

ارائه برآورد کننده خطا در روش بدون شبکه کمینه مربعات گسسته همپوش

محمد هادی افشار^{۱*}، محسن لشکر بلوک^۲

۱- دانشیار دانشکده عمران دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

mhafshar@iust.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۶/۰۷/۲۲

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۰۲/۱۲

چکیده- استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل مستلزم آگاهی از اندازه خطاهای احتمالی است. برآوردکننده‌ی خطا در روش‌های عددی ابزاری کارآمد برای اطمینان از جهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. در این مقاله در ابتدا یک برآوردکننده خطا در روش بدون شبکه کمینه مربعات گسسته همپوش^۱ ارائه شده است. برآوردکننده خطای ارائه شده از نظر محاسباتی به گونه‌ایست که به راحتی قابل کاربرد در برنامه‌های موجود در روش CDLS است. سپس با استفاده از این برآوردکننده خطا به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جواب‌های روش CDLS پرداخته شده است. بدین منظور مسائل متعددی در حوزه مکانیک سیالات از نوع هذلولوی به وسیله‌ی روش CDLS حل شده است.

کلیدواژه‌گان: روش‌های بدون شبکه، برآوردکننده خطا، نقاط همپوش، معادلات هذلولوی

۱- مقدمه

مسئله است.

بهترین راه حل برای تحلیل مسائل با ناپیوستگی‌های متحرک در روش‌های متکی بر شبکه استفاده از شبکه‌بندی مجدد با استفاده از نتایج تحلیل در مرحله قبل است. شبکه‌بندی مجدد در روش‌های متکی به شبکه با تغییر در بعد جزء و یا افزایش مرتبه تابع تقریب و گاهی نیز با اعمال هر دو انجام می‌شود. به کارگیری هریک از روش‌های تقریب^۳ بعد از هر مرحله از تحلیل نیازمند برآورد میزان خطا^۴ در هر جزء است که به وسیله‌ی برآوردکننده‌های خطا

تحلیل مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک و مسائلی که حین تحلیل دچار تغییر در هندسه حوزه می‌شود با استفاده از روش اجزاء محدود نیاز به یک فرایند مداوم شبکه‌بندی حوزه مسئله برای جلوگیری از انحراف فرایند حل به دلیل کج‌شکلی^۲ شدید المان‌ها دارد. تولید شبکه فرایندی پرهزینه و مشکل است، به طوری که در بسیاری از مسائل دو یا سه‌بعدی با هندسه پیچیده، هزینه این فرایند قابل مقایسه با هزینه گسسته‌سازی معادلات و حل معادلات حاکم بر

3- Refinement
4- Error Estimate

1- Collocated Discreet Least Square (CDLS)
2- distortion

محاسبه می‌شود. مقادیر جواب یا مشتقات آن در روش‌های متکی به شبکه برای حصول دقت کافی نیازمند هموارسازی است که فرایندی پرهزینه به‌خصوص در مسائلی مانند اجزاء محدود سه‌بعدی و جریانات سطح آزاد است. برای رفع مشکلاتی از این نوع امروزه توجه بسیاری از محققین به روش‌های بدون شبکه معطوف شده‌است. اگرچه سابقه این روش‌ها بیش از یک دهه نیست ولی در سال‌های اخیر پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته‌است.

اولین ایده استفاده از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۱ (SPH) به‌وسیله‌ی گینگولد و مونگان [۱] برای مدل‌سازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده‌ابری غباری به‌کار گرفته شد. تحقیقات در زمینه روش‌های بدون شبکه بسیار فعال بوده است. به‌طوری‌که پس از انتشار مقاله روش جزئی پخش^۲ به‌وسیله‌ی نایرول و تورتوت [۲] روش‌های زیادی به نام روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش بدون شبکه گالرکین^۳ (EFG) به‌وسیله‌ی بلیتسکو و همکاران [۳]، روش باز تولید کرنل ذرات^۴ (RKPM) لیو و جان [۴]، روش اجزای محدود افراز واحد^۵ (PUFEM) بابوسکا و میلنک [۵]، روش ابرهای HP^۶ به‌وسیله‌ی دورت و اودن [۶] روش^۷ (MLPG) به‌وسیله‌ی آلتوری [۷]، روش حداقل مربعات گسسته^۸ (DLS) به‌وسیله‌ی ارزانی و افشار [۸] و

برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی ابزارهای کارآمد برای اطمینان از جهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. اگر قسمت‌هایی از مسئله که نیاز

به دقت بیشتری دارند مشخص شوند می‌توان با یک فرایند مناسب حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرد. لیو و تیو [۹] یک روش اقتباسی براساس سلول‌های زمینه‌ای برای برآورد خطا در روش‌های بدون شبکه ارائه کرده‌اند. هسته اصلی این روش یک سلول برآورد کننده خطا است. در این روش مقدار خطا به جای یک نقطه در یک سلول محاسبه می‌شود. معیار خطای یک سلول از اختلاف بین نرم انرژی سلول مورد نظر و نرم انرژی در یک سلول مرجع که از انتگرال‌گیری گوسی محاسبه شده است به‌دست می‌آید. این روش در روش‌های بدون شبکه‌ای که از شبکه‌بندی زمینه‌ای استفاده می‌کنند کاربرد دارد. در این راستا گاویت [۱۰] نیز یک شاخص خطا برای روش بدون شبکه EFG ارائه داد. در این روش از این اصل که جواب‌ها در نقاط گوس دارای دقت بیشتری استفاده شده است. ایسک و همکارانش [۱۱] برآورد کننده خطایی بر پایه درون‌یابی ارائه داده‌اند. در این روش از تفاضل بین جواب‌های هموار شده و جواب در نقاط گرهی به‌عنوان معیاری برای محاسبه خطا استفاده شده است. الانساری و اوزر [۱۲] برآوردکننده خطایی برای روش‌های بدون شبکه اجزاء مرزی ارائه داده‌اند. در این روش از اختلاف بین مقادیر محاسبه‌شده گرهی و مقادیر نقاط گرهی در تابع برازش‌شده به روش^۹ RBF به عنوان خطا در نقاط گرهی استفاده شده است.

از کارهای دیگری که در زمینه برآورد خطا در روش‌های بدون شبکه انجام شده است می‌توان به اونگ جون و یامین چنگ [۱۳] برای روش^{۱۰} FPM، هیوانگ و همکاران [۱۴] در روش^{۱۱} MQ و برآورد کننده خطای ژجی [۱۵] برای روش EFG اشاره کرد.

استفاده از نقاط همپوش^{۱۲} تکنیکی جدید و مؤثر در

1- Smooth Particle Hydrodynamic

2- Diffuse Element

3- Element Free Galerkin

4- Reproducing Kernel Particle Method

5- Partition of Unity Finite Element

6- HP-clouds

7- Meshless Local Petrov Galerkin

8- Discrete Least square

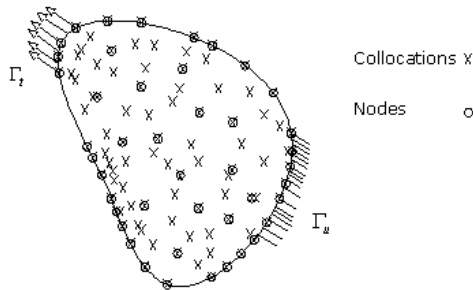
9- Radial Basis Function

10- Finite Point Method

11- Multiquadratic

12- Collocation

حوزه مسئله و M_u تعداد نقاط همپوش در مرز طبیعی و M_t تعداد نقاط همپوش در مرز مشتقی و M تعداد کل نقاط همپوش است.



شکل (۱) گسسته‌سازی حوزه مسئله در روش CDLS

مقدار تابع تقریب زننده u در یک نقطه همپوش مانند x_k را می‌توان رابطه زیر تعیین کرد:

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_k) u_i \quad (k=1 \sim M) \quad (4)$$

در رابطه بالا $\phi_i(x_k)$ مقدار تابع شکل نقطه i ام به ازای x_k و n تعداد نقاط گرهی زیر حوزه‌ایست که x_k در آن قرار دارند. شکل این زیر حوزه به نوع تابع وزن به کاررفته در تولید توابع شکل، بستگی دارد. با جای‌گذاری رابطه (۴) در معادلات (۱)، (۲) و (۳) می‌توان مقدار باقیمانده‌ها را در حوزه مسئله $R^{(d)}$ و مرز مشتقی $R^{(t)}$ و مرز طبیعی $R^{(u)}$ به صورت زیر یافت.

$$R_k^{(d)} = A(u_k) + q(x_k) = \sum_{j=1}^n A(\phi_j) u_j + q(x_k) \quad (k=1 \sim M_d) \quad (5)$$

$$R_k^{(t)} = B(u_k) - \bar{t}(x_k) = \sum_{j=1}^n B(\phi_j) u_j - \bar{t}(x_k) \quad (k=1 \sim M_t) \quad (6)$$

$$R_k^{(u)} = u_k - \bar{u} = \sum_{j=1}^n (\phi_j) u_j - \bar{u} \quad (k=1 \sim M_u) \quad (7)$$

تابع J به عنوان مجموع مربعات باقی مانده‌ها

بهبود جواب‌ها در روش‌های بدون شبکه‌ای که در روند حل خود از انتگرال‌گیری استفاده نمی‌کنند، است. این نقاط فقط در گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند و ابعاد دستگاه معادلات نهایی و در نتیجه هزینه محاسباتی را افزایش نخواهند داد. با این‌که افزایش این نقاط در بهبود جواب‌ها مؤثر است ولی تا به حال معیاری برای تعیین تعداد و موقعیت این نقاط ارائه نشده است. در این مقاله با استفاده از برآوردکننده خطای ارائه شده به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جواب‌های روش CDLS پرداخته شده است. بدین منظور مسائل متعددی در حوزه مکانیک سیالات از نوع هذلولوی به وسیله‌ی روش CDLS حل شده و خطای آن‌ها محاسبه شده است.

۲- فرمول‌بندی روش بدون شبکه CDLS

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$A(u) + q = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

شرط مرزی مشتقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(u) = \bar{t} \quad \text{in } \Gamma_t \quad (2)$$

شرط مرزی طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$u = \bar{u} \quad \text{in } \Gamma_u \quad (3)$$

که در آن A, B عملگرهای دیفرانسیلی است. q نیز نیروهای خارجی یا منابعی است که بر حوزه مسئله عمل می‌کند.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است حوزه مسئله و مرزهای آن به وسیله‌ی N نقطه گرهی گسسته‌سازی شده است. نقاط همپوش نیز به صورت کاملاً دلخواه در حوزه مسئله و در مرزها قرار گرفته است. باید توجه داشت که در هر نقطه گرهی حتماً یک نقطه همپوش نیز باید قرار گیرد. فرض کنید M_d تعداد نقاط همپوش در

به صورت زیر تعریف می شود:

$$J = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{M_d} [R_k^{(d)}]^2 + \alpha \sum_{k=1}^{M_l} [R_k^{(l)}]^2 + \beta \sum_{k=1}^{M_u} [R_k^{(u)}]^2 \right) \quad (8)$$

در رابطه (۸) k نشان دهنده شماره نقطه همپوش است. در حقیقت تابع J مجموع مربعات باقی مانده ها در نقاط همپوش است. ضرایب α, β نشان دهنده اهمیت بزرگی باقی مانده های مرزی در مقایسه با باقی مانده های حوزه است. با مشتق گرفتن از تابع J نسبت به پارامترهای مجهول به راحتی می توان به یک دستگاه معادلات متقارن $n \times n$ دست یافت و با استفاده از روش های معمول حل دستگاه معادلات پارامترهای مجهول را یافت. همان طور که مشاهده می شود ابعاد ماتریس ضرایب در روش CDLS به تعداد نقاط همپوش بستگی ندارد.

تمام روش های بدون شبکه نیازمند یک روش تقریب زننده تابع برای تولید توابع شکل است. روش های متعددی برای محاسبه توابع شکل در روش های بدون شبکه ارائه شده است. برای مثال می توان به روش های تقریب کمینه ی مربعات متحرک^۱ (MLS) به وسیله ی لندکستر و سالکاسکا [۱۶]، روش درونیابی شعاعی^۲ (RPIM) به وسیله ی لیو و جیو [۱۷] و درونیابی رایگینگبه وسیله ی لی و جیو [۱۸] اشاره کرد. در روش بدون شبکه CDLS از روش کمینه ی مربعات متحرک وزنی برای تولید توابع شکل استفاده می شود. در ادامه نحوه تولید توابع شکل MLS ارائه می شود.

۳- کمینه ی مربعات متحرک وزنی برای محاسبه توابع شکل

در روش کمینه مربعات متحرک، تابع تخمین زننده $u^h(x)$

به وسیله ی حاصل ضرب داخلی یک بردار چند جمله ای $p(x)$ در یک بردار ضرایب $a(x)$ حاصل می شود.

$$u^h(x) = p^T(x) a(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \quad (9)$$

در رابطه (۹)، m تعداد تک جمله ای های است که داخل بردار چند جمله ای $p(x)$ به کار رفته اند. برای تعیین ضرایب مجهول $a(x)$ ابتدا تابع وزن دار $J(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) \cdot [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2 \quad (10)$$

در رابطه بالا $w_i(x)$ نشان دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گرهی i و مقدار داخل کلوشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه i و مقدار داده شده در همان نقطه می باشد. همچنین n تعداد نقاط در حوزه اثر تابع w است. تابع وزن $w_i(x) = w(x - x_i) = w(d)$ مقادیر غیر صفری در حوزه تأثیر خود خواهد داشت.

برای هر نقطه، $d_{\max}$ باید به گونه ای انتخاب شود که تعداد وزن های غیر صفر، بزرگ تر از تعداد تک جمله های موجود در چند جمله ای باشند. در این پژوهش از تابع وزنی اسپیلاین مرتبه سوم که در رابطه (۱۱) آمده است به عنوان تابع وزنی استفاده شده است.

$$w(x - x_j) = w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2} \leq \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، $\bar{d} = \|x - x_j\| / d_{\max}$ و $d_{\max}$ شعاع تأثیر نقطه گرهی x_j است.

رابطه (۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

1- Moving Least Square
2- Radial Point Interpolation Method

۴- الگوریتم گسسته‌سازی معادلات هذلولوی

شکل دیورژانس دستگاه معادلات دیفرانسیلی هذلولوی تحت شرایط مرزی و آغازین به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\underline{U}_{,t} + \underline{F}_{,x} = \underline{G}\underline{U} \quad (22)$$

در این جا $\underline{U}$ بردار مجهولات، $\underline{F}$ بردار مقادیر شار به صورت تابعی از $\underline{U}$ ، و $\underline{G}$ ماتریس ضرایب ثابت در سمت راست است. شکل شبه خطی معادله بالا به صورت زیر است.

$$\underline{U}_{,t} + \underline{A}\underline{U}_{,x} = \underline{G}\underline{U} \quad (23)$$

که در آن $\underline{A} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}}$ ماتریس ژاکوبین است. با به کارگیری گسسته‌سازی پسر و در زمان برای معادله بالا داریم:

$$\underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n + \Delta t \left[\theta (\underline{A}^{n+1} \underline{U}_{,x}^{n+1} - \underline{G} \underline{U}^{n+1}) + (1-\theta)(\underline{A}^n \underline{U}_{,x}^n - \underline{G} \underline{U}^n) \right] = 0 \quad (24)$$

$$\Delta \underline{U} = \underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n \quad (25)$$

$$\Delta \underline{U}(x_k) = \sum_{i=1}^n N_i(x_k) \Delta U_i \quad (26)$$

با جای گذاری $\underline{A}^n$ به جای $\underline{A}^{n+1}$ بمنظور خطی سازی و جای گذاری رابطه (۲۶) در (۲۴)، میزان باقی مانده در گام زمانی $n+1$ در یک نقطه همپوش به دست می‌آید.

$$\underline{R}^{n+1} = \Delta \underline{U} + \Delta t \left[\theta (\underline{A}^n (\underline{U}_{,x}^n + \Delta \underline{U}_{,x}) - \underline{G} (\underline{U}^n + \Delta \underline{U})) + (1-\theta)(\underline{A}^n \underline{U}_{,x}^n - \underline{G} \underline{U}^n) \right] \neq 0 \quad (27)$$

تابع J برای کلیه نقاط حوزه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$J = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{M_d} [R_k^{(d),(n+1)}]^2 + \alpha \sum_{k=1}^{M_t} [R_k^{(t),(n+1)}]^2 + \beta \sum_{k=1}^{M_u} [R_k^{(u),(n+1)}]^2 \right) \quad (28)$$

در رابطه بالا M_d تعداد نقاط همپوش در حوزه مسئله،

$$J = (P a - u)^T W (P a - u) \quad (12)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} w(|x-x_1|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(|x-x_2|) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(|x-x_n|) \end{bmatrix} \quad (14)$$

برای پیدا کردن ضرایب نقاط کافیت اکسترمم تابع J محاسبه شود.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial a} = A(x) a(x) - B(x) u = 0 \quad (15)$$

$$A(x) = P^T W P \quad (16)$$

$$B(x) = P^T W \quad (17)$$

بنابراین می توان ضرائب $a(x)$ را طبق رابطه زیر یافت:

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (18)$$

حال تابع تخمین زننده $u^h(x)$ را می توان طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (19)$$

$$\phi = P^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (20)$$

$$\phi = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)] \quad (21)$$

که در آن ϕ ها توابع شکل MLS است.

همچنین مشتقات توابع شکل با معلوم بودن خود توابع به راحتی به دست می آیند.

محدودیت ذخیره سازی اطلاعات در هر مرحله از فرایند محاسبات است. خطای دوم را می توان با توجه به پیشرفت روز افزون کامپیوترها حداقل کرد. در این بخش خطای گسسته سازی حاصل از به کارگیری فرایند تقریبی بررسی می شود. اولین منبع خطا در روش بدون شبکه CDLS، خطای حاصل از تقریب تابع با استفاده توابع آزمونی است.

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_k) \bar{u}_i \quad (29)$$

طبق رابطه بالا در روش CDLS و سایر روش های بدون شبکه برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه فرضی مانند x_k از درونیابی مقادیر گره ای استفاده می شود که این امر یکی از مهم ترین منابع به وجود آورنده خطا است. واضح است که هرچه تعداد نقاط گره ای افزایش یابد مقدار این خطا کمتر خواهد شد. دومین عامل خطا در روش CDLS از رابطه (۸) به دست می آید. مشاهده می شود که تنها تعداد محدودی از نقاط تحت عنوان نقاط همپوش در تشکیل تابع J نقش دارند. بنابراین محدود بودن تعداد نقاط همپوش در تشکیل تابع J را نیز می توان به عنوان یکی دیگر از عوامل به وجود آورنده خطا نام برد. برای کاهش خطا در این حالت باید تعداد نقاط همپوش را افزایش داد.

۵-۲- برآورد کننده خطا در روش CDLS

برآورد کننده های خطا ابزاری مهم در هر فرایند تقریب تطبیقی است. با آگاهی از چگونگی توزیع خطاها می توان فرایند تقریب را به طور مناسب و خودکار انجام داد. این فرایند تقریب تطبیقی خوانده می شود. در روش بدون شبکه CDLS از مقدار تابع J که در رابطه (۲۸) آورده شده است در هر نقطه همپوش به عنوان معیاری برای خطا در آن نقطه استفاده می شود. واضح است که هرچه مقدار J کمتر باشد مقدار خطا نیز کمتر خواهد بود. برای بررسی

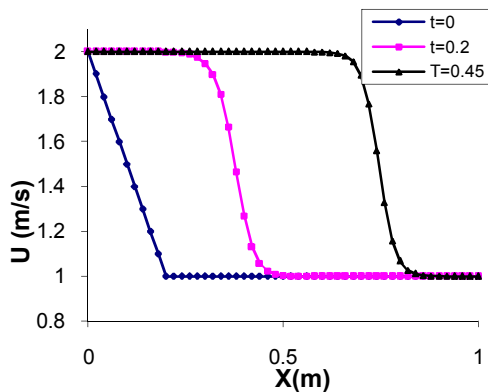
و M_n تعداد نقاط همپوش در مرز طبیعی M_i تعداد نقاط همپوش در مرز مشتقی و R_k^{n+1} مقدار باقی مانده در نقطه همپوش k ام است. با مشتق گرفتن از تابع J نسبت به Δu_i به راحتی می توان به یک دستگاه معادلات متقارن $n \times n$ دست یافت و مجهولات را در گام زمانی $n+1$ ام یافت.

۵-۳ برآورد خطا

استفاده از روش های تقریبی مستلزم آگاهی از بزرگی خطاهای احتمالی است. شرایط مطلوب آن است که بتوان اطمینان حاصل کرد که مقدار خطا به ازای هر جواب فرضی از میزان معینی که قابل محاسبه است، فراتر نمی رود و در واقع این مقدار محاسبه شده، خود تخمین معقولی از خطای واقعی است. این امر امکان تظریف نتایج تا رسیدن به یک دقت فرضی از پیش تعیین شده را فراهم می کند و در عین حال اعتماد کاربر را به فرایندهای تقریب افزایش می دهد. این هدف در آغاز ایده آل به نظر می رسد؛ ولی پیشرفت های قابل توجهی در این زمینه حاصل شده است و امروزه می توان عملاً از فرایند برآورد خطا در محاسبات عددی واقعی استفاده کرد. با چنین برآوردی امکان تصمیم گیری در مورد توقف و یا ادامه محاسبات برای تظریف بیشتر نتایج فراهم می شود.

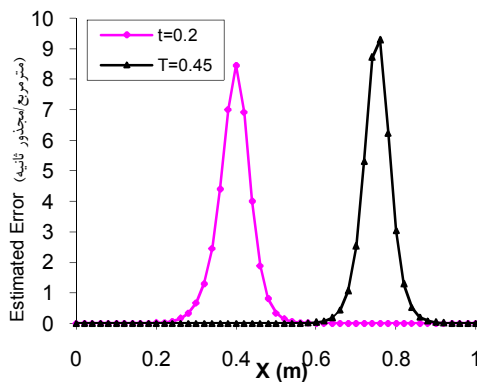
۵-۱- منابع خطا در روش CDLS

جواب های تقریبی حاصل از یک روش تقریبی دو نوع خطا دارد، اولین و مهم ترین آن ها خطایی است که با استفاده از تقریب توابع آزمونی به وجود می آید و خطای گسسته سازی نامیده می شود. این خطا در حقیقت ناشی از تأمین نشدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر حوزه مسئله و شرایط مرزی آن به وسیله تقریب توابع آزمونی است. خطای دوم خطای گرد کردن است. این خطا ناشی از



شکل (۲) جواب‌های روش CDLS برای مسئله اول

در شکل زیر خطای برآورد شده برای جواب‌های مسئله بالا آمده است.



شکل (۳) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله اول به وسیله‌ی برآورد کننده خطای ارائه شده

در شکل (۳) بیشترین مقدار خطا در حل معادله برگرد در زمان‌های ۰/۲ و ۰/۴۵ ثانیه به ترتیب در نقاط ۰/۴ و ۰/۷۵ مشاهده می‌شود. با توجه به جواب‌های روش عددی که در شکل (۲) آمده است می‌توان صحت این جواب‌ها را دریافت.

مسئله دوم: مسئله شکست سد

معادله دیفرانسیل حاکم بر این مسئله با معادله آب‌های کم عمق بیان می‌شود که در ادامه آمده است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(u)$$

on $\Omega: 0 < x < 40$

کارایی این برآورد کننده خطا، مسائل برگرد غیرخطی، شکست سد و پشته کردن امواج، ابتدا با روش CDLS حل شده، سپس خطای برآورد شده برای لحظاتی خاص نشان داده شده است. تعریف پارامترهای به کاررفته در حل مسائل به صورت زیر است:

n : تعداد نقاط گرهی است که به صورت یکنواخت در حوزه مسئله قرار گرفته‌اند.

col : تعداد نقاط همپوش است. در این پژوهش همواره فرض می‌شود n نقطه از نقاط همپوش روی نقاط گرهی قرار دارد.

dm : شعاع تأثیر نقاط گرهی است.

p : درجه تابع پایه به کاررفته برای محاسبه توابع شکل است. به عنوان مثال $p=2$ یعنی $P = [1 \ x \ x^2]$.
 θ : پارامتر استفاده شده در گسسته سازی زمانی است و مقدار آن بین ۰/۵ تا ۱ است.

dt : فواصل زمانی برای گسسته سازی زمانی است.

مسئله اول: معادله غیرخطی برگرد

معادله دیفرانسیل حاکم بر این مسئله به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (30)$$

شرایط مرزی و آغازین به صورت زیر آمده است

$$u(x, t=0) = 2 - 5x \quad 0 \leq x \leq 0.2$$

$$u(x, t=0) = 1 \quad 0.2 \leq x \leq 1$$

پارامترهای حل مسئله در ادامه آمده است.

$$col = 51, \quad n = 81, \quad dm = 0.05,$$

$$p = 1, \quad \theta = 1, \quad dt = 0.02$$

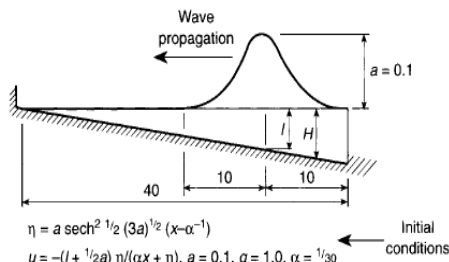
جواب‌های مسئله در زمان‌های ۰/۲ و ۰/۴۵ ثانیه به

صورت زیر است:

در شکل (۵) مشاهده می شود برآوردکننده خطا مقدار خطا را ۵ ثانیه بعد از شکست سد، بین فواصل ۲۵ تا ۳۰ متری و ۷/۵ تا ۲۰ متری بیشتر از سایر مناطق نشان می دهد. با مشاهده جواب های مسئله شکست سد می توان دریافت بعد از ۵ ثانیه در ۲۵ تا ۳۰ متری یک موج مثبت و در فواصل ۷/۵ تا ۲۰ متری یک موج منفی تشکیل خواهد شد. بنابراین منطقی به نظر می رسد که حل عددی در این فواصل خطای بزرگ تری نسبت به سایر مناطق داشته باشد.

مسئله سوم: مسئله پشته کردن امواج

در این مسئله معادله امواج نزدیک شونده به ساحل بررسی می شود. معادلات حاکم بر این مسئله مشابه مسئله شکست سد است و تنها تأثیر شیب بستر در مقدار سمت راست دستگاه معادلات دیفرانسیل لحاظ شده است. شرایط آغازین و همچنین سایر پارامترها در شکل (۶) آمده است.



شکل (۶) شرایط آغازین مسئله پشته کردن امواج

پارامترهای حل مسئله به این صورت است:

$$\begin{aligned} col &= 81, n = 81, dm = 1.5 \\ p &= 1, \theta = 1, dt = 0.25 \end{aligned}$$

جواب های مسئله در زمان های ۱۰ و ۲۰ ثانیه برای عمق آب به صورت شکل (۷) است:

در شکل (۸)، خطای برآورد شده برای عمق آب در زمان های ۱۰ و ۲۰ ثانیه نشان داده شده است.

در شکل (۸) مشاهده می شود برآوردکننده خطا مقدار خطا را بعد از ۲۰ ثانیه از شکل گیری موج اولیه، بین فواصل

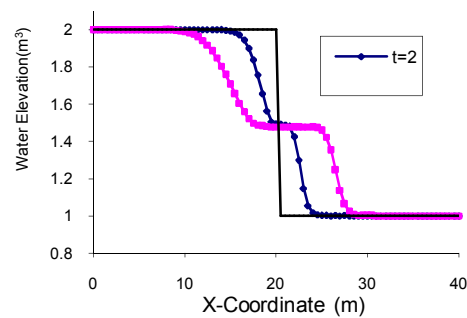
$$u = \begin{bmatrix} H + \eta \\ (H + \eta)u \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + g(H + \eta) & 2u \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ g(H + \eta) \frac{dH}{dx} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در رابطه بالا H عمق، η تراز سطح آب، u سرعت و g شتاب ثقل است. مقادیر H و g برابر واحد و $\frac{dH}{dx}$ که معرف شیب بستر است برابر صفر فرض می شود. پارامترهای حل مسئله به صورت زیر است:

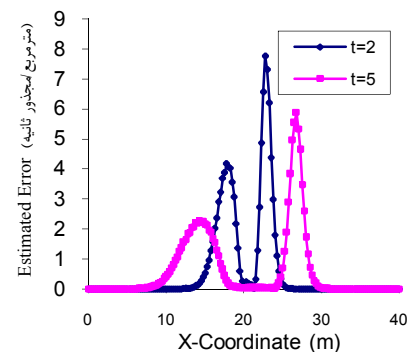
$$\begin{aligned} col &= 81, n = 81, dm = 1.5 \\ p &= 1, \theta = 1, dt = 0.25 \end{aligned}$$

جواب های مسئله در زمان های ۲ و ۵ ثانیه برای عمق آب به صورت زیر است:



شکل (۸) جواب های روش CDLS برای مسئله دوم

در شکل زیر خطای برآورد شده در زمان های ۲ و ۵ ثانیه آمده است.



شکل (۹) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله دوم به وسیله برآوردکننده خطای ارائه شده

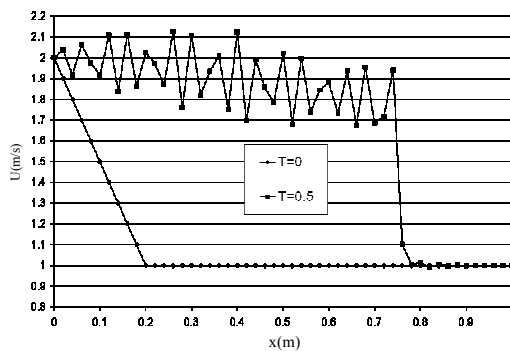
شده است. با استفاده از فرایندی که در این بخش شرح داده شده است، می‌توان معیاری برای انتخاب تعداد نقاط همپوش کافی به دست آورد.

مسئله چهارم:

در این مسئله معادله غیرخطی برگر تا زمان $t=0.5$ s و ایجاد پدیده شوک بررسی می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله و شرایط مرزی و اولیه در مسئله اول در بخش قبل آمده است. پارامترهای حل به صورت زیر است.

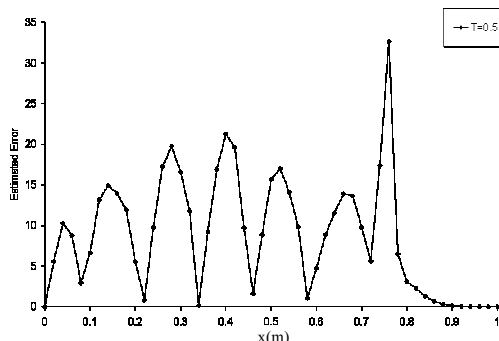
$$\begin{aligned} col &= 51, \quad n = 51, \quad dm = 0.025 \\ p &= 1, \quad \theta = 0.5, \quad dt = 0.01 \end{aligned}$$

جواب‌های مسئله در این مرحله در شکل (۹) آمده است.



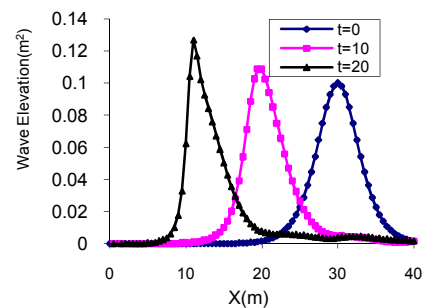
شکل (۹) جواب‌های مسئله چهارم در مرحله اول

همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب دارای نوسانات شدیدی است. خطای برآورد شده برای نقاط گرهی در این مرحله در لحظه ۰/۵ ثانیه در شکل (۱۰) آمده است.

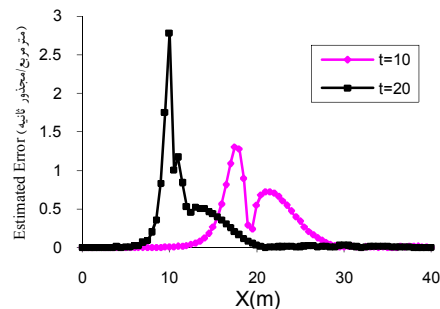


شکل (۱۰) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله چهارم در مرحله اول

۲۰ تا ۵ متری بیشتر از سایر مناطق نشان می‌دهد. با مشاهده جواب‌های مسئله پشته کردن امواج که در شکل (۷) آمده است، می‌توان دریافت ۲۰ ثانیه بعد از شکل‌گیری موج اولیه، موج به ناحیه ۲۰ تا ۵ متری می‌رسد. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد همان‌طور که برآورد کننده خطا نشان داده است، حل عددی در این فواصل خطای بزرگ‌تری نسبت به سایر مناطق داشته باشد.



شکل (۷) جواب‌های روش CDLS برای مسئله سوم

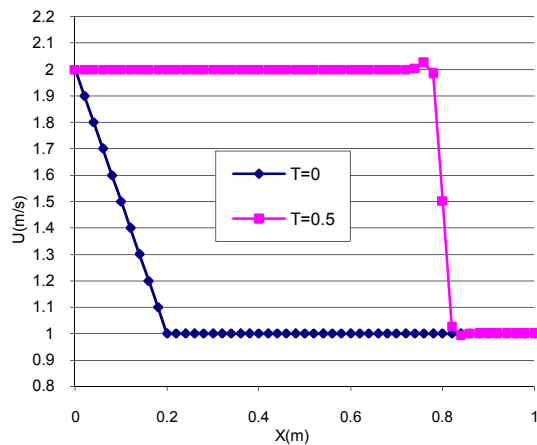


شکل (۸) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله سوم به وسیلهی برآورد کننده خطای ارائه شده

۶- بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جواب‌های روش CDLS با استفاده از برآورد کننده خطای معرفی شده

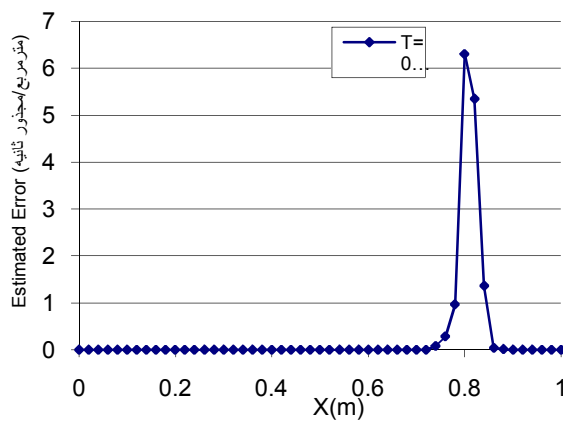
در این قسمت با استفاده از برآورد کننده خطای ارائه شده به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در روش CDLS، پرداخته شده است. در مثال‌های زیر مساحت زیر نمودار خطا به عنوان معیاری کمی از خطای روش در کل حوزه آورده

که مشاهده میشود جوابهای مسئله بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته‌اند که برآوردکننده خطا نیز مؤید این مطلب است. در مرحله بعد از ۵۰۱ نقطه همپوش که ۵۱ نقطه از آنها منطبق بر نقاط گرهی است و به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته است استفاده شده و نتایج اعمال این نقاط همپوش در شکل (۱۳) آمده است.



شکل (۱۳) جوابهای مسئله چهارم در مرحله سوم

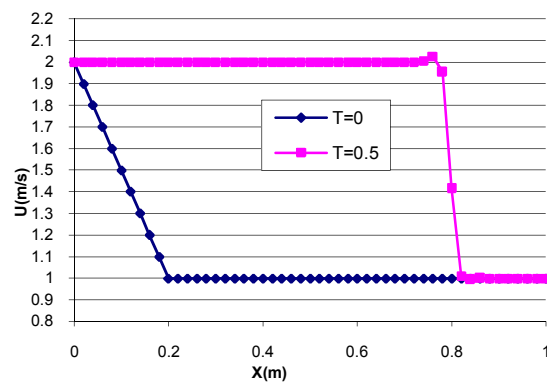
در شکل (۱۴) نتایج برآورد کننده خطا برای این مرحله آمده است.



شکل (۱۴) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله چهارم در مرحله سوم

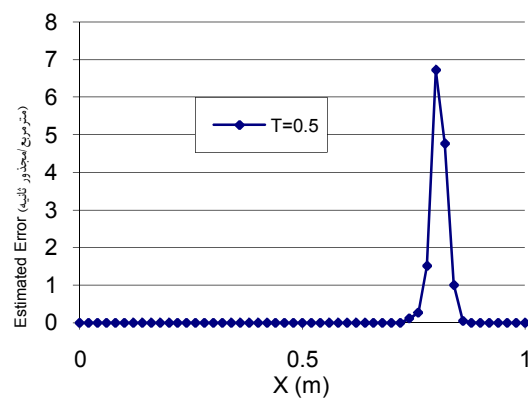
مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۲۸ محاسبه شده است. در جدول زیر مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد

مقدار خطای روش در این مرحله که همان سطح زیر نمودار تابع خطا است برابر ۸/۸۵ محاسبه شده است. برای بررسی اثر نقاط همپوش بر جوابها، در مرحله بعد از ۳۰۱ نقطه همپوش که ۵۱ نقطه از آنها منطبق بر نقاط گرهی است و به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته است استفاده شد. نتایج اعمال این نقاط همپوش در شکل (۱۱) آمده است.



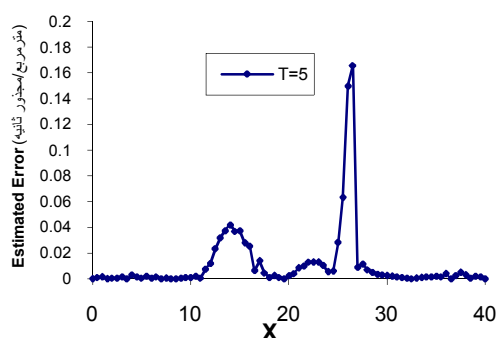
شکل (۱۱) جوابهای مسئله چهارم در مرحله دوم

خطای برآورد شده برای نقاط گرهی در این مرحله در لحظه ۰/۵ ثانیه در شکل (۱۲) آمده است.



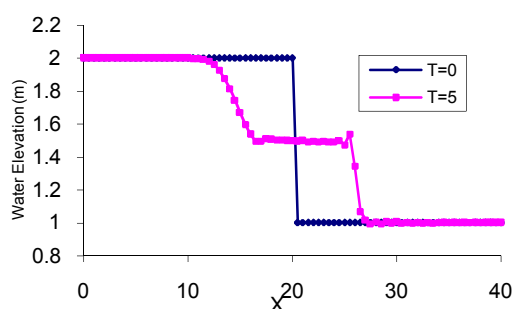
شکل (۱۲) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله چهارم در مرحله دوم

مقدار خطای روش در این مرحله که همان سطح زیر نمودار تابع خطا است ۰/۲۹ محاسبه شده است. همانطور



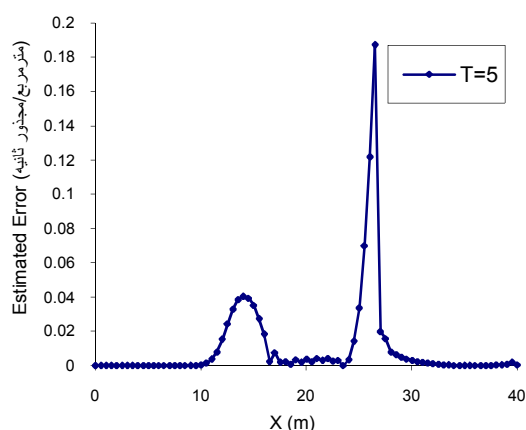
شکل (۱۶) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله پنجم در مرحله اول

مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۴۵۲ محاسبه شده است. حال برای حل مسئله از ۱۶۱ نقطه همپوش استفاده شده است. نتایج اثر اعمال این نقاط همپوش در شکل (۱۷) آمده است.



شکل (۱۷) جوابهای مسئله پنجم در مرحله دوم

خطای برآورد شده برای این مرحله در شکل (۱۸) آمده است.



شکل (۱۸) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله پنجم در مرحله دوم

نقاط همپوش به کار گرفته شده آورده شده است.

جدول (۱) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله چهارم

Collocation Number	Estimated Error
51	8.85
301	0.29
501	0.28

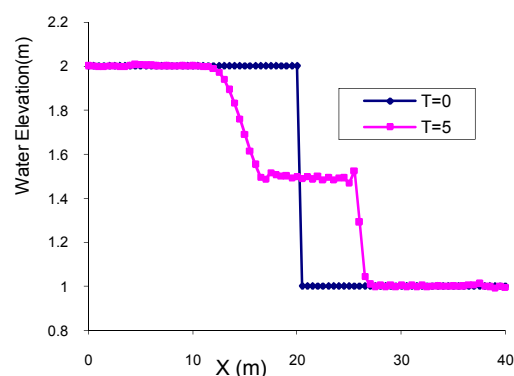
با توجه به جدول بالا می توان دریافت افزایش نقاط همپوش تا حدی بسیار مؤثر بوده و بعد از آن هرچه تعداد آنها بیشتر شود، دیگر تأثیر قابل ملاحظه ای بر جوابها ندارند. به طوری که با افزایش تعداد این نقاط از ۳۰۱ به ۵۰۱ جوابهای این مسئله تنها اندکی بهبود یافته است که با مقایسه بین شکل های (۱۱) و (۱۳) می توان صحت این امر را یافت.

مسئله پنجم:

در این مسئله معادله شکست سدی که قبلا در مسئله دوم حل شده است بررسی می شود. در ابتدا برای حل مسئله از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$col = 81, n = 81, dm = 1.5 \\ p = 1, \theta = 0.6, dt = 0.25$$

در شکل (۱۵) جوابها به ازای این پارامترها آمده است.



شکل (۱۵) جوابهای مسئله پنجم در مرحله اول

در شکل (۱۶) خطاهای برآورد شده برای حل بالا آمده است.

همپوش، جواب‌های این مسئله اندکی بهبود یافته ولی انتظار نمی‌رود با افزایش بیشتر نقاط همپوش، کاهش چشم‌گیری در مقدار خطای حل عددی حاصل شود.

جدول (۲) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله پنجم

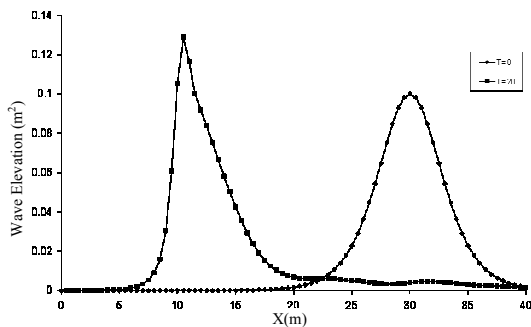
Collocation Number	Estimated Error
81	0.452
161	0.419
321	0.416

مسئله ششم:

در این مسئله معادله امواج نزدیک‌شونده به ساحل بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر این مسئله و شرایط آغازین و مرزی آن در مسئله سوم آمده است. در ابتدا برای حل مسئله از پارامترهای زیر استفاده شده است.

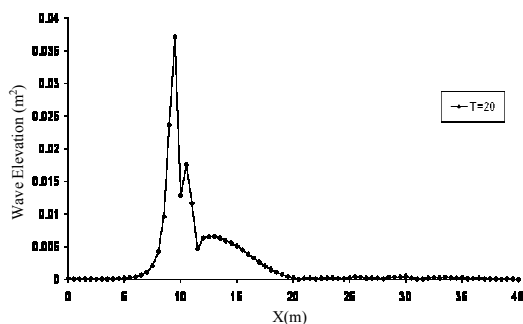
$$col = 81, n = 81, dm = 1.5$$

$$p = 1, \theta = 0.5, dt = 0.5$$



شکل (۲۱) جواب‌های مسئله ششم در مرحله اول

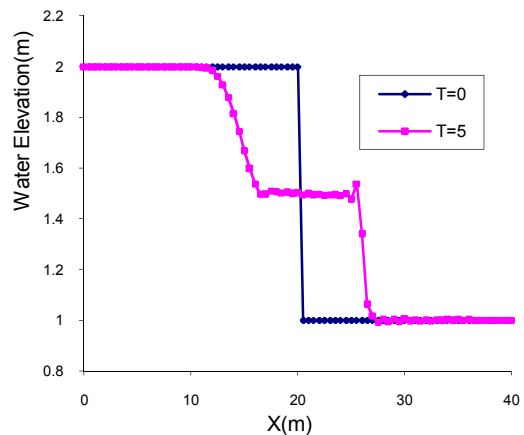
خطای برآورد شده برای مرحله اول به صورت شکل زیر است.



شکل (۲۲) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله ششم در مرحله اول

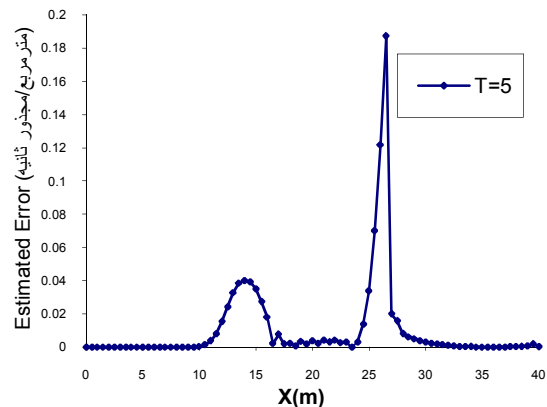
مقدار خطای روش ۰/۴۱۹ محاسبه شده است.

در مرحله سوم از ۳۲۱ نقطه همپوش که به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته استفاده شده است. جواب‌های این مرحله در شکل (۱۹) آمده است.



شکل (۱۹) جواب‌های مسئله پنجم در مرحله سوم

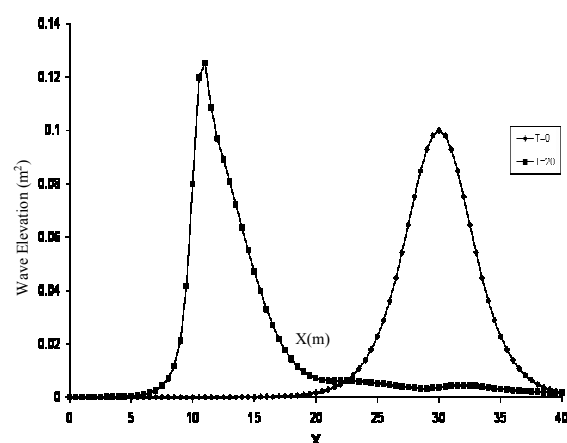
خطای برآورد شده برای این مرحله به صورت شکل زیر است.



شکل (۲۰) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله پنجم در مرحله سوم

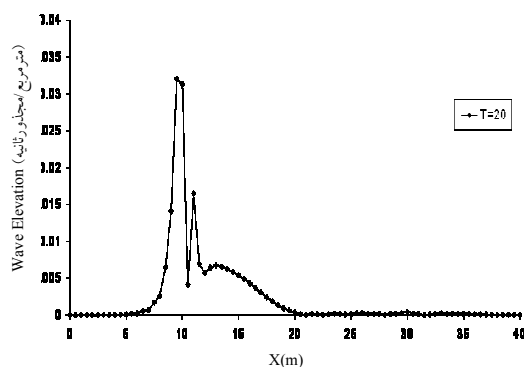
مقدار خطای روش ۰/۴۱۶ محاسبه شده است.

در جدول (۲)، مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد نقاط همپوش به کار گرفته شده آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط



شکل (۲۵) جواب‌های مسئله ششم در مرحله سوم

خطای برآوردشده برای این مرحله به صورت شکل زیر است.



شکل (۲۶) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله ششم در مرحله سوم

مقدار خطای روش ۰/۰۹۵۲ محاسبه شده است. در جدول زیر مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد نقاط همپوش به کار گرفته شده آمده است.

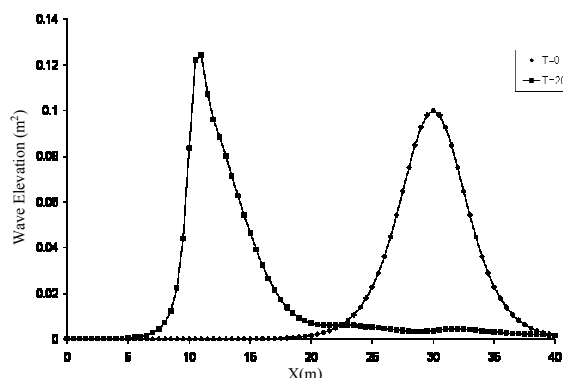
جدول (۳) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله پنجم

Collocation Number	Estimated Error
81	0.0973
161	0.0963
321	0.0952

۶- نتیجه گیری

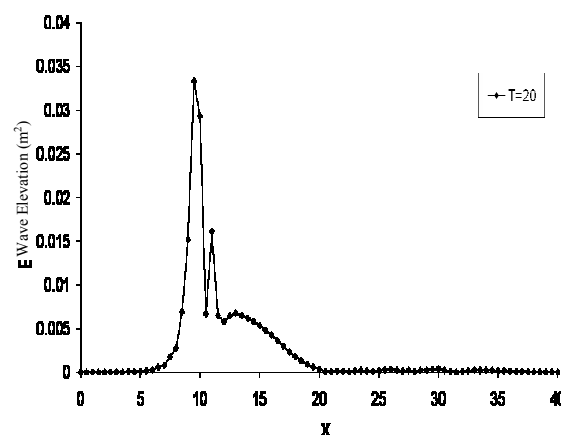
روش‌های بدون شبکه به عنوان نوین ترین روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل، در سال‌های اخیر توجه

مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۹۷۳ محاسبه شده است. در مرحله بعد، از ۱۶۱ نقطه همپوش استفاده شده است. جواب‌های مسئله بعد از اضافه کردن این نقاط همپوش در شکل (۲۳) آمده است.



شکل (۲۳) جواب‌های مسئله ششم در مرحله دوم

خطای برآوردشده برای مرحله اول در شکل (۲۴) آمده است.



شکل (۲۴) خطاهای تخمین زده شده برای مسئله ششم در مرحله دوم

مقدار خطای روش در این مرحله برابر ۰/۰۹۶۳ محاسبه شده است. در مرحله سوم از ۳۲۱ نقطه همپوش استفاده شده است. اثر اعمال این نقاط همپوش در نتایج در شکل (۲۵) آمده است.

- and diffuse element" *Coput. Mech.* Vol.10, 307-318 (1992)
- [3] Belytschko T, Lu YY, Gu L "Element-free Galerkin methods." *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol 37, 229-256 (1994)
- [4] Liu WK, Jun S, Zhang Y "Reproducing kernel particle Methods." *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol.20,1081-1106 (1995)
- [5] Melenk J.M., Babuska I. "The partition of unity finite element method: basic theory and applications." *Comput. Methods Appl.Mech. Engrg.* Vol.139, 289-314 (1999)
- [6] Duarte C.A., Oden J.T. "HP clouds a meshless method to solve boundary-value problems." Technical Report 95-05, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Texas at Austin, (1996).
- [7] Atluri SN, Kim HG, Cho JY "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods." *Comput. Mech.* Vol. 24, 348-372 (1999)
- [8] حامد ارزانی، محمد هادی افشار و محمد نجمائی "روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل جابجائی-پخش" نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، دانشگاه علم و صنعت ایران، ویژه‌نامه مهندسی عمران شماره ۲، جلد ۱۸، تابستان ۱۳۸۶، صص ۹-۱.
- [9] Liu G.R., Tu Z.H "An adaptive procedure based on background cells for meshless methods" *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 191, 1923-1943 (2002)
- [10] Gavete L. , Falcon S. , Ruiz A. " An error indicator for the element free Galerkin method" *Eur.J.Mech.A/solids.* Vol. 20, 327-341 (2000)
- [11] Behrens, A. Iske and M. Kaser, Adaptive meshfree method of backward characteristic for non linear transport equations. In: M. Griebel and M.A. Schweitzer, Editors, *Meshfree Methods for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Heidelberg pp. 21-26. (2002)
- [12] Elansari M., Ouazar D. " On the a-priori error analysis and convergence of meshless BEM "
- بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. هدف این مقاله اضافه کردن یک قابلیت پرکاربرد و مؤثر دیگر به این روش بدون شبکه است که همان برآورد کردن خطا است برآورد کننده‌های خطا در روش‌های عددی ابزاری کارآمد برای اطمینان از جهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. برای این منظور از مقدار باقی‌مانده در هر نقطه گرهی به عنوان معیاری برای خطای آن نقطه استفاده شده است. به همین دلیل این برآوردکننده خطا تقریباً نیاز به هیچگونه هزینه محاسباتی اضافی ندارد. برای نشان دادن صحت عملکرد این برآوردکننده خطا سه مسئله نمونه (برگر غیرخطی، شکست سد و پشته کردن امواج) ابتدا با روش CDLS حل شده و سپس خطای تخمین‌زده‌شده برای هر نقطه محاسبه شده و نشان داده شده است. نتایج نشان‌دهنده صحت عملکرد برآوردکننده خطای ارائه‌شده است. در بخش بعدی این مقاله با استفاده از برآوردکننده خطای ارائه‌شده، به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در جواب‌های مسئله پرداخته شده است. نتایج نشان‌دهنده بهبود جواب‌ها و کاهش مقدار خطا با افزایش تعداد نقاط همپوش است. همچنین نتایج مؤید این مطلب است که افزایش نقاط همپوش تا حدی در بهبود جواب‌ها مؤثر است ولی برای کم کردن محسوس مقدار خطا، باید از روش‌های دیگری استفاده کرد. برای مثال می‌توان با استفاده از فرایند تطریف تطبیقی از نقاط گرهی بیشتری در نواحی که خطای بیشتری دارند استفاده کرد.
- ## ۷- منابع
- [1] Gingold R.A., Moraghan J.J. "Smooth Particle Hydrodynamics: theory and application to non spherical stars." *Man.Not.Roy.Astron.Soc.* Vol.181, 375-389 (1977)
- [2] Nayroles B., Touzot. G., Villon.P "Generalizing the finite element method diffuse approximation

- [16] Lancaster P, Salkauskas K. " Curve and Surface Fitting Introduction." Academic Press. (1986)
- [17] Liu GR, Gu YT . " A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analyses of 2-D solids." J. Sound Vibration 246(1): 29–46 (2001)
- [18] Gu Lei "Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method." Int.J. Numerical. Meth. Eng. Vol. 56:1– 11 (2003)
- Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 30, 588–597 (2006)
- [13] Cheng R., Cheng Y. " Error estimates for the finite point method" Applied Numerical Mathematics. Article in press
- [14] Huang C. S., Lee C.F., Cheng A.H. D. "Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method" Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 31, 614–623 (2007)
- [15] Zhijie C. "Convergence and error estimates for meshless Galerkin methods " Applied Mathematics and Computation Vol. 184, 908–916 (2007)

Proposing an Error Estimator for Collocated Discreet Least Square (CDLS) Meshless Method

M.H. Afshar^{1*}, M. Lashckarbolok²

1- Assistant Professor, Civil Eng. Faculty, Iran University of Science and Technology

2- M.Sc. Student of Civil Eng. Faculty, Iran University of Science and Technology

mhafshar@iust.ac.ir

Abstract:

The error estimation should be a main tool in every adaptivity process. This is the reason for the great importance of the estimation. It allows us to know the quality of the solution, and hence, if it is acceptable or not. Moreover, it provides some information about the changes that are necessary to be made in the mathematical model to reach, in an economic way, the desired solution. In this paper, a new error estimator for solving the hyperbolic problems to be used in conjunction with the Collocated Discreet Least Square Meshless (CDLS) method is presented. The error estimator is shown to be naturally related to the least-squares method, providing a suitable measure of the errors in the solution. The estimator is easily calculated by the use of already existing matrices of the least-squares computation, hence, it is very cheap. The proposed error estimator was implemented with CDLS method to solve three benchmark examples from the literature and the effect of collocation points on them was investigated. These examples are nonlinear burgers equation, dam break problem and the problem of shoaling a wave on sloping shallow waters. The results showed that the error estimator works very well in all numerical examples.

Keywords: Meshless method, Error estimator, Collocation points, Hyperbolic equations.