مجله علمی- پژوهشی مهندسی عمران مدرس
دوره ۲۵، شماره ۲، سال ۱۴۰۴
صفحات ۱۰۱ تا ۱۱۴

# پاسخ فرم‌بسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک با تکنیک لنگرمعادل

طوبی مکارمی[1]، وحید اکرمی[2*]

۱. کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی
۲. دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی

* رایانامه نویسنده مسئول: v.akrami@uma.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۹ - تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۳۰

**چکیده**

تیرهای قرار گرفته روی بستر الاستیک، کاربرد گسترده‌ای در شبیه‌سازی بخش عمده‌ای از سازه‌های مکانیکی و عمرانی دارند. رفتار کمانشی این تیرها شامل بار و شکل مود کمانشی، به دلیل بارهای وارد از سوی بستر الاستیک که متناسب با خیز تیر می‌باشند، متفاوت با تیرهای معمولی هستند. این نوع تیرها به دلیل ماهیت عملکردی خود عموما تحت بارهای تکرارشونده (مانند خطوط ریلی) و شرایط محیطی شدید (مانند شمع‌ها و خطوط لوله مدفون) قرار داشته و مستعد بروز آسیب‌هایی مانند ترک می‌باشند. وجود این نقص‌ها در طول عضو می‌تواند باعث خرابی زود هنگام این المان‌های سازه‌ای به دلیل بروز کمانش در محل آسیب‌دیده شود. برای اطمینان از ایمنی چنین سازه‌هایی، بررسی پایداری آنها با در نظر گرفتن نقص‌های سازه‌ای حائز اهمیت می‌باشد. در همین راستا، مقاله حاضر روش جدیدی را برای محاسبه پاسخ فرم‌بسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک ارائه می‌دهد. در روش پیشنهادی از یک لنگر متمرکز به منظور مدلسازی ترک و ایجاد تفاوت شیب ناشی از ترک در محل آسیب استفاده می‌شود. در ادامه معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر پیوسته با شرایط تکیه‌گاهی ساده استخراج شده و با استفاده از بسط فوریه تابع خیز و محاسبه مقدار لنگر اعمالی، پاسخ فرم‌بسته‌ای برای محاسبه کمانش تیر روی بستر الاستیک ارائه می‌شود. استفاده از این تکنیک به منظور مدلسازی ترک باعث سهولت در حل معادلات دیفرانسیل تیر و دستیابی به رابطه‌ای فرم‌بسته برای محاسبه بار کمانش تیر می‌شود. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند سختی خمشی تیر، طول تیر، عمق ترک و سختی بستر بر بار کمانش تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. به منظور بررسی درستی حل ارائه شده، جواب‌های بدست آمده از حل فرم‌بسته معادلات با پاسخ مسائل ساده شده‌ای که حل دقیق آنها موجود می‌باشد و همچنین نتایج حاصل از مدل‌های المان محدود مقایسه شده است که این مقایسه موید دقت محاسبات انجام شده می‌باشد. با توجه به اینکه پاسخ‌های موجود فعلی برای مسئله کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک بیشتربه صورت عددی و یا المان‌محدود می‌باشند، پاسخ فرم‌بسته ارائه شده در این تحقیق می‌تواند کمک شایانی به افزایش دقت و سهولت محاسبات در روند طراحی و تحلیل چنین سازه‌هایی نماید..

**کلمات کلیدی:** تیر روی بستر الاستیک، ترک، بار کمانش، معادله دیفرانسیل، بسط فوریه، تحلیل المان محدود.

## ۱- مقدمه

به عنوان یک عنصر اساسی در سازه‌های مهندسی، تیرهایی با بستر الاستیک به طور گسترده در سازه‌های صنعتی و عمرانی استفاده می‌شوند [1, 2]. همچنین سازه‌هایی که در آن‌ها یک المان سازه‌ای روی زمین یا زیر آن قرار می‌گیرد، مانند: خطوط لوله مدفون، شمع‌های سازه‌ای و خطوط ریل راه‌آهن‌ها، از سری مسائل مربوط به اندرکنش خاک و سازه هستند که با توجه به هندسه‌ی سیستم می‌توانند به عنوان یک مدل تیر روی بستر الاستیک ساده شوند [1]. در بین آسیب‌های محتمل وارد به سیستم‌های سازه‌ای، ترک یکی از رایج ترین عیوب در سازه‌ها است. وجود ترک در سازه چه در زمان ساخت و چه در طول دوره‌ی بهره‌برداری و خدمت‌رسانی، ممکن است رخ دهد. این امر می‌تواند در طول زمان منجر به کاهش مقاومت موضعی و حتی شکست ناگهانی سازه‌ها شود که تهدیدی بزرگ برای ایمنی سازه به‌حساب می‌آید [3, 4]. برای اطمینان از ایمنی سازه‌ها، بررسی پایداری چنین اعضای سازه‌ای حائز اهمیت می‌باشد [5]. از این رو در سال‌های اخیر این




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

موضوع مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است.

در بررسی رفتار تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک، سه جزء کلیدی: تیرها، بسترهای الاستیک و ترک‌ها باید به درستی مدل‌سازی شوند. تیر اویلر–برنولی[1] به طور گسترده برای مدل‌سازی خمش، کمانش، ارتعاش و سایر پدیده‌ها، مورد استفاده قرار گرفته و می‌توان آن را در حل‌های تحلیلی، تقریبی و عددی گنجاند [2]. از مدل‌های پیشنهاد شده در مطالعات مختلف که برای شبیه‌سازی بسترهایی مانند خاک به کار می‌روند، می‌توان به مدل خطی (وینکلر[2]، فیلوننکو–بورودیچ[3]، هتنی[4]، پاسترناک[5]، رایسنر[6]، ولازوف و لئونتیف[7]، مدل کر[8]) و مدل غیرخطی (الاستوپلاستیک، دوخطی، چاندرا[9]، کوندنر[10]) اشاره نمود. همه این مدل‌ها از نظر ریاضی معادل هستند و فقط در پارامترهای پایه با هم تفاوت دارند [6]. بستر وینکلر از رایج‌ترین بسترهای الاستیک به کار رفته در انواع مطالعات است. برای شبیه‌سازی ترک، عموما از مدل فنر خطی یا غیر خطی استفاده می‌شود [4].

برآورد ضرایب شدت تنش در تیرهای ترک‌خورده، برای ارزیابی عمر خستگی باقی‌مانده و یکپارچگی سازه‌ای این اعضا مورد نیاز است[5] . در همین راستا لئونتی و وانتادوری[11] [7] یک رویکرد تحلیلی و عددی برای تعیین ضرایب شدت تنش و بدست آوردن نرخ رشد ترک تحت خستگی تماسی غلتشی برای یک ترک جانبی شیبدار در صفحه ای با عرض محدود روی بستر الاستیک ارائه کرده‌اند. همچنین زارع [8] به بررسی تحلیلی و عددی ضرایب شدت تنش در تیر منحنی ترک خورده روی بستر الاستیک تحت ارتعاش خارج از صفحه پرداخته است. بوزیگیت و همکاران[12] [9] به دلیل کاربرد تیرهای چند دهانه روی بستر الاستیک در انواع مسائل مهندسی ژئوتکنیک و راه‌آهن، مطالعه‌ای تحلیلی و عددی برای شناسایی ترک در این سازه‌ها انجام داده‌اند. این کار از طریق رابطه بین محل ترک و انعطاف پذیری فنر چرخشی نشان‌دهنده‌ی ترک در تیرهای اویلر برنولی چند دهانه روی بستر الاستیک وینکلر، و با استفاده از فرمول‌های ماتریس انتقال، انجام یافته است. همچنین شیانگ و همکاران[13] [10] به منظور بررسی تغییرشکل عمودی تونل، رفتار تیر روی بستر الاستیک وینکلر تحت بار یکنواخت را با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک[14] و عملگر استخراج بزیر[15] بررسی نموده‌اند.

تاکنون مطالعات متعددی برای بررسی پاسخ دینامیکی و پایداری تیرهای ترک خورده انجام شده است. پژوهشگران، تحلیل ارتعاشی را به عنوان یکی از روش‌های کارآمد در تشخیص ترک چنین سازه‌هایی معرفی کرده‌اند [11]. در همین راستا، لویا و همکاران[16] [12] و همچنین دی‌رزا و لیپیلو[17] [11] به مقایسه خواص ارتعاشی تیرهای دارای بستر الاستیک در حضور و عدم حضور ترک پرداخته‌اند. فرقانی و همکاران [13] به بررسی تحلیلی و عددی فرکانس تیرهای ناهمگن ترک‌دار روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی ردی[18] پرداخته‌اند. در زمینه مطالعه تیرهای ناهمگن، ایسن و همکاران[19] [14] به بررسی تحلیلی و عددی پاسخ دینامیکی تیرهای ناهمگن هلالی شکل روی بستر الاستیک پرداخته‌اند. حسین و للپ[20] [15] با استفاده از تئوری تیر اویلر–برنولی و به صورت تحلیلی به بررسی شکل‌های مودی نانو تیر ترک خورده روی بستر الاستیک پاسترناک پرداخته‌اند. تران و لی‌نگوین[21] [1] با استفاده از تابع گرین[22] به محاسبه تحلیلی و عددی پاسخ دینامیکی یک تیر ترک خورده روی بستر ویسکوالاستیک کلوین–ویت[23] تحت بار متحرک پرداخته‌اند. سایر مطالعات در این زمینه شامل تحقیقات کنمون و همکاران[24] [6] روی آثار تاخیر زمانی واکنش سیستم سازه‌ای روی بستر الاستیک، تحقیقات عبدالله و همکاران [16] روی آثار بارهای حرارتی بر پاسخ نانو تیرهای ترک خورده در یک محیط الاستیک، تحقیقات

1 Euler–Bernoulli
2 Winkler
3 Filonenko-Borodich
4 Hetényi
5 Pasternak
6 Reissner
7 Vlazov and Leontiev
8 Kerr
9 Chandra
10 Kondner
11 Leonetti & Vantadori
12 Bozyigit et al.
13 Xiong et al.
14 Isogeometric
15 Bézier
16 Loya et al.
17 De Rosa and Lippiello
18 Reddy
19 Esen et al.
20 Hossain & Lellep
21 Tran & Le-Nguyen
22 Green's function
23 kelvin-voigt
24 Kenmogne




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

ژائو[1] [2] برای مدلسازی ترک‌های متعدد، و بررسی‌های مخلص و همکاران [17] روی ارتعاش آزاد تیرهای مخروطی با ترک های عرضی متعدد روی بستر الاستیک می‌شود.

پاسخ کمانشی تیر-ستون سالم روی بستر الاستیک را می‌توان در کارهای تیموشنکو[2] [18] یا سیمیتسس[3] [19] مشاهده کرد. از کارهای بعدی در این زمینه می‌توان به تحقیقات شا و ژانگ[4] [20] در خصوص محاسبه بار بحرانی کمانش تیر واقع بر بستر الاستیک به روش المان محدود اشاره کرد. برخلاف تیر-ستون‌های ترک خورده معمولی، تحقیقات انجام شده در مورد کمانش تیر-ستون‌های ترک‌خورده روی بستر الاستیک محدودتر می‌باشد. در این زمینه، وانگ[5] [21] کمانش یک تیر-ستون روی بستر الاستیک با یک لولای داخلی (با سختی چرخشی صفر) را مطالعه نموده و محل بهینه لولا را برای سختی‌های مختلف بستر تعیین نموده است. در کار دیگری، وانگ [22] معادلات کمانش را برای یک تیر بی نهایت بر روی بستر الاستیک که حاوی یک یا چند ناحیه تضعیف شده است، فرموله کرد. در مطالعه دیگری، ملیسیانوس و گانتس[6] [23] به بررسی کمانش لوله‌های مدفون از طریق مدلسازی عددی یک تیر-ستون بر بستر الاستیک با یک یا دو اتصال انعطاف پذیر میانی پرداخته‌اند. همچنین اکرمی و عرفانی [4] برای برآورد بار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای ترک خورده، از معادلات حاکم بر تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک استفاده نمودند. با توجه به اینکه در مطالعه مذکور، از مدل تیر-فنر برای شبیه‌سازی تیر ترک خورده روی بستر الاستیک استفاده شده است، پس معادلات حاکم بر سیستم پیچیده شده و برای رفع این مشکل، پاسخ کمانشی تیر به صورت عددی و المان محدود مورد بررسی قرار گرفته است.

در ادامه روش‌های بررسی‌شده برای حل معادلات تیر ترک خورده روی بستر الاستیک مشاهده می‌شود که در حال حاضر، تیر ترک خورده روی بستر الاستیک، به صورت دو تیر مجزا بر روی بستر الاستیک که در محل ترک توسط یک فنر به هم متصل شده‌اند، مدلسازی می‌شود. این مسئله باعث می‌شود هر کدام از قطعات تیر معادله دیفرانسل حاکم بر خود را داشته باشد که با در نظر گرفتن شرایط مرزی و معادلات مربوط به فنر میانی بایستی به صورت همزمان حل شوند. همچنین، پیچیدگی‌های حل معادلات مشخصه حاکم به روش کلاسیک و با در نظرگرفتن شرایط مختلف سازه‌ای و بارگذاری های پیچیده، حل معادله دیفرانسیل تیر با استفاده از روش تیر-فنر یاد شده در مطالعات پیشین و در ادامه دستیابی به راه‌حل فرم بسته به منظور محاسبه بار کمانش را غیر ممکن می‌سازد. به همین دلیل پاسخ‌های موجود فعلی برای مسئله کمانش این نوع سازه‌ها عمدتا به صورت عددی و یا المان‌محدود می‌باشند، همین امر اهمیت ارائه یک رابطه فرم‌بسته به منظور بررسی پایداری در کنار افزایش سهولت محاسبات در روند تحلیل و طراحی چنین سازه‌های را نمایان می‌کند. از این رو نوآوری مطالعه حاضر ارائه روشی جدید با عنوان تکنیک لنگر معادل برای مدلسازی ترک می‌باشد که حل معادلات حاکم بر تیر را ساده‌تر ساخته و در نهایت ارائه رابطه فرم‌بسته برای محاسبه بار کمانش تیرهای ترک خورده روی بستر الاستیک که از دیگر اهداف مطالعه حاضر می‌باشد را شامل می‌شود. روش پیشنهادی مبتنی بر اعمال دو کوپل نیروی متمرکز در محل ترک با هدف ایجاد تفاوت شیب موجود بین دو قطعه تیر در طرفین ترک می‌باشد. با انجام اینکار، تیر ترک‌خورده را می‌توان به صورت یک تیر پیوسته تحت لنگر خارجی در نظر گرفته و رفتار آن‌را توسط یک معادله دیفرانسل واحد بیان نمود. در ادامه، فرآیند حل معادله تیر روی بستر الاستیک تحت لنگر خارجی وارد شده با استفاده از بسط فوریه توابع بار و تغییرشکل انجام گرفته و در نهایت رابطه‌ای برای محاسبه بار کمانش استخراج شده است. در خاتمه، به منظور بررسی درستی و دقت روابط به دست آمده، بار کمانش حاصل از این روابط با بار کمانش حاصل از حل عددی و روش المان محدود مقایسه شده است که نتیجه رضایت‌بخش می‌باشد. فرضیات، شرح روش پیشنهادی، حل معادلات حاکم و بررسی نتایج در ادامه ارائه می‌شود.

## ۲- ارائه پاسخ تحلیلی مسئله

### ۲-۱- مدل تحلیلی تیر-فنر

در حال حاضر، تیر ترک خورده روی بستر الاستیک، به صورت دو المان مجزا که در محل ترک توسط یک فنر دورانی به هم متصل شده‌اند، مدلسازی می‌شود. شکل (۱)، پیکربندی تیر

[1] Zhao
[2] Timoshenko
[3] Simitses
[4] Xia and Zhang
[5] Wang
[6] Melissianos and Gantes




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

ترک‌خورده روی بستر الاستیک و مدل تیر–فنر معادل را نشان می‌دهد. با انتخاب یک المان کوچک در داخل تیر و نوشتن تعادل نیروها در جهت قائم، خواهیم داشت:

$$V-\left(V+\frac{dV}{dx}dx\right)-P_{cr}\frac{dy}{dx}+P_{cr}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}dx\right)+\alpha y dx=0 \qquad (۱)$$

که در آن، $V$ برش تیر، $x$ پارامتر طول تیر، $P_{cr}$ بار کمانش تیر و $\alpha$ سختی بستر می‌باشد. با ساده‌سازی رابطه فوق و جایگذاری $V=-EI.y''''$، که در آن $E$ و $I$ مدول الاستیسیته و ممان اینرسی تیر می‌باشد، خواهیم داشت:

$$y''''_{1,2}+k^2y''_{1,2}+m_{bed}y_{1,2}=0 \qquad (۲)$$

که در آن، اندیس ۱ و ۲ نشان دهنده قطعات تیر سمت چپ و راست ترک، $k^2$ ضریب کمانش تیر و برابر با $P_{cr}/EI$ و $m_{bed}$ ضریب سختی نرمال شده بستر و برابر با $\alpha/EI$ می‌باشد. در واقع رابطه فوق نشان دهنده دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم همگن می‌باشد که پاسخ آنها را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y_1=A_1\sin\lambda_1x_1+B_1\cos\lambda_1x_1+C_1\sin\lambda_2x_1+D_1\cos\lambda_2x_1 \qquad (۳)$$

$$y_2=A_2\sin\lambda_1x_2+B_2\cos\lambda_1x_2+C_2\sin\lambda_2x_2+D_2\cos\lambda_2x_2 \qquad (۴)$$

در رابطه فوق، $\lambda_{1,2}$ ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۲) به شرح زیر بوده:

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{(k^2/2)\pm\sqrt{(k^2/2)^2-m_{bed}}} \qquad (۵)$$

و ضرایب $A_{1,2}$ تا $D_{1,2}$ با در نظر گرفتن شرایط مرزی و معادلات مربوط به فنر میانی محاسبه می‌شوند. برای تیر با تکیه‌گاه مفصلی شرایط مرزی به صورت زیر بوده:

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y_1=0\\y''_1=0\\y_2=0\\y''_2=0\end{cases} \qquad (۶)$$

و پیوستگی تیر در محل فنر میانی لحاظ معادلات زیر را ایجاب می‌نماید:

$$\begin{cases}x_1=\beta l\\x_2=(1-\beta)l\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y_1=y_2\\y'_1=-y'_2-\dfrac{EIy''_1}{K_s}\\y''_1=y''_2\\y'''_1+k^2y'_1=-y'''_2-k^2y_2'\end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $l$ طول تیر، $\beta$ پارامتر نشان دهنده محل ترک (مطابق شکل (۱)) و $K_s$ سختی فنر دورانی می‌باشد. روابط مختلفی برای برآورد سختی فنر دورانی برحسب عمق ترک پیشنهاد شده است [4]. به عنوان نمونه برای مقاطع مستطیلی این مقدار از رابطه زیر قابل محاسبه است [24]:

$$K_s=\frac{EI}{h.f(\xi)}$$
$$f(\xi)=\frac{2}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\left[5.93-19.69\xi+37.1\xi^2-35.8\xi^3+13.1\xi^4\right] \qquad (۸)$$

که در آن $\xi$ نسبت عمق ترک و برابر با $c/h$، $c$ عمق ترک و $h$ ارتفاع تیر می‌باشد.

**شکل ۱.** تیر ترک خورده روی بستر الاستیک و مدل تیر–فنر معادل

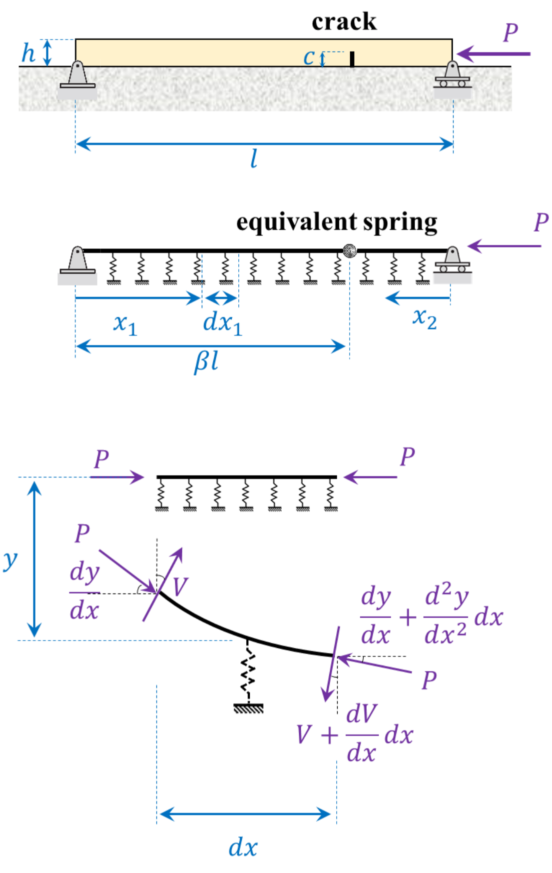


**Fig. 1.** Cracked beam on elastic bed and its beam-spring model

با جایگذاری توابع تغییرشکل ارائه شده در روابط (۳ و ۴) در معادلات روابط (۶ و ۷)، یک دستگاه ۸ معادله–۸ مجهول بدست می‌آید که با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب آن، بار کمانش تیر تعیین می‌شود.




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

### ۲-۲- مدل پیشنهادی لنگر معادل

مطابق شکل (۲)، وجود ترک در طول تیر باعث عدم پیوستگی در شیب تیر و ایجاد تفاوت در شیب قطعات تیر مجاور خواهد شد. با توجه به شرط دوم معادله (۷) مقدار تفاوت در شیب دو طرف تابعی از سختی فنر میانی و لنگر داخلی تیر در محل ترک (-EI.y'') می‌باشد. پس با داشتن این دو می‌توان لنگر خارجی معادلی (EM) را محاسبه نمود که بتواند تفاوت شیب مشابهی را ایجاد نماید. در روش پیشنهادی لنگر معادل، از دو لنگر متمرکز معکوس هم که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، برای ایجاد این تفاوت شیب استفاده خواهد شد. بدین ترتیب، حل دو معادله دیفرانسیل مجزای داده شده در رابطه (۲) تحت شرایط مرزی و میانی ارائه شده در روابط (۶ و ۷) تبدیل به حل یک معادله دیفرانسیل برای تیر پیوسته‌ای می‌شود که روی بستر الاستیک قرارداشته و تحت دو لنگر متمرکز میانی است.

با توجه به ماهیت بارگذاری موجود روی تیر که از جنس لنگر می‌باشد و ناپیوستگی آن که نوشتن تعادل نیروها در جهت قائم برای دستیابی به معادله دیفرانسیل مربوطه را مشکل می‌نماید، از بسط فوریه تابع خیز و لنگر متمرکز خارجی استفاده می‌شود. برای اینکار، لنگرهای معادل، $M$، وارد بر تیر به صورت دو کوپل نیروی نشان داده شده در شکل (۲) در نظر گرفته می‌شود. در این شکل، $\varepsilon$ بازوی کوپل و $c$ فاصله بین دو لنگر متمرکز است که هردو مقدار کوچکی بوده و به سمت صفر میل می‌نمایند. بسط فوریه چهار نیروی متمرکز موجود در این شکل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$EM=\frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}-\sin\dfrac{n\pi(\beta l-\frac{c}{2}-\varepsilon)}{l}\\+\sin\dfrac{n\pi(\beta l-\frac{c}{2})}{l}\\+\sin\dfrac{n\pi(\beta l+\frac{c}{2})}{l}\\-\sin\dfrac{n\pi(\beta l+\frac{c}{2}+\varepsilon)}{l}\end{bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۹)$$

با بسط سینوس‌های دو و سه متغییری موجود در این رابطه و توجه به این فرض که کسینوس مقادیر کوچک برابر با ۱٫۰ و سینوس مقادیر کوچک برابر با خود پارامتر می‌باشد، بسط فوریه رابطه (۹) به صورت زیر ساده می‌شود (مطابق پیوست ۱):

**شکل ۲.** تیر ترک خورده روی بستر الاستیک و مدل لنگر معادل

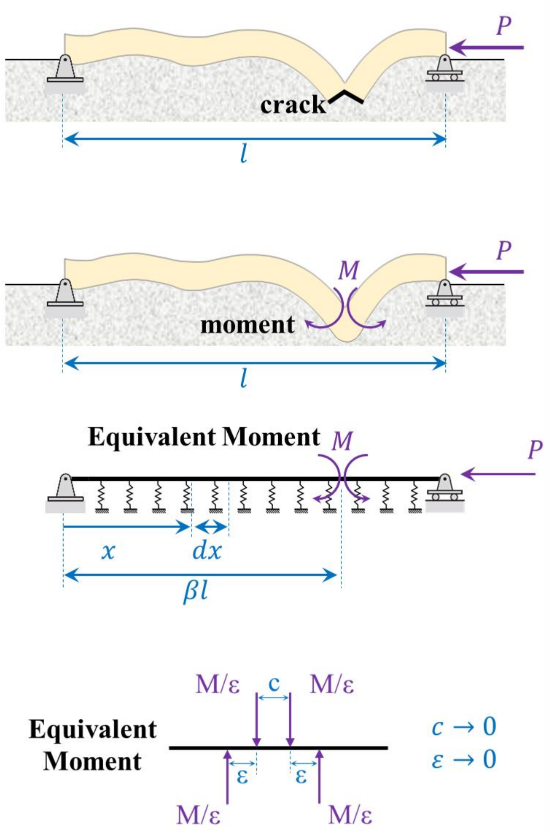


**Fig. 2.** Cracked beam on elastic bed and its Equivalent Moment (EM) model

$$EM=\frac{2M}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2c}{l^2}\sin n\pi\beta\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۰)$$

بدین ترتیب، معادله دیفرانسیل تیر روی بستر الاستیک نشان داده شده در شکل (۲)، به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$y''''+k^2y''+m_{bed}y=\frac{2M}{EI.l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2c}{l^2}\sin n\pi\beta\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۱)$$

### ۲-۳- مقدار لنگر معادل

چنانچه در بخش قبل بیان شد، لنگر معادل خارجی وظیفه ایجاد تفاوت شیبی برابر با تفاوت شیب موجود در طرفین ترک در تیر اصلی را به عهده خواهد داشت. درصورتیکه لنگر داخلی موجود در محل ترک را با $m(\beta l)$ نشان دهیم، مقدار تفاوت شیبی که باید توسط لنگر معادل خارجی ایجاد شود توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta\theta=-\frac{m(\beta L)}{K_s}+\frac{m(\beta L)}{EI}c=\left[\frac{c}{EI}-\frac{1}{K_s}\right]m(\beta l) \qquad (۱۲)$$

در رابطه فوق، بخش اول مربوط به تفاوت شیب دو سمت




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

ترک در مدل فنر معادل و بخش دوم مربوط بـه تفـاوت شـیب دو سمت ترک در مدل تیر پیوسته می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان مقدار لنگر معادل خارجی را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\left[\frac{c}{EI}-\frac{1}{K_s}\right]m(\beta l)=-\frac{M}{EI}c$$
$$M=\left[\frac{EI}{K_s.c}-1\right]m(\beta l) \qquad (۱۳)$$

با توجه بـه اینکـه در ایـن رابطـه مقـدار c در مخـرج عبـارت نخست به سمت صفر میل می‌نمایـد، پـس در مقابـل ایـن عبـارت می‌توان از عبارت دوم (یعنی ۱-) صرف‌نظر نمود.

### ۲-۴- حل معادله دیفرانسیل حاکم

برای حل معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۱۱) تابع خیـز تیر را به صورت سری سینوسی زیر فرض می‌نماییم:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۴)$$

که در آن $z_n$ ضرایب مجهول سری می‌باشـد کـه بایـد محاسـبه شوند. برای تعیین این ضرایب، با جایگذاری رابطه فوق در معادلـه (۱۱)، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{n^2\pi^2}{l^2}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$=\frac{2m(\beta l)}{EI.l}\left[\frac{EI}{K_s}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin n\pi\beta \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۵)$$

بدین ترتیب ضرایب مجهول سری رابطه (۱۴) به صورت زیـر تعیین شده:

$$z_n=\frac{2m(\beta l)}{K_s.l}\frac{1}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)}\sin n\pi\beta \qquad (۱۶)$$

و خواهیم داشت:

$$y= m(\beta l)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2/K_s.l}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)}\sin n\pi\beta \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۷)$$

که پاسخ معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۱۱) می‌باشد.

### ۲-۵- تعیین بار کمانش تیر

رابطه (۱۷) تعیین کننده خیـز تیـر روی بسـتر الاسـتیک تحـت سیستم لنگر معادل خارجی نشان داده شده در شکل (۲)، در محـل ترک می‌باشد. همانطور که در این رابطه ملاحظه می‌شود، تابع خیز بدست آمده وابسته به مقدار لنگر داخلی تیر در محل تـرک، $m(\beta l)$ می‌باشد. مقدار این لنگر را می‌توان با استفاده از تعادل خارجی تیـر روی بستر الاستیک بدست آورد. تابع خیز تیر زمانی مقدار صـحیح را ارائه خواهد داد که لنگر داخلی محاسبه شده از تعـادل در محـل ترک برابر با $m(\beta l)$ باشد.

در شکل (۳) نیروهای موثر بر تیر واقع بر بستر الاستیک رسـم شده است. با توجه به شکل و با لنگرگیری حول تکیـه‌گـاه سـمت راست، می‌توان عکس‌العمل تکیه‌گاه سمت چپ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$A_y=-\frac{m_{bed}EI}{l}\int_0^l y_{(x)}.(l-x)dx$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m(\beta l)}{K_s n\pi}\frac{m_{bed}EI}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)}\sin n\pi\beta \qquad (۱۸)$$

**شکل ۳.** نیروهای موثر بر تیر واقع بر بستر الاستیک

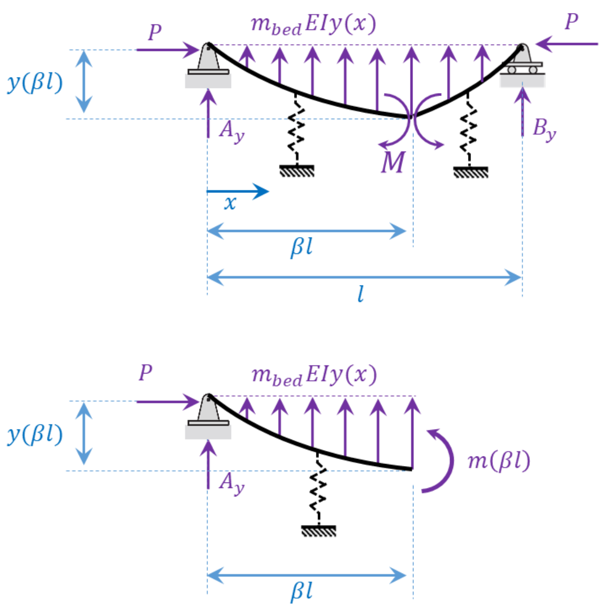


**Fig. 3.** Forces acting on the elastically supported beam

در ادامه، مقطعی دقیقا در سمت چپ تـرک لحـاظ شـده و بـا لنگرگیری حول آن، مقدار لنگر داخلی تیر به صورت زیـر محاسـبه می‌شود. چنانچه گفته شد، تابع خیز تیر زمانی صحیح خواهـد بـود که لنگر داخلی محاسبه شده از تعادل برابر با $m(\beta l)$ مـورد اسـتفاده در محاسبه آن باشد. بدین ترتیب:

$$m(\beta l)=$$
$$A_y\beta l+m_{bed}EI\int_0^{\beta l} y_{(x)}.(\beta l-x)dx+k^2EIy(\beta l) \qquad (۱۹)$$


[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

با ساده سازی رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$m(\beta l)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m(\beta l)}{K_s.l}\frac{\left(k^2-\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}\right).EI}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)}\sin^2 n\pi\beta \tag{۲۰}$$

بدین ترتیب با حذف $m(\beta l)$ از طرفین رابطه، ضریب بار کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک را به صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(k^2-\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}\right)}{\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}-k^2\right)}\sin^2 n\pi\beta=\frac{K_s.l}{2EI} \tag{۲۱}$$

### ۲-۶- ترسیم پاسخ‌های معادله دیفرانسیل

پاسخ ارائه شده در رابطه (۲۱) ضریب کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک را بر حسب طول تیر، $l$، ضریب سختی بستر، $m_{bed}$، محل نسبی ترک، $\beta$ و نسبت سختی مقطع ترک خورده به سختی خمشی تیر، $K_s/EI$، بیان می‌نماید. بر همین اساس، این پاسخ‌ها در نمودارهای مختلف ارائه شده در شکل‌های (۴ تا ۶) قابل ملاحظه می‌باشند. محور قائم هر نمودار معرف ضریب بار کمانش تیر می‌باشد. تاثیر طول تیر ترک خورده در محور افقی نمودارها نشان داده شده است. هر کدام از نمودارها شامل منحنی‌های مربوط به تیر سالم و ۵ نمونه با شدت‌های ترک مختلف می‌باشد. همچنین تاثیر محل ترک در طول تیر با مقایسه نمودارهای a تا c در هر شکل قابل بررسی می‌باشد. در نهایت، هر کدام از شکل‌های (۴ تا ۶) مربوط به یک ضریب سختی بستر مشخص می‌باشد که با مقایسه آنها می‌توان رفتار تیرهای واقع بر روی بسترهای مختلف را تعیین نمود.

**شکل ۴.** پاسخ‌های معادله دیفرانسیل حاکم برای $m_{bed}$=1؛ a) $\beta$=0.5؛ b) $\beta$=0.3؛ c) $\beta$=0.1

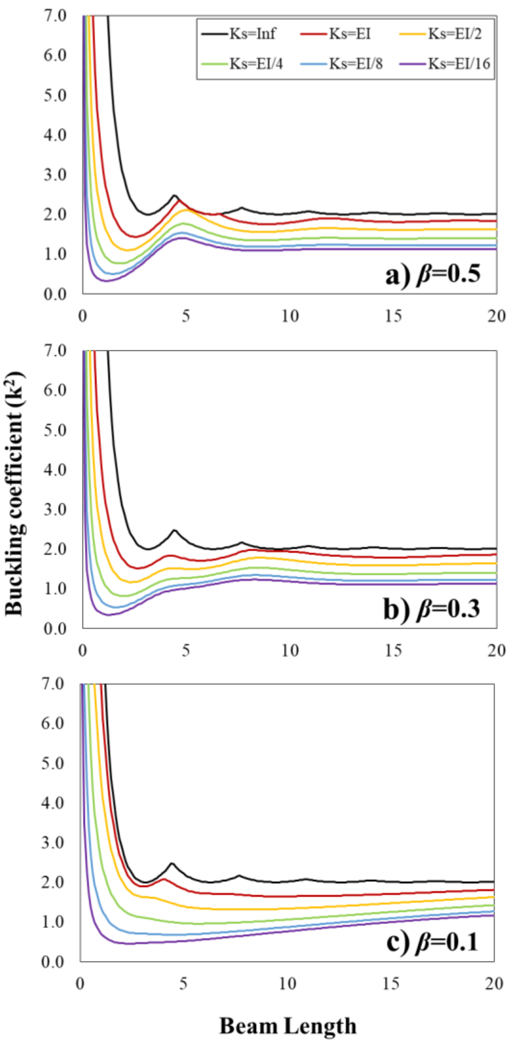


**Fig. 4.** Response of governing differential equation for $m_{bed}$=1; a) β=0.5; b) β=0.3; c) β=0.1

**شکل ۵.** پاسخ های معادله دیفرانسیل حاکم برای $m_{bed}$=3؛ a) $\beta$=0.5؛ b) $\beta$=0.3 ؛ c) $\beta$=0.1

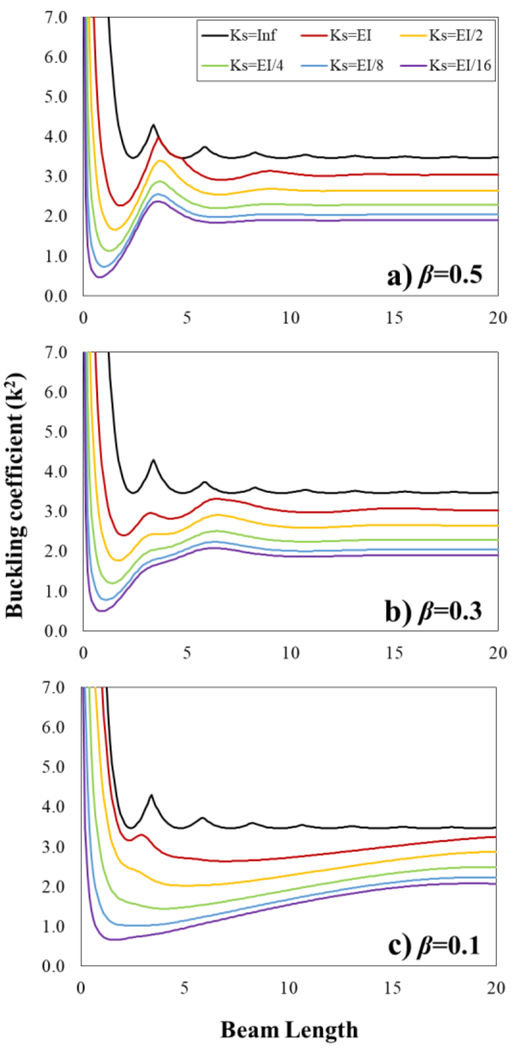


**Fig. 5.** Response of governing differential equation for $m_{bed}$=3; a) β=0.5; b) β=0.3; c) β=0.1




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

**شکل ۶.** پاسخ های معادله دیفرانسیل حاکم برای $m_{bed}$=5؛
a) $\beta$=0.5؛ b) $\beta$=0.3؛ c) $\beta$=0.1

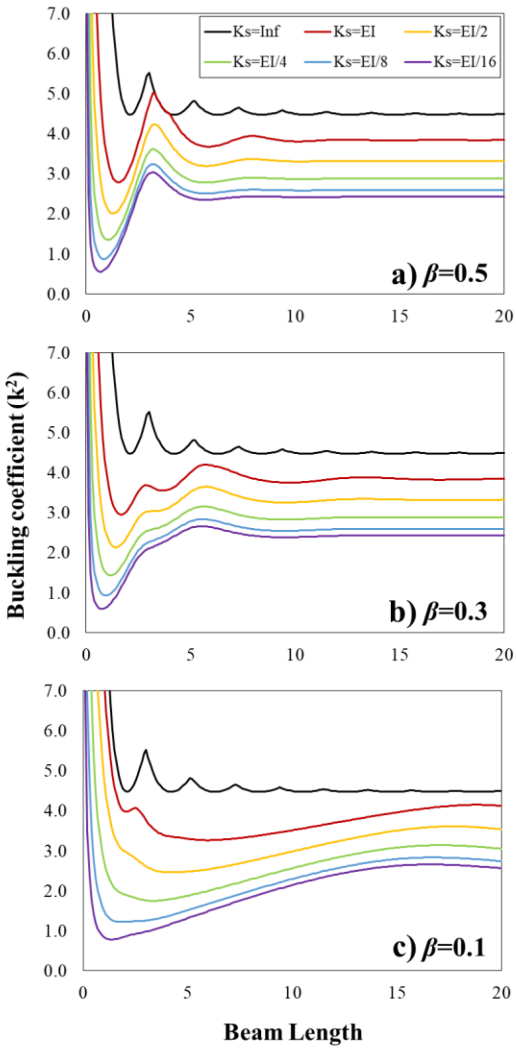


**Fig. 6.** Response of governing differential equation for $m_{bed}$=5; a) β=0.5; b) β=0.3; c) β=0.1

مطابق شکل (۴-a)، بار کمانش تیرهای با طول کم بسیار بیشتر از تیرهای بلند می‌باشد. با افزایش طول تیر، ضریب بار کمانش تیر کاهش یافته و به یک مقدار مشخص میل می‌نماید. لازم به ذکر است که در پی افزایش طول تیر و کاهش مقاومت آن به مقدار یاد شده، مود کمانشی تیر نیز افزایش یافته و تابع خیز تیر شامل نیم‌سینوس‌های بیشتری می‌شود.

با کاهش سختی مقطع ترک خورده که نشان دهنده افزایش عمق ترک می‌باشد، روند کلی نمودار حفظ شده ولی از مقدار ضریب بار کمانش کاسته می‌شود. مقدار این کاهش مقاومت برای تیرهای کوتاه بیشتر از تیرهای با طول زیاد می‌باشد. مسئله دیگری که در شکل (۴-a)، قابل ملاحظه است، افزایش نسبی ضریب بار کمانش در محدوده مود دوم می‌باشد. با توجه به اینکه برای نمونه‌هایی با $\beta$=0.5 ترک در نیمه تیر می‌باشد، دلیل این مسئله را می‌توان در قرار گرفتن ترک در نقطه عطف تابع خیز تیر و بسته ماندن ترک جستجو نمود. چنین رفتاری برای نمودارهای (b و c) در محدوده مودهای سوم و دهم قابل ملاحظه خواهد بود.

با مقایسه نمودارهای (a، b و c) در شکل (۴) می‌توان گفت که برای تیرهای کوتاه هرچه ترک به وسط تیر نزدیکتر باشد، نمونه افت مقاومت بیشتری را تجربه خواهد کرد. این در حالی است که برای تیرهای با طول بیشتر عکس این مسئله صادق می‌باشد. نهایتا با مقایسه شکل‌های (۴ تا ۶) می‌توان ملاحظه نمود که برای بستر با ضرایب سختی متفاوت، روند کلی توضیح داده شده برای شکل (۴) دوباره صادق است. این در حالی است که با افزایش ضریب سختی بستر، نمودارها به سمت بالا شیفت پیدا کرده و بار کمانش تیر افزایش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش سختی بستر، موج‌های نمودار فشرده‌تر شده و تیر در مود بالاتری (با نیم سینوس‌های بیشتری) کمانش می‌نماید.

## ۳- بررسی درستی پاسخ ارائه شده

### ۳-۱- مقایسه با نتایج مسائل ساده شده

برای بررسی درستی راه‌حل ارائه شده، ابتدا به مقایسه پاسخ آن با دو مسئله ساده شده خواهیم پرداخت. مسئله نخست مربوط به تیر ترک خورده فاقد بستر الاستیک می‌باشد ($m_{bed}$=0). برای چنین مسئله‌ای، راه حل فرم‌بسته معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر موجود می‌باشد:

$$k.\left[\cos(2\beta kl)-1\right].\cot(kl)+k.\sin(2\beta kl)=\frac{2K_s}{EI} \qquad (۲۲)$$

شکل (۷)، مقایسه پاسخ‌های ارائه شده توسط روابط (۲۱ و ۲۲) را برای چنین تیری با یک ترک در وسط تیر نمایش می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود، انطباق مناسبی بین نتایج حاصل از دو رابطه یاد شده موجود می‌باشد.

مسئله دوم مورد مطالعه مربوط به تیر سالم دارای بستر الاستیک است ($K_s$=Inf). برای چنین تیری مقدار ضریب بار کمانش از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$k^2=\min\left\{\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m_{bed}l^2}{n^2\pi^2}\right\} \qquad n=1,2,3,\ldots \qquad (۲۳)$$




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

**شکل ۷.** مقایسه پاسخ‌های ارائه شده برای تیر ترک خورده فاقد بستر الاستیک توسط روابط (۲۱ و ۲۲)

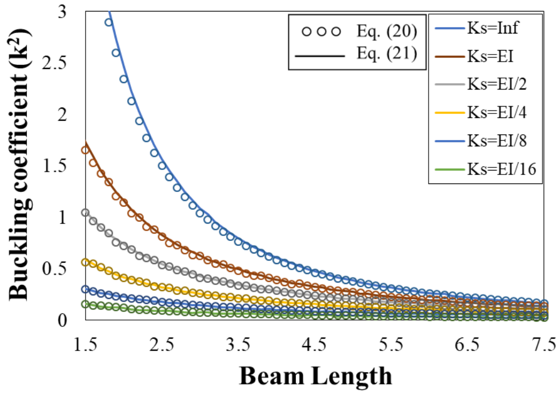


**Fig. 7.** Comparing response of a cracked beam without elastic foundation provided in Eqs. (21) and (22)

**شکل ۸** مقایسه پاسخ های ارائه شده برای تیر سالم روی بستر الاستیک توسط روابط (۲۱) و (۲۳)

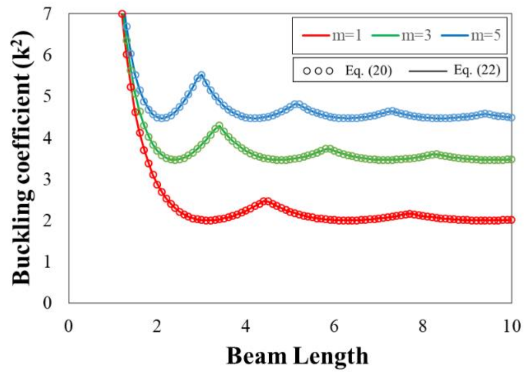


**Fig. 8.** Comparing response of a un-cracked beam on elastic foundation provided in Eqs. (21) and (23)

**شکل ۹.** مقایسه پاسخ های ارائه شده برای تیر ترک خورده ($\beta$=0.5، $K_s$=EI/2) روی بستر الاستیک توسط رابطه (۲۱) و مدل تیر-فنر

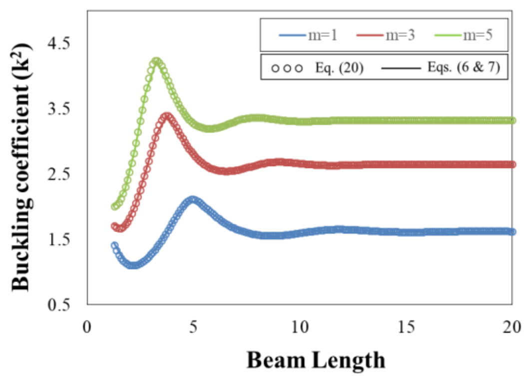


**Fig. 9.** Comparing response of cracked beam ($\beta$=0.5 ،$K_s$=EI/2) on elastic bed provided in Eqs. (21) and beam-spring model

شکل ۸ مقایسه پاسخ‌های ارائه شده توسط این رابطه و رابطه (۲۱) را برای مقادیر مختلف ضریب بستر ارائه می‌دهد. مجددا همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود، انطباق مناسبی بین نتایج حاصل از دو رابطه موجود می‌باشد.

### ۳-۲- مقایسه با نتایج مدل تیر-فنر

در ادامه درستی آزمایی راه‌حل ارائه شده، نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از حل روابط (۶ و ۷) برای مدل تیر-فنر مقایسه شده است. بدین منظور ترک در وسط تیر فرض شده ($\beta$=0.5) و سختی فنر دورانی برابر با $EI/2$ لحاظ شده است. شکل (۹)، مقایسه ضریب بار کمانش را برای هر دو حالت نمایش می‌دهد. مطابق شکل، مشخص است که مدل لنگر معادل به خوبی قادر به پیش‌بینی پاسخ‌ها بوده و حاصل از آن بسیار دقیق می‌باشد.

### ۳-۳- مقایسه با نتایج تحلیل المان محدود

در این بخش، درستی‌آزمایی پاسخ ارائه شده با استفاده از نتایج تحلیل‌های المان محدود انجام شده است. برای این منظور یک مدل عددی در نرم‌افزار آباکوس ایجاد و تحلیل کمانش روی آن انجام شده است. جزئیات مدلسازی مربوطه در شکل (۱۰) ارائه شده است. مطابق شکل، مدلسازی با استفاده از دو تیر مجزا انجام شده است که در محل ترک به وسیله قید بستن به هم وصل شده‌اند. ناحیه ترک خورده فاقد قید مربوطه بوده و آزاد است. مجموعه تیرهای یاد شده روی یک بستر الاستیک قرار گرفته است که از طریق یک سری میله محوری با سختی و فاصله مشخص مدلسازی شده است. پایین میله ها دارای شرایط مفصلی و بالای آنها با استفاده از قید بستن، به تیر ترک خورده متصل می‌باشند. درجات آزادی واقع در ابتدا و انتهای تیر به یک نقطه کنترل کوپل شده و شرایط تکیه‌گاه مفصلی در آنها ایجاد شده است.

**شکل ۱۰.** جزئیات مدلسازی عددی تیر ترک خورده روی بستر الاستیک

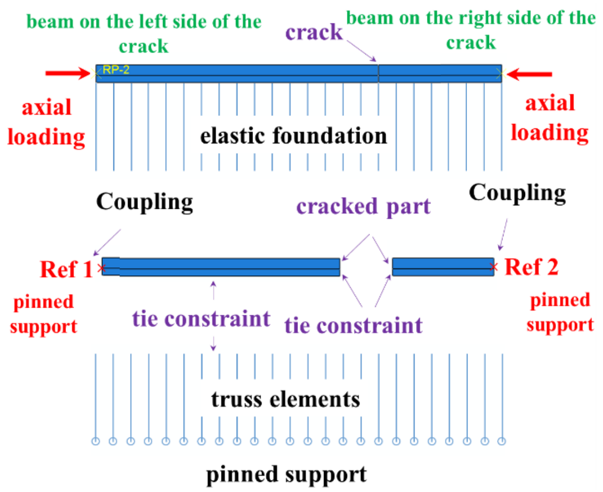


**Fig. 10.** Modelling of cracked beam on elastic foundation





[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

جزئیات هندسی نمونه‌های المان محدود مورد بررسی در جدول (۱) ارائه شده است. مطابق جدول، سه ردیف نخست دارای عمق ترک متفاوت، سه ردیف ۵-۳ دارای محل ترک متفاوت، سه ردیف ۵-۷ دارای طول تیر متفاوت، سه ردیف ۹-۷ دارای ضریب بستر متفاوت و دو ردیف آخر دارای ارتفاع تیر متفاوت می‌باشند. نتایج حاصل از رابطه (۲۱) و تحلیل‌های المان محدود در دو ستون آخر جدول ارائه شده است. همچنین، شکل کمانش نمونه‌ها در شکل (۱۱) ارائه شده است.

**شکل ۱۱.** شکل کمانش نمونه‌های جدول ۱ در تحلیل المان محدود

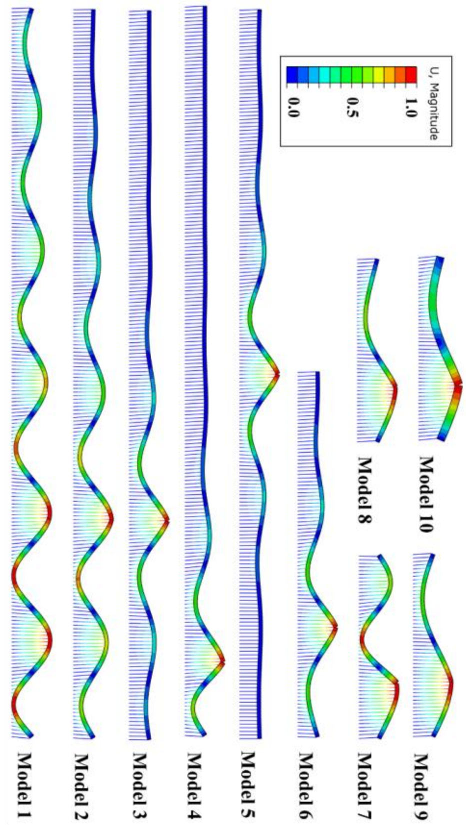


**Fig. 11.** Buckled shape of the models in Table 1 in FE analysis

**جدول ۱.** مقایسه بارکمانش نمونه‌های المان محدود با رابطه (۲۱)

| Model | $l$ (m) | $h$ (m) | EI (kg.m$^2$) | β | ξ | $m_{bed}$ | $k^2$ Eq. (21) | $k^2$ FEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.2 | 10 | 6.32 | 6.28 |
| 2 | 20 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.4 | 10 | 6.21 | 6.18 |
| 3 | 20 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.6 | 10 | 5.59 | 5.64 |
| 4 | 20 | 0.1 | 175 | 0.1 | 0.6 | 10 | 5.65 | 5.70 |
| 5 | 20 | 0.1 | 175 | 0.5 | 0.6 | 10 | 5.59 | 5.65 |
| 6 | 10 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.6 | 10 | 5.60 | 5.67 |
| 7 | 5 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.6 | 10 | 6.05 | 6.07 |
| 8 | 5 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.6 | 5 | 4.22 | 4.26 |
| 9 | 5 | 0.1 | 175 | 0.3 | 0.6 | 1 | 1.86 | 1.88 |
| 10 | 5 | 0.2 | 1400 | 0.3 | 0.6 | 1 | 1.62 | 1.65 |

**Table 1.** Comparing buckling load FE models with Eq. (20)

### ۳-۴- مقایسه با نتایج سایر تحقیقات

چنانچه پیشتر ذکر شد، وانگ [22] روابط تحلیلی را برای محاسبه بار کمانش یک تیر بی‌نهایت بر روی بستر الاستیک که حاوی یک ناحیه تضعیف شده در وسط آن است، ارائه کرده است. برای درستی‌آزمایی نتایج رابطه (۲۱) از بازتولید نمودار ارائه شده در این مرجع مطابق شکل (۱۲) استفاده شده است. برای اینکار طول تیر مقداری بسیار بزرگ فرض شده و مقدار پارامتر $\beta$ برابر با ۰٫۵ در نظر گرفته شده است. محور افقی نمودار سختی نرمال شده مقطع ترک خورده و محور قائم بار کمانش نرمال شده تیر را نمایش می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده از رابطه (۲۱) انطباق مناسبی با داده‌های ارائه شده توسط وانگ [22] دارد که حاکی از دقت رابطه ارائه شده می‌باشد.

**شکل ۱۲.** مقایسه نتایج حاصل از تحقیق حاضر و مرجع [22]

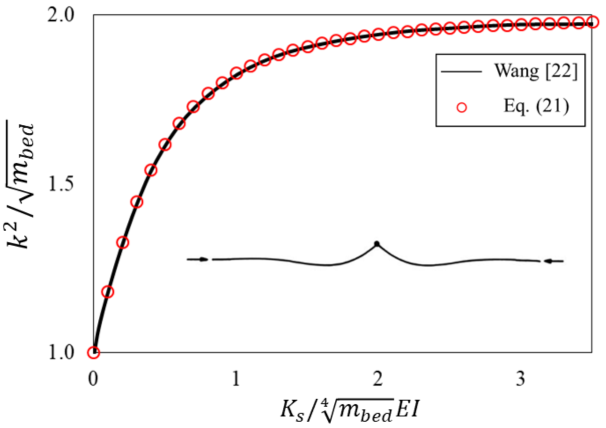


**Fig. 12.** Comparing results of this study with reference [22]

### ۴- نتیجه‌گیری

مطالعه حاضر به ارائه روش تحلیلی و عددی به منظور محاسبه پاسخ فرم‌بسته کمانش تیر ترک خورده روی بستر الاستیک پرداخته‌است. در روش ارائه شده با عنوان تکنیک لنگر معادل، در محل ترک تیر، از دو لنگر متمرکز معکوس هم به منظور اعمال تفاوت شیب ناشی از وجود ترک در طرفین محل آسیب استفاده شده‌است. در بخش اول مطالعه، به بررسی روش‌های معمول مدلسازی ترک از جمله مدل تحلیلی تیر-فنر پرداخته و سپس مقدار لنگر متمرکز اعمال شده در روش پیشنهادی که تابعی از سختی فنر میانی و لنگر داخلی تیر در محل ترک می‌باشد، به دست آمد. در ادامه رابطه ظرفیت کمانشی تیرهای ترک‌خورده روی بستر الاستیک با حل معادلات مشخصه حاکم بر تیر روی بستر الاستیک




[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

با استفاده از بسط فوریه تابع خیز تیر و لنگر متمرکز خارجی ارائه شد. همچنین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله سختی خمشی تیر، طول تیر، عمق ترک، محل ترک و سختی بستر بر بار کمانش تیر مورد مطالعه قرار گرفت. بر اساس نتایج به‌دست آمده، وجود ترک در تیر می‌تواند بار کمانشی عضو را به میزان قابل توجهی کاهش دهد که این کاهش مقاومت در تیرهای کوتاه مشهودتر است. ظرفیت کمانشی تیرهایی با طول کم بسیار بیشتر از تیرهای با طول زیاد است از طرفی با افزایش طول ضریب بار کمانش کاهش می‌یابد که به دنبال آن کاهش مقاومت و افزایش مود کمانشی تیر مشاهده می‌شود. در تیرهای کوتاه، بر عکس تیرهای با طول زیاد با نزدیک شدن ترک به وسط تیر با افت مقاومت بیشتری روبرو هستیم. همچنین با افزایش ضریب سختی بستر، بار کمانشی تیر افزایش یافته و تیر در مودهای بالاتری کمانش می‌کند. در بخش دوم، مطالعه‌ی عددی به منظور بررسی درستی راه‌حل ارائه شده انجام شد. نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با مدل‌های المان محدود و همچنین با پاسخ مسائل ساده شده‌ای که حل دقیق آنها موجود است مقایسه شد که نشانگر مطابقت بالای تکنیک لنگر معادل و تایید درستی و دقت این روش بود. بدین ترتیب از رابطه‌ی به دست آمده بر مبنای این روش و نتایج آن می‌توان در روند طراحی و محاسبات و همچنین پیش‌بینی رفتار چنین سازه‌های استفاده کرد.

## ۵- تقدیر و تشکر

بدینوسیله از زحمات هیات داوران و اعضای تیم علمی نشریه در ارتقای کیفیت مقاله و انتشار آن شایسته قدردانی می‌باشد.

## ۶- مراجع

1. Tran, L.H. and Le-Nguyen, K., 2023. Calculation of dynamic responses of a cracked beam on visco-elastic foundation subjected to moving loads, and its application to a railway track model. *International Journal of Applied Mechanics*, *15*(03).

2. Zhao, X., 2021. Analytical solution of deflection of multi-cracked beams on elastic foundations under arbitrary boundary conditions using a diffused stiffness reduction crack model. *Archive of Applied Mechanics*, *91*(1), pp.277-299.

3. Chen, B., Lin, B., Zhao, X., Zhu, W., Yang, Y. and Li, Y., 2021. Closed-form solutions for forced vibrations of a cracked double-beam system interconnected by a viscoelastic layer resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, *163*.

4. Akrami, V. and Erfani, S., 2017. An analytical and numerical study on the buckling of cracked cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*, *119*, pp.457-469.

5. Rege, K. and Pavlou, D.G., 2019. Stress intensity factors for circumferential through-wall cracks in thin-walled cylindrical shells subjected to tension and torsion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, *42*(5), pp.1062-1074.

6. Kenmogne, F., Ouagni, M.S.T., Simo, H., Kammogne, A.S.T., Bayiha, B.N., Wokwenmendam, M.L., Elong, E. and Ngapgue, F., 2022. Effects of time delay on the dynamical behavior of nonlinear beam on elastic foundation under periodic loadings: Chaotic detection and it control. *Results in Physics*, *35*.

7. Leonetti, D. and Vantadori, S., 2022. On the growth of rolling contact fatigue cracks using weight functions. *Procedia Structural Integrity*, *39*, pp.9-19.

8. Zare, M., 2020. Free out-of-plane vibration of cracked curved beams on elastic foundation by estimating the stress intensity factor. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *27*(14), pp.1238-1245.

9. Bozyigit, B., Bozyigit, I., Yesilce, Y. and Abdel Wahab, M., 2020. Crack identification in multi-span beams on elastic foundation by using transfer matrix method. In *Proceedings of the 13th International Conference on Damage Assessment of Structures: DAMAS 2019, 9-10 July 2019, Porto, Portugal*, pp. 402-409.

10. Xiong, Z., Kou, L., Zhao, J., Cui, H. and Wang, B., 2023. Isogeometric Analysis of Longitudinal Displacement of a Simplified Tunnel Model Based on Elastic Foundation Beam. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, *136*(1).

11. De Rosa, M.A. and Lippiello, M., 2021. Closed-form solutions for vibrations analysis of cracked Timoshenko beams on elastic medium: An analytically approach. *Engineering Structures*, *236*.

12. Loya, J.A., Aranda-Ruiz, J. and Zaera, R., 2022. Natural frequencies of vibration in cracked Timoshenko beams within an elastic medium. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, *118*.

13. Forghani, M.A., Bazarganlari, Y., Zahedinejhad, P. and Kazemzadeh Parsi, M.J., 2021. Frequency Analysis of Cracked Porous Functionally Graded Beams on Elastic Foundation using Reddy Third Order Shear Deformation Theory. *Journal Of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, *32*(2), pp.93-112.

14. Esen, I., Eltaher, M.A. and Abdelrahman, A.A., 2023. Vibration response of symmetric and sigmoid functionally graded beam rested on elastic foundation under moving point mass. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *51*(5), pp.2607-2631.

15. Hossain, M.M. and Lellep, J., 2021. Mode shape

analysis of dynamic behaviour of cracked nanobeam on elastic foundation. *Engineering Research Express*, *3*(4).

16. Abdullah, S.S., Hosseini-Hashemi, S., Hussein, N.A. and Nazemnezhad, R., 2022. Effect of temperature on vibration of cracked single-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium under different boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *50*(5), pp.1614-1639.

17. Moukhliss, A., Rahmouni, A., Bouksour, O. and Benamar, R., 2022. N-dof discrete model to investigate free vibrations of cracked tapered beams and resting on winkler elastic foundations. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, *14*(1), pp.1-7.

18. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 2012. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation.

19. Simitses, G.J. and Hutchinson, J.W., 1976. An introduction to the elastic stability of structures. *Journal of Applied Mechanics*, *43*(2), p.383.

20. Xia, G.P. and Zhang, Z., 2009. A numerical method for critical buckling load for a beam supported on elastic foundation. *EJGE*, *14*, pp.1-11.

21. Wang, C.Y., 2008. Optimum location of an internal hinge of a uniform column on an elastic foundation.

22. Wang, C.Y., 2010. Buckling of a weakened infinite beam on an elastic foundation. *Journal of engineering mechanics*, *136*(4), pp.534-537.

23. Melissianos, V.E. and Gantes, C.J., 2016, August. Buckling and post-buckling behavior of beams with internal flexible joints resting on elastic foundation modeling buried pipelines. In *Structures*, *7*, pp. 138-152.

24. Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1973. The Stress Analysis of Cracks. *Handbook, Del Research Corporation*, *34*.

## پیوست (۱)- بسط فوریه لنگر معادل (EM)

با استفاده از اتحادهای جمع و تفریق مثلثاتی، بسط رابطه (۹) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$EM = \frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[-\left(sin\frac{n\pi\left(\beta l-\frac{c}{2}\right)}{l}\cos\frac{n\pi\varepsilon}{l} - cos\frac{n\pi\left(\beta l-\frac{c}{2}\right)}{l}\sin\frac{n\pi\varepsilon}{l}\right) + \left(sin\, n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} - cos\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l}\right) + \left(sin\, n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} + cos\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l}\right) - \left(sin\frac{n\pi\left(\beta l+\frac{c}{2}\right)}{l}\cos\frac{n\pi\varepsilon}{l} + cos\frac{n\pi\left(\beta l+\frac{c}{2}\right)}{l}\sin\frac{n\pi\varepsilon}{l}\right)\Bigg] sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۱)$$

با فرض ساده‌سازی کسینوس مقادیر کوچک با ۱٫۰ و سینوس مقادیر کوچک با خود آرگومان، بسط فوریه رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$EM = \frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[-\left(sin\frac{n\pi\left(\beta l-\frac{c}{2}\right)}{l} - \frac{n\pi\varepsilon}{l}cos\frac{n\pi\left(\beta l-\frac{c}{2}\right)}{l}\right) + 2sin\, n\pi\beta - \left(sin\frac{n\pi\left(\beta l+\frac{c}{2}\right)}{l} + \frac{n\pi\varepsilon}{l}cos\frac{n\pi\left(\beta l+\frac{c}{2}\right)}{l}\right)\Bigg] sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۲)$$

مجددا با استفاده از اتحادهای جمع و تفریق مثلثاتی، بسط رابطه بالا به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$EM = \frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[-\left(\sin n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} - cos\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l} - \frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(cos\, n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} + sin\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l}\right)\right) + 2\,sin\, n\pi\beta - \left(sin\, n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} + cos\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l} + \frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(cos\, n\pi\beta\cos\frac{n\pi c}{2l} - sin\, n\pi\beta\sin\frac{n\pi c}{2l}\right)\right)\Bigg] sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۳)$$

با ساده‌سازی رابطه بالا خواهیم داشت:


[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]

$$EM=\frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(sin\, n\pi\beta-\frac{n\pi c}{2l}cos\, n\pi\beta-\frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(cos\, n\pi\beta+\frac{n\pi c}{2l}sin\, n\pi\beta\right)\right)+2\,sin\, n\pi\beta\right.$$
$$\left.-\left(sin\, n\pi\beta+\frac{n\pi c}{2l}cos\, n\pi\beta+\frac{n\pi\varepsilon}{l}\left(cos\, n\pi\beta-\frac{n\pi c}{2l}sin\, n\pi\beta\right)\right)\right]sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۴)$$

در ادامه رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$EM=\frac{2M}{l.\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(sin\, n\pi\beta-\frac{n\pi\varepsilon}{l}\frac{n\pi c}{2l}sin\, n\pi\beta\right)+2\,sin\, n\pi\beta-\left(sin\, n\pi\beta-\frac{n\pi\varepsilon}{l}\frac{n\pi c}{2l}sin\, n\pi\beta\right)\right]sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۵)$$

در نهایت بسط فوریه لنگر معادل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$EM=\frac{2M}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2c}{l^2}\sin n\pi\beta\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (۹-۶)$$

# A Closed-form solution to the buckling of cracked beams on elastic foundation using equivalent moment technique

Tooba Makaremi[1], Vahid Akrami[2*]

1. M.Sc. graduate, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili.
2. Associate Professor, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili.

* Corresponding Author Email: v.akrami@uma.ac.ir

Received: 2024/07/09 - Accepted: 2024/11/20

**Abstract**

Beams placed on elastic foundations are widely used in simulating a main portion of mechanical and civil structures. The buckling behavior of these beams, including the load and the shape of the buckling mode, is different from normal beams due to the loads imposed by the elastic foundation that is proportional to the beam deflection. Due to their functional modality, these types of beams are generally subjected to repetitive loads (such as railway tracks) and extreme environmental conditions (such as piles and buried pipelines), making them susceptible to damage such as cracks. The presence of these flaws along the members can lead to premature failure of these structural elements due to buckling in the damaged area. Evaluating the stability of such structures considering structural flaws is essential for ensuring their safety. In this context, this paper presents a new method for calculating the closed-form solution to the buckling of cracked beams on elastic foundations. In the proposed method, a concentrated moment is used to model the crack and apply the slope difference caused by the crack at the damage location. Then, the governing differential equations for pin-ended beams are derived, and by using Fourier expansion and calculating the value of applied moment, a closed-form solution is presented to calculate the buckling of beams on elastic foundations. Using this technique for crack modeling makes it easier to solve beam differential equations and achieve a closed-form solution for calculating beam buckling load. Finally, the effects of different parameters such as the bending stiffness of the beam, length of the beam, crack depth, and stiffness of the bed on the buckling load of the beam can be studied. To verify the proposed solution, the results of solving closed-form equations are compared with the exact solutions of simplified problems and the results from finite element models, which confirms the accuracy of the performed calculations. As the current solutions to the buckling of cracked beams on an elastic foundation are mainly based on numerical or finite element methods, the presented closed-form solution in this study can significantly contribute to enhancing the accuracy and facility of calculations in the design and analysis process for such structures.

**Keywords:** Beam on elastic foundation, Crack, Buckling load, Differential equation, Fourier expansion, Finite element analysis.



[ DOI: 10.22034/25.2.101 ]