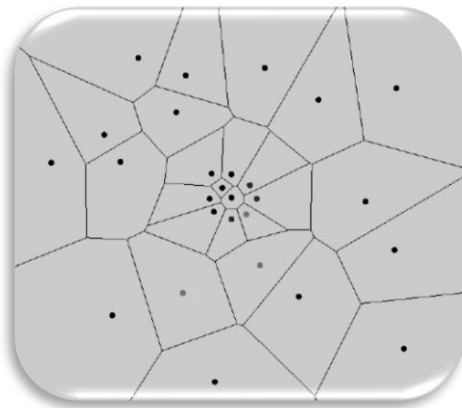
$$F(\mathbf{P}_{\theta\theta}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 \quad (22)$$

$$F(\mathbf{P}_{rz}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{rz} - \bar{\sigma}_{rz})^2 \quad (23)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ مؤلفه تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه های مجهول بردار $\mathbf{P}$ و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبودیافته هر یک از مؤلفه ها به دست می آید. به طور مثال برای مؤلفه تنش بهبودیافته σ_{rr}^* خواهیم داشت.

طرف دیگر elastic analogy و سیستم فنرها برای مسائل دارای شبکه ساختار یافته و ساختار نیافته کاربرد دارند ولی این روش‌ها نیز در حل تطبیقی مسائل اجزاء محدود دارای محدودیت‌هایی بوده‌اند.

در روش ارائه شده، ابتدا حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی شناسایی شده و هر نقطه به وسیله میله‌هایی فرضی به نقاطی که در همسایگی آن قرار دارد متصل می‌شود.



شکل ۳ - دیاگرام Voronoi جهت شناسایی حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی

برای یافتن نقاط همسایه از دیاگرام Voronoi استفاده شده است (شکل ۳). دیاگرام Voronoi، شکل محدبی است که از تقاطع عمود منصف‌های وارد بر پاره خط بین گره‌ها حاصل می‌شود. این حوزه همسایگی طبق رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$T_i = \{x \in \mathbb{R} : d(X, X_i) < d(X, X_j) \forall j \neq i\} \quad (28)$$

که در آن $d(x, x_i)$ فاصله (اقلیدسی) بین X و X_i است. معنی رابطه بالا این است که نقاط متعلق به سلول Voronoi گره i نقاطی هستند که به این گره در مقایسه با سایر گره‌ها نزدیک‌ترند.

در این مرحله گره‌ها را به وسیله اعضای سازه‌ای متصل کرده و خط‌هایی را که به روش بازیافت تنش تخمین زده‌ایم به عنوان درجه حرارت منفی (برودت) به اعضا اختصاص می‌دهیم؛ در واقع چون میانگین خطای سطوح مجاور هر عضو و در مسائل سه بعدی احجام مجاور هر عضو را به عنوان خطا یا به تعبیر

که در این جا σ^* تنش بازیافتی و $\bar{\sigma}$ تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

۴-اصلاح وفقی

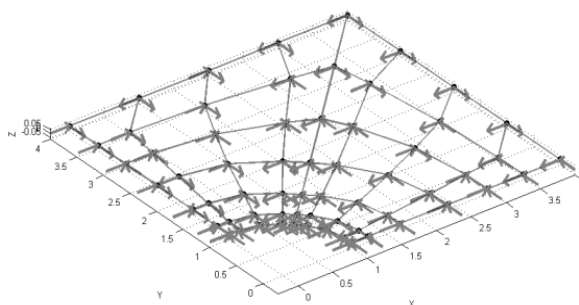
در فرآیند حرکت‌دهی شبکه، که یکی از روش‌های اصلاح وفقی است، تعداد کل نقاط ثابت باقی می‌ماند ولی محل نقاط طبق خطاهای به دست آمده تغییر می‌کند. این روش در مقابل سایر روش‌ها همچون اصلاح شبکه p و یا غنی‌سازی، مزایای قابل توجهی دارد. با این وجود در روش اجزای محدود با محدودیت‌هایی همراه است. زیرا در زمان جابه‌جایی نقاط ممکن است اتصال اجزا به هم بخورد و بعضی از المان‌ها همپوشانی پیدا کرده و یا مساحت بعضی از المان‌ها صفر شود [۱۲]. به همین دلیل در اجزای محدود مناسب‌ترین روش برای تعریف تطبیقی استفاده از همان روش غنی کردن شبکه است که از لحاظ محاسباتی پرهزینه است. ولی از آنجایی که به طور کلی در روش‌های بدون شبکه و همچنین روش تحلیل ایزوژئومتریکی در فضای پارامتری آن، المان بندی وجود ندارد، استفاده از روش جابه‌جایی نقاط به راحتی امکان‌پذیر است. بنابراین در فرآیند تعریف ارائه شده برای روش تحلیل ایزوژئومتریکی، ایده جابه‌جایی نقاط به کار گرفته شده است.

در این مقاله با معرفی یک فرآیند جدید تعریف تطبیقی، در تحلیل ایزوژئومتریکی، که از جمله روش‌های حرکت‌دهی شبکه محسوب می‌شود، حل تطبیقی برای حل مسائل حوزه مکانیک جامدات نشان داده شده است.

روش‌های متعددی برای جابه‌جایی نقاط شبکه در اجزای محدود پیشنهاد شده و برای مسائل مختلف به کار گرفته شده است از میان این روش‌ها چهار روش به نام‌های Trans-Isoparametric Finite-Interpolation (TFI) [۱۳]، Mapping [۱۴]، elastic analogy [۱۵] و سیستم فنرها [۱۶] بیشتر مورد توجه بوده است.

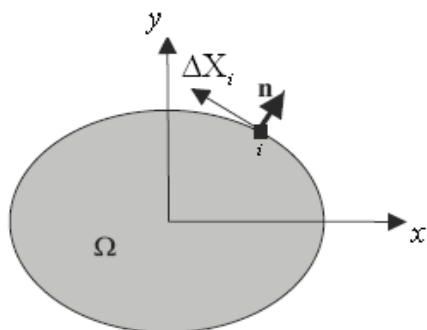
TFI و Isoparametric Mapping الگوریتم‌های ریاضی هستند و برای مسائل شبکه‌های ساختار یافته مناسب‌اند. از

انجام مراحل تحلیل، تخمین خطا و جابه جایی نقاط کنترلی، به عنوان حل تطبیقی، در سیکل های متعدد وجود دارد.



شکل ۵- تحلیل یک سازه دو بعدی نمونه تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی

شرایط مرزی مجموعه نقاط گرهی و المان ها چنین است که نقاط روی مرزهای حوزه تنها می توانند در راستای مرز جابه جا شوند (شکل ۶). به عبارت دیگر در جهت عمود بر مرز جابه جایی آن ها صفر است. نتیجه طبیعی این شرط این است که نقاط گرهی واقع بر محل برخورد دو مرز که زاویه غیر صفر دارند، بی حرکت می مانند. همچنین با این شرایط هیچ نقطه ای از یک مرز وارد مرز دیگر نخواهد شد.



شکل ۶- حالت کلی برای شرایط مرزی

در زیر روابط مربوط به شرط مرزی آورده شده است.

$$\begin{aligned} \Delta X_i n_i &= [\Delta x_i \Delta y_i] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} \\ &= [(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i)] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن Δx_i بردار تغییر مکان نقطه i ام و n_i بردار برون گرای عمود بر مرز در این نقطه می باشد.

با ضرب کردن دو بردار Δx_i و n_i در رابطه بالا داریم:

$$y_i = w + s x_i \quad (33)$$

این روش، اختلاف درجه حرارت در نظر می گیریم، اعضایی که در نواحی با خطای بیشتر قرار دارند اختلاف حرارت بیشتری را متحمل می شوند و برای هر عضو مطابق رابطه زیر تغییر طول عضوهای فرضی محاسبه می شود:

$$\delta = L * \alpha * \Delta T \quad (29)$$

که در آن:

δ تغییر طول عضو، L طول اولیه عضو، α ضریب انتقال حرارت ماده و ΔT اختلاف حرارت موجود است.

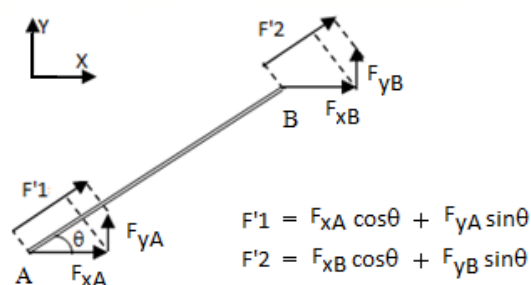
تغییر طول اعضای فرضی، به دست آمده و به صورت رابطه زیر به نیرو تبدیل می شود.

$$\delta = \frac{FL}{EA} \quad (30)$$

که در آن:

δ تغییر طول عضو، F نیروی حاصل از اختلاف حرارت (خطا)، L طول اولیه عضو، E ضریب الاستیسیته و A سطح مقطع اعضا می باشد. از آنجا که نیروی به وجود آمده در مختصات محلی است با نگاشت زیر در مختصات کلی تعریف می شود (شکل ۴).

$$\begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xA} \\ F'_{yA} \\ F'_{xB} \\ F'_{yB} \end{bmatrix} \quad (31)$$



شکل ۴- تبدیل نیروها به مختصات کلی

لذا سازه متشکل از نقاط کنترلی و اعضای متصل کننده فرضی را تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی تحلیل کرده (شکل ۵) و برای انجام مجدد تحلیل ایزوژئومتریکی جابه جایی ها را در نقاط کنترلی و با نسبتی معین در بردارهای گرهی اعمال می کنیم. در الگوریتم ارائه شده، تا رسیدن به دقت کافی، قابلیت

که در آن w و s چنین اند:

$$w = \bar{x}_i \frac{n_x^i}{n_y^i} + \bar{y}_i \quad (34)$$

$$s = -\frac{n_x^i}{n_y^i} \quad (35)$$

روابط فوق برای حالتی که مرز عمود بر یکی از محورهای مختصات باشد به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y_i = \bar{y}_i \quad \text{if} \quad n_x^i = 0 (n \perp x) \quad (36)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{if} \quad n_y^i = 0 (n \perp y) \quad (37)$$

مفهوم این دو رابطه این است که اگر مرز موازی بر محور x باشد، نقطه واقع بر آن تنها می‌تواند در جهت x جابه‌جا شود و تغییر مکان آن در جهت y صفر است؛ همچنین اگر مرزی موازی بر محور y باشد، نقطه واقع بر آن تنها می‌تواند در جهت y جابه‌جا شود و تغییر مکان آن در جهت x صفر است. این دو شرط مرزی همانند شرایط مرزی درিশله (تغییر مکانی) در روش اجزاء محدود هستند.

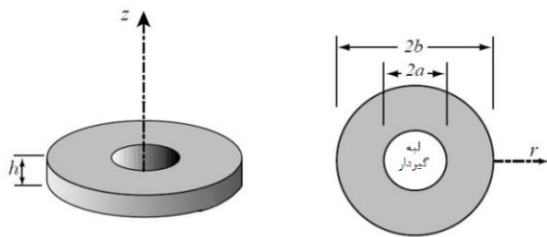
همان‌طور که اشاره شد پس از اعمال شرایط مرزی و تحلیل سازه خرابایی به وجود آمده، مختصات جدید نقاط کنترلی به دست می‌آید و متناسب با تغییر مختصات نقاط کنترلی، فواصل نقاط بردار گرهی هم اصلاح می‌شود.

در ادامه با انجام اصلاح وفقی، به مدل‌سازی و تحلیل خطاها و تغییرات مؤلفه‌های تنش دو مسئله الاستیسیته که دارای حل تحلیلی بوده پرداخته شده است و نشان داده می‌شود که این فرآیند بسیار انعطاف‌پذیر و مؤثر است.

۵- مسائل نمونه

۵-۱- صفحه دایره‌ای متقارن محوری

در این قسمت به طرح و حل یک سازه متقارن محوری می‌پردازیم. در شکل (۷) صفحه دایره‌ای شکل به شعاع خارجی ۲۰ و شعاع داخلی ۱۰ مشاهده می‌شود که در لبه داخلی به وسیله تکیه‌گاه گیردار مقید شده است.



شکل ۷- شکل اولیه صفحه دایره‌ای شکل، دارای تکیه‌گاه گیردار در لبه داخلی.

ارتفاع این صفحه برابر ۱ در نظر گرفته شده و تحت تأثیر بار خطی عمودی در لبه خارجی خود به شدت $F = 10$ بر واحد طول می‌باشد. مدل این مسئله با توجه به دارا بودن تقارن محوری، به شکل مستطیلی به طول ۱۰ و ارتفاع ۱ می‌باشد. تنش‌های دقیق این مسئله با فرض مدل صفحه کرشلف به صورت روابط زیر ارائه شده است [۱۸].

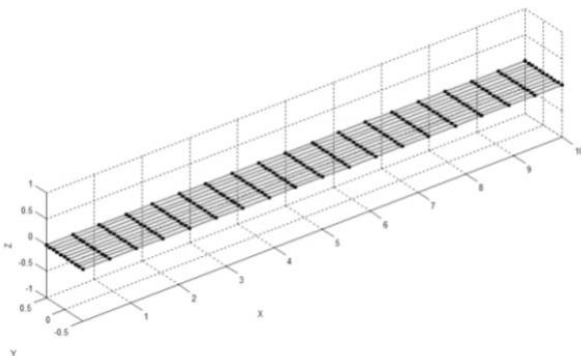
$$\sigma_r = \frac{12 M_r Z}{h^3}, M_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \log \frac{R}{r} \quad (38)$$

$$\sigma_\theta = \frac{12 M_\theta Z}{h^3} \quad (39)$$

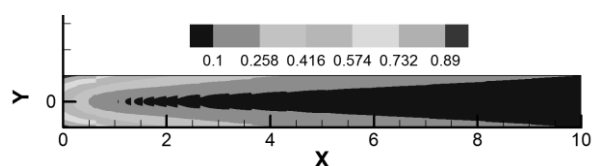
$$M_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \log \frac{R}{r} + 1 - \nu \right] \quad (40)$$

$$\sigma_z = 0, \sigma_{zr} = 0 \quad (41)$$

برای مدل‌سازی این جسم در ایزوژئومتریک از ۲۰۹ نقطه کنترلی استفاده شده، به طوری که تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۲۰ و در جهت ارتفاعی برابر ۱۱ می‌باشد (شکل ۸).

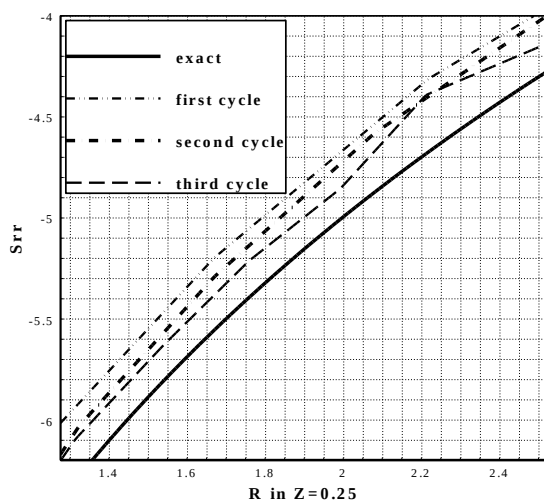


شکل ۸: شبکه اولیه نقاط کنترلی صفحه دایره‌ای شکل

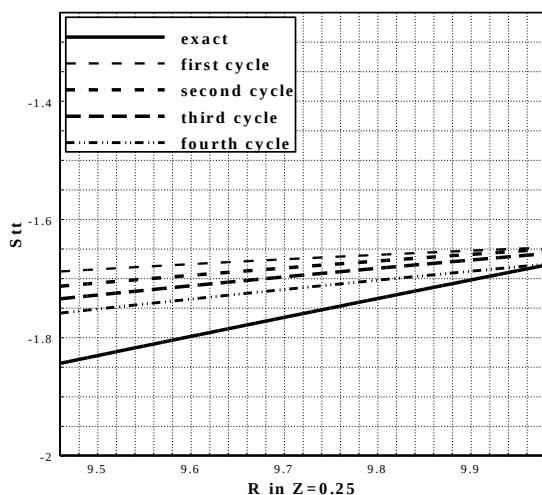


شکل ۱۴- نرم خطای انرژی در سومین سیکل از تحلیل تطبیقی

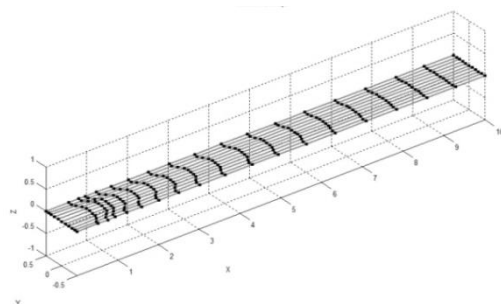
در شکل های ۱۲ تا ۱۴ نرم خطای انرژی دقیق به دست آمده از حل این مثال در سیکل های مختلف بهبود شبکه نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود بیشینه خطا از ۱ به ۰/۸۹ کاهش یافته است که حاکی از عملکرد مناسب روش بهبود شبکه در کاهش خطا با طی چند سیکل می باشد. همچنین در شکل های ۱۵ تا ۱۸، با رسم تغییرات مؤلفه های تنش در مسیر $Z=0.25$ و $R=0.5$ ، تأثیر بهبود شبکه بر افزایش دقت تنش در هر سیکل نشان داده شده است.



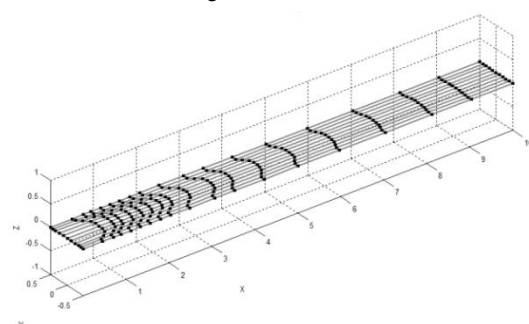
شکل ۱۵: تنش σ_{RR} صفحه دایره ای در مسیر $Z=0.25$



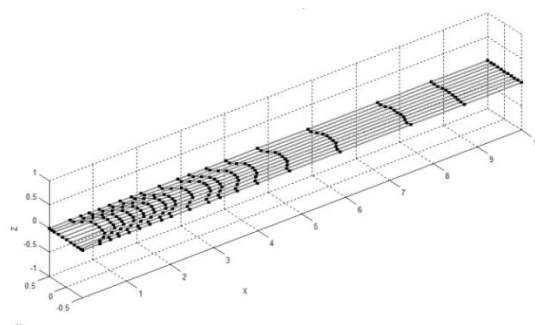
شکل ۱۶: تنش $\sigma_{\theta\theta}$ صفحه دایره ای در مسیر $Z=0.25$



شکل ۹: مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول حل تطبیقی صفحه دایره ای شکل

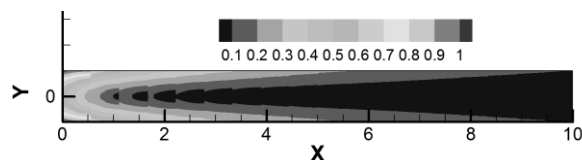


شکل ۱۰: مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل دوم حل تطبیقی صفحه دایره ای شکل

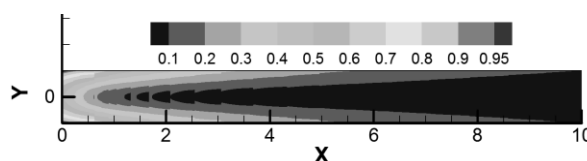


شکل ۱۱: مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل سوم حل تطبیقی صفحه دایره ای شکل

در شکل های ۹ تا ۱۱ مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول و دو سیکل دیگر حل تطبیقی نشان داده شده است.



شکل ۱۲- نرم خطای انرژی در اولین سیکل از تحلیل تطبیقی

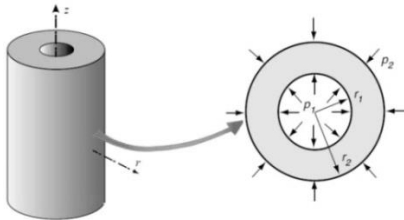


شکل ۱۳- نرم خطای انرژی در دومین سیکل از تحلیل تطبیقی

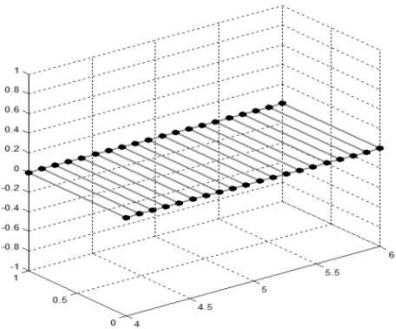
$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (44)$$

$$\sigma_{zr} = 0 \quad (45)$$

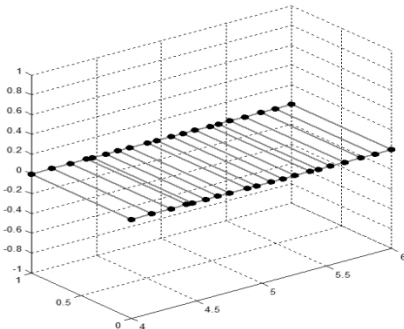
برای مدل‌سازی این جسم در ایزوژئومتریک از ۴۰ نقطه کنترلی استفاده شده است، به طوری که تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۲۰ و در جهت ارتفاعی برابر ۲ می‌باشد (شکل ۲۰).



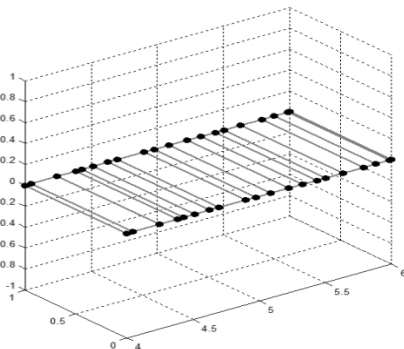
شکل ۱۹- لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی



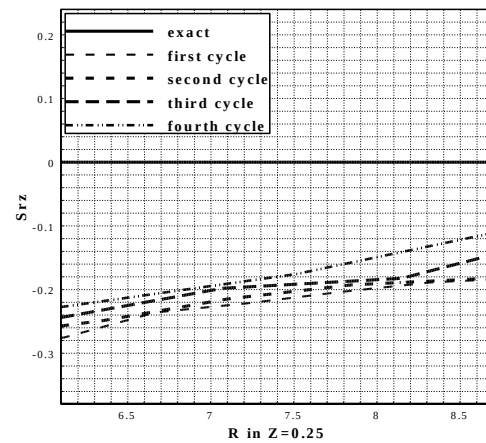
شکل ۲۰- مختصات اولیه نقاط کنترلی لوله جدار ضخیم



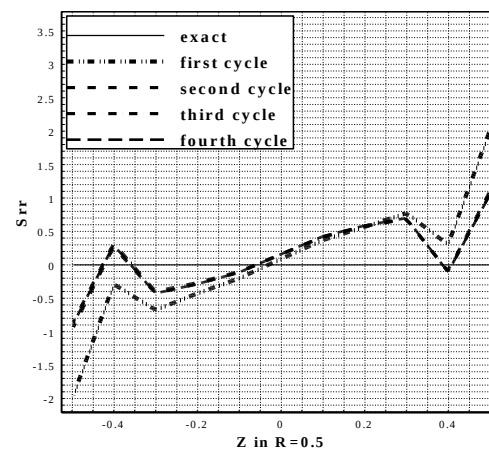
شکل ۲۱- مختصات نقاط کنترلی لوله بعد از یک سیکل



شکل ۲۲- مختصات نقاط کنترلی لوله تحت فشار در سیکل بعدی
تحلیل تطبیقی



شکل ۱۷: تنش σ_{RZ} صفحه دایره‌ای در مسیر $Z=0.25$



شکل ۱۸: تنش σ_{RR} صفحه دایره‌ای در مسیر $R=0.5$

۵-۲- لوله استوانه‌ای متقارن محوری:

در شکل ۱۹ لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی مشاهده می‌شود. در این مسئله علاوه بر داشتن شرایط تقارن محوری، کرنش در جهت محور z نیز به دلیل بلند بودن طول لوله صفر در نظر گرفته می‌شود. تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن به صورت روابط زیر ارائه شده است [۱۸].

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (42)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (43)$$

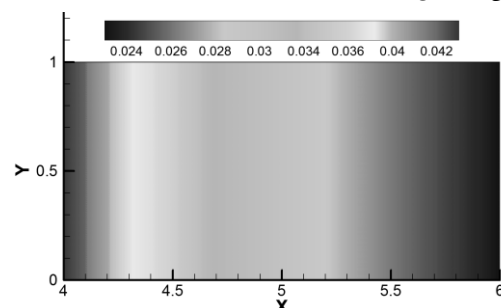
۷- نتیجه گیری

روشی ابداعی جهت بهبود شبکه نقاط کنترلی بر پایه حرکت نقاط کنترلی بر اساس گرادیان حرارتی ناشی از خطای حل در تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل متقارن محوری در این مقاله مورد بحث قرار گرفت. همچنین تأثیر روش برآورد خطا بر مبنای بازیافت تنش در مسائل متقارن محوری جهت حل تطبیقی بررسی شد. توجه به کاهش نرم خطای انرژی دقیق بعد از هر سیکل بهبود شبکه و نزدیک شدن مؤلفه تنش ایزوژئومتریکی به حل دقیق در حل تطبیقی یافته، نشان می‌دهد که روش ارائه شده در این پژوهش به درستی شبکه نقاط کنترلی را به سمت نواحی با خطای بیشتر راهنمایی کرده و روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش نیز می‌تواند با دقت خوبی در حل تطبیقی تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل با شرایط تقارن محوری به کار رود.

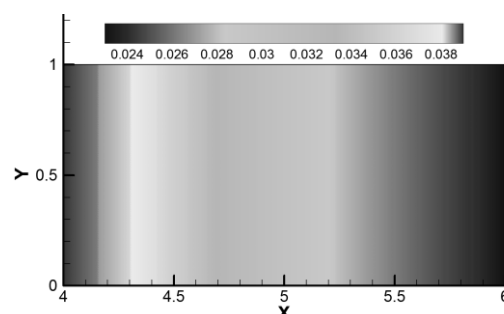
مراجع:

- [1] Kagan P, Fischer A, Bar-Yoseph PZ New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. Int. J. numer. Methods Engrg. (1998), 41: 435-458.
- [2] Hughes. T.J.R., Cottrell. J.A., Bazilevs. Y, Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. (2005), 194 (39-41) 4135-195.
- [3] Zienkiewicz, O. c. (2006), "The background of error estimation and adaptivity in finite element computations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 207-213
- [4] Hassani. B, Ganjali. A and Tavakkoli. S.M, An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery, European J. of Mech, 31 (2012), 101e109
- [5] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, Z. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1992), Vol. 33, pp. 1331-1364.
- [6] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, Z. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity", International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1992), Vol. 33, pp. 1365-1382.
- [7] Johannessen. Kjetil André, "An adaptive isogeometric finite element Analysis", M.S. thesis, Norwegian University of Science and Technology. (2009).
- [8] Dörfel. Michael R, Jüttler. Bert and Simeon. Bernd, "Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement

در شکل های ۲۱ و ۲۲ مختصات جدید نقاط کنترلی در دو سیکل حل تطبیقی ایزوژئومتریکی نشان داده شده است.

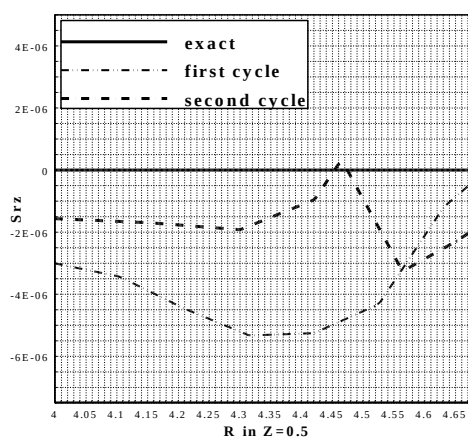


شکل ۲۳- نرم خطای انرژی در اولین سیکل از تحلیل تطبیقی



شکل ۲۴- نرم خطای انرژی در دومین سیکل از تحلیل تطبیقی

در شکل های ۲۳ و ۲۴ نرم خطای انرژی دقیق به دست آمده از حل این مثال در سیکل های مختلف بهبود شبکه نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود حداکثر خطا از ۰/۰۴۲ به ۰/۰۳۸ کاهش یافته است که حاکی از عملکرد مناسب روش بهبود شبکه در کاهش خطا با طی چند سیکل می باشد. همچنین در شکل ۲۵، با رسم تغییرات مؤلفه های تنش در مسیر $Z=0.5$ ، تأثیر بهبود شبکه بر افزایش دقت تنش در هر سیکل نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، بعد از انجام تحلیل تطبیقی در هر سیکل نرم خطا توزیع مناسب تری خواهد داشت.



شکل ۲۵: تنش σ_{RZ} لوله تحت فشار در مسیر $Z=0.5$

- [14] Zienkiewicz. O.C, Philips. D.V, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1971), 3: 519.
- [15] Bar-Yoseph. P.Z, Mereu. S, Chippada. S, Kalro. V.J, "Automatic monitoring of element shape quality in 2-D and 3-D computational mesh dynamics", Computational Mechanics , (2001), 27: 378.
- [16] Zeng. D, Ethier. C.R, "A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains", Finite Elements in Analysis and Design, (2005)41, 1118–1139.
- [17] George, P.L., Borouchaki H. "Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements", HERMES, Paris, (1998).
- [18] Sadd, M.H. "ELASTICITY:Theory, Applications, and Numerics", Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
- with T-splines" ,Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.(2010), Vol. 199 , pp. 264–275.
- [9] Wanga. Ping, Xua. Jinlan, Denga Jiansong and Chen. Falai, (2011)"Adaptive isogeometric analysis using rational PHT-splines", Computer-Aided Design, (2011) Vol. 43 (2011) , pp. 1438–1448.
- [10] Piegl. L, Tiller. W, "The NURBS Book" (Monographs in Visual Communication), Second ed., Springer-Verlag, New York,(1997).
- [11] Timoshenko. S.P, Goodier. J.N, "Theory of Elasticity," McGraw-Hill, New York,(1977).
- [12] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. "The Finite Element Method" 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann,(2005).
- [13] Haber. R, Shephard. M.S, Abel. J.F, Gallagher. R.H, Greenberg. D.P, "A general two-dimensional graphical finite-element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings", International Journal for Numerical Methods in Engi- neering,(1981),17: 1015

