

## بهینه‌سازی توپولوژی و ابعاد سازه خرپایی بر مبنای روش چگالی مواد و الگوریتم مجانب‌های پویا

حسین قاسم نژاد مقری<sup>۱\*</sup>، سید مهدی توکلی<sup>۲</sup>

۱- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آیت الله املی.

۲- دانشیار گروه مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

\* Email: Hossein.Ghasemnejad@yahoo.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۱۱

### چکیده

در این مقاله روش مجانب‌های پویا MMA که یک روش برنامه‌ریزی ریاضی است برای حل مسئله بهینه‌سازی خرپا به کار گرفته شده است. اگرچه این روش در مسائل توپولوژی سازه‌های محیط پیوسته بسیار مورد استفاده قرار گرفته است، اما در مورد سازه‌های خرپایی کمتر مورد توجه بوده است. مسئله بهینه‌سازی مورد نظر در اینجا، مسئله کمینه‌سازی انرژی کرنشی سازه با در نظر گرفتن قید حجمی می‌باشد. برای اولین بار برای سازه خرپایی از مبنای روش SIMP و اعمال ضریب جریمه تابع چگالی برای بهینه‌سازی همزمان توپولوژی و ابعاد اعضای خرپا استفاده شده است. به منظور انجام بهینه‌سازی، تحلیل حساسیت تحلیلی انجام شده است. مسائل متنوعی در انتها حل شده‌اند و نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند در صورت استفاده از ضریب جریمه مناسب، پاسخ بهینه درست برای مسائل معیار به دست می‌آید. همچنین برخی مسائل کاربردی‌تر نیز حل شده و نتایج مورد بحث قرار گرفته‌اند.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی توپولوژی، بهینه‌سازی ابعاد، خرپا، تحلیل حساسیت، روش SIMP، روش MMA

### ۱- مقدمه

تقسیم می‌شود. در بهینه‌سازی شکل مرزهای بهینه یک سازه مشخص می‌شوند. بهینه‌سازی ابعاد، به یافتن ابعاد هندسی مقاطع مورد استفاده در سازه می‌پردازد. در نهایت بهینه‌سازی توپولوژی به تعیین چیدمان کلی سازه می‌پردازد. در مورد سازه خرپایی که موضوع این مقاله است، تعیین توپولوژی به معنای تعیین وجود یا عدم وجود هر یک از اعضا و چگونگی ارتباط آنها با یکدیگر است. می‌توان چگونگی انجام بهینه‌سازی را از دو منظر، یکی الگوریتم بهینه‌سازی و دیگری شیوه انجام آن بیان نمود. از منظر الگوریتم انجام بهینه‌سازی، در یک تقسیم بندی کلی دو دسته روش وجود دارد: روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی

بهینه‌سازی سازه‌ای مسئله‌ای است که در دهه‌های گذشته مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. از آنجا که هدف از طراحی سازه، یافتن بهترین سازه ممکن برای پاسخ به نیازهای طراحی و با استفاده از امکانات مشخص است، می‌توان گفت طراحی سازه، خود یک مسئله بهینه‌سازی است. اما بهینه‌سازی به معنای عرف آن، یافتن بهترین طرح ممکن، از طریق کمینه یا بیشینه‌سازی یک تابع هدف (مثل وزن یا سختی سازه)، با اقلان یک یا چند تابع قید است. بهینه‌سازی سازه‌ای به سه دسته بهینه‌سازی شکل، بهینه‌سازی توپولوژی و بهینه‌سازی ابعاد

قرار گرفته است. کاربرد این روش هم به صورت تابع گسسته و بر مبنای روش المان محدود [13] و هم به صورت تابع پیوسته برای سایر روش‌های تحلیل بوده است [14, 15].

مطالعات بهینه‌سازی توپولوژی سازه خرپا معمولاً با استفاده از یک سازه اولیه که سازه زمینه<sup>7</sup> نامیده می‌شود، انجام می‌شود [16]. در سازه زمینه تمام گره‌ها از طریق تمام المان‌های ممکن به هم مرتبط هستند و در نتیجه یک سازه با تعداد زیاد المان حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن مساحت هر یک از المان‌ها به عنوان متغیر طراحی و با انجام بهینه‌سازی، بسیاری از المان‌ها حذف می‌شوند و المان‌های باقی مانده توپولوژی سازه را تعیین می‌کنند. مراجع [17, 18] نمونه‌هایی از کاربرد روش مذکور در بهینه‌سازی خرپا در سال‌های اخیر هستند.

بسیاری از تحقیقات انجام شده در مورد سازه‌های خرابایی در دهه اخیر با استفاده از روش‌های فراابتکاری انجام شده است. از این میان می‌توان [19-24] را بیان نمود. از آنجا که این روش‌ها بر مبنای ریاضی نیستند، نوآوری‌های به کار رفته در آنها می‌تواند منجر به بالا رفتن احتمال بهتر شدن پاسخ و نزدیکتر شدن به نقطه بهینه شود که این موضوع بسیاری از تحقیقات سال‌های اخیر بوده است.

در روش ارائه شده در این مقاله از یک سازه زمینه، اما با حجم کم استفاده می‌شود که در آن هر گره فقط با گره‌های مجاور خودش مرتبط است. این شکل ارتباط در ادبیات موضوع، ارتباط رده یک<sup>8</sup> نامیده می‌شود. به علاوه در این روش به جای استفاده از مساحت میله‌ها، از چگالی مصالح آنها به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شود. از روش SIMP، برای فرمول بندی مسئله بهینه‌سازی استفاده خواهد شد. با اینکه این موضوع در مسائل محیط پیوسته بسیار مورد استفاده قرار گرفته است، ولی در مورد سازه خرابایی برای اولین بار ارائه می‌شود. برای حل مسئله بهینه‌سازی، از الگوریتم ریاضی MMA استفاده می‌شود. با

ریاضی<sup>1</sup> و روش‌های فراابتکاری<sup>2</sup>. روش‌های فراابتکاری به مشتقات توابع هدف و قید نیاز ندارند و در مسائل پیچیده غیر محدب و غیرخطی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. با وجود این، این روش‌ها به تعداد زیادی تحلیل نیاز دارند که این موضوع هزینه محاسباتی را بسیار بالا می‌برد. روش‌های الگوریتم ژنتیک [1]، ازدحام ذرات [2]، کلونی مورچه [3]، جستجوی هماهنگ [4] و بسیاری روش‌های دیگر جزو این دسته از روش‌ها هستند. برای مرور این روش‌ها و کاربردها در بهینه‌سازی توپولوژی می‌توان به مرجع [5] مراجعه نمود.

در روش‌های ریاضی، جستجوی بهینه با استفاده از اطلاعات مشتقات توابع هدف و قید انجام می‌شود و در نتیجه با تعداد دفعات تکرار کمتر، همگرایی می‌تواند صورت پذیرد. یکی از اولین روش‌های ریاضی برای حل مسائل توپولوژی، روش معیار بهینگی است (OC)<sup>3</sup> [6, 7]. همچنین روش‌های تقریبی بر مبنای ریاضی [8, 9] برای حل این مسائل به کار گرفته شدند. در روش تقریب‌سازی محدب (CONLIN)<sup>4</sup> [10] که بعداً معرفی شد، یک زیر مسئله تقریبی تشکیل می‌شود که همواره محدب است و رسیدن به نقطه بهینه را تضمین می‌کند. در ادامه روش مجانب‌های پویا (MMA)<sup>5</sup> [11] معرفی شد که در حال حاضر یکی از بهترین و پرکاربردترین روش‌های ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی است.

از نظر شیوه‌های انجام بهینه‌سازی توپولوژی، یکی از متداول‌ترین روش‌ها، ایده توزیع مصالح است. یکی از پرکاربردترین روش‌ها که بر مبنای این ایده استوار است، روش مواد ایزوتروپیک جامد با ضریب جریمه (SIMP)<sup>6</sup> [12] است. در این روش، به منظور حذف چگالی‌های بینابین و رسیدن به یک پاسخ صفر و یک، یک ضریب جریمه در محاسبه ماتریس سختی المان اعمال می‌شود. این روش سال‌هاست که برای سازه‌های پیوسته مورد استفاده

<sup>1</sup> Mathematical programming

<sup>2</sup> Meta-Heuristic methods

<sup>3</sup> Optimality Criteria

<sup>4</sup> CONvex LINearization

<sup>5</sup> Method of Moving Asymptotes

<sup>6</sup> Solid Isotropic Material with Penalization

<sup>7</sup> Ground Structure

<sup>8</sup> Rank-1

به صورت ضریبی در مساحت به کار برد. در این صورت مقدار  $V(x_i)$  را در رابطه (۱) می‌توان به صورت رابطه (۲) بیان نمود.

$$V(x_i) = V(\rho_i) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_0 l_i \quad (2)$$

در این رابطه،  $A_0$  مقدار سطح مقطع المان‌ها و  $l_i$  طول هر المان می‌باشند. قابل ذکر است که انتخاب مقدار  $A_0$  در طرح موثر است که این مقدار می‌تواند با نظر طراح تعیین شود.

برای به دست آوردن توپولوژی سازه، لازم است یک پاسخ اصطلاحاً صفر و یک حاصل شود. یعنی یک المان باید باشد یا نباشد. در روش SIMP برای این منظور از یک ضریب جریمه بزرگتر از یک استفاده می‌شود که در مقاله حاضر نیز برای اولین بار این کار برای سازه خرپایی انجام خواهد شد. چگونگی اعمال این ضریب به این صورت است که در محاسبه ماتریس سختی المان، چگالی به توان ضریب جریمه  $\mu$  می‌رسد (رابطه ۳) و در نتیجه المان‌های با چگالی بینابین سختی کمتری در مقابل حجم اشغالی تولید می‌کنند و در نتیجه وجودشان به صرفه نخواهند بود.

$$\mathbf{K}_i = \rho^\mu \mathbf{K}_{0i} \quad (3)$$

در رابطه (۳)  $\mathbf{K}_i$  ماتریس سختی المان و  $\mathbf{K}_{0i}$  ماتریس سختی اولیه المان هستند.

مقدار این ضریب جریمه باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا یک طرح صفر و یک حاصل شود. این مقدار در منابع بزرگتر از [3, 25] توصیه شده است. در عمل ممکن است چگالی‌های بینابین همواره از بین نروند. این موضوع در مسائل محیط پیوسته منجر به حصول نقاط به اصطلاح خاکستری می‌شود که از نظر مهندسی خوشایند نیستند. با این حال برای مسئله مقاله حاضر که سازه خرپایی مد نظر است، چگالی بینابین از نظر مهندسی بی‌معنا نیست و چون به صورت ضریبی در مساحت اولیه اعمال می‌شود، بیانگر مساحت نهایی بهینه آن المان است.

توجه به اینکه این روش بر مبنای ریاضی است، در هر گام بهینه‌سازی نیاز به مقادیر مشتقات توابع هدف و قید دارد. به این منظور در هر مرحله بهینه‌سازی، تحلیل حساسیت انجام می‌شود.

در ادامه مقاله در بخش دو به شرح بهینه‌سازی توپولوژی و رابطه سازی به کار رفته برای آن پرداخته می‌شود. در بخش سه تحلیل حساسیت و چگونگی به دست آوردن مشتقات لازم در فرایند بهینه‌سازی تشریح می‌شود. بخش چهار مختصراً الگوریتم مجانب‌های پویا را بیان می‌کند و در نهایت در بخش پنج، نمونه‌های عددی حل می‌شوند و نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش شش نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

## ۲- بهینه‌سازی توپولوژی

معیار بهینه‌سازی مورد نظر در این مقاله، معیار کمینه‌سازی انرژی کرنشی است که معادل بیشینه‌سازی سختی کلی سازه است. به عبارت دیگر، هدف پیدا کردن سخت‌ترین سازه ممکن با استفاده از حجم مشخصی از مصالح است. این مسئله به شکل رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \min c(x_i) & \quad (1) \\ V(x_i) & \leq V^{\max} \\ x_i^{\min} & \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

در این رابطه  $c$  انرژی کرنشی،  $V$  حجم سازه و  $V^{\max}$  بیشینه حجم قابل استفاده هستند.  $x_i$  متغیر طراحی است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد و محدود به دو مقدار بالا و پایین است که به ترتیب با  $x_i^{\max}$  و  $x_i^{\min}$  نشان داده شده‌اند.  $n$  تعداد المان یا همان تعداد اعضای خرپا می‌باشد. این رابطه با فرض برقراری تعادل استاتیکی برقرار است. متغیر طراحی در نظر گرفته شده در اینجا، با الهام از روش SIMP، یک تابع فرضی است که تابع چگالی نامیده شده و با  $\rho$  نشان داده می‌شود. این تابع مقداری بین صفر و یک دارد که یک بیان‌کننده وجود مصالح و صفر به معنی عدم وجود آن است. برای مسئله خرپا می‌توان مقدار این تابع را در هر المان خرپا ثابت در نظر گرفت و

شکل ۱. فلوجارت بهینه‌سازی توپولوژی و اندازه

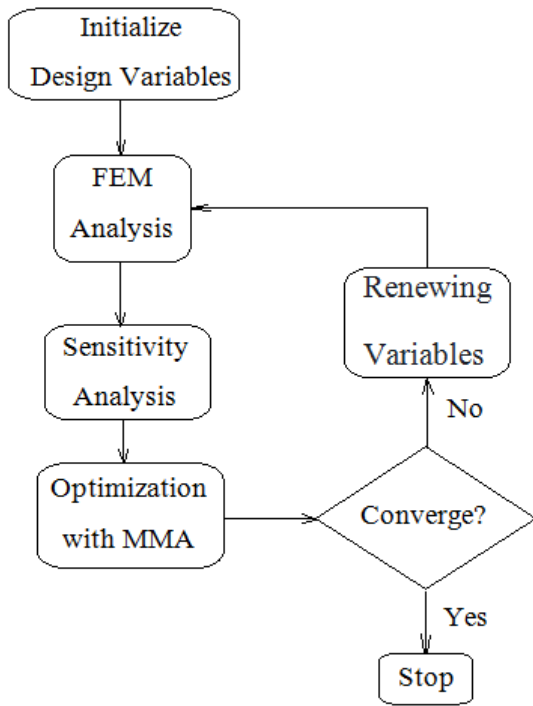


Fig. 1. The flowchart of topology and size optimization

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = A_0 l_i \quad (5)$$

در فرمول‌سازی روش اجزای محدود، مقدار انرژی کرنشی را می‌توان با رابطه (۶) بیان نمود.

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (6)$$

که  $\mathbf{U}$  و  $\mathbf{F}$  به ترتیب بردارهای تغییر مکان گرهی و بار گرهی و  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی کل سازه هستند. با توجه به این رابطه و با در نظرگیری تقارن در ماتریس سختی می‌توان مشتق تابع انرژی کرنشی نسبت به هر متغیرهای طراحی دلخواه را با رابطه (۷) به دست آورد.

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

همچنین با در نظر گرفتن معادله تعادل از رابطه (۸)

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (8)$$

و مشتق گیری از این رابطه، رابطه (۹) به دست می‌آید.

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad (9)$$

به بیان دیگر با این کار بهینه‌سازی ابعاد و توپولوژی توام با هم انجام می‌شود.

روند انجام بهینه‌سازی، به صورت یک چرخه مبتنی بر تکرار تا حصول همگرایی است. به این منظور ابتدا مقادیر اولیه به هر یک از متغیرهای طراحی (چگالی هر المان خرابا) اختصاص می‌یابد. سپس تحلیل سازه به روش اجزای محدود انجام می‌شود تا مقادیر توابع هدف و قید در این نقطه مشخص شدند. بعد از آن تحلیل حساسیت انجام می‌شود تا مقادیر مشتقات مورد نیاز توابع نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی به دست آیند. در نهایت بهینه‌سازی با استفاده از روش MMA انجام می‌شود. پاسخ به دست آمده به عنوان نقطه شروع گام بعدی به کار می‌رود و این روند تا حصول معیار همگرایی تکرار می‌شود. شکل (۱)، فلوجارت فرایند بهینه‌سازی به کار گرفته شده در این مقاله را نشان می‌دهد. معیار همگرایی برای توقف فرایند بهینه‌سازی را می‌توان به صورت رابطه (۴) تعریف نمود.

$$|\Delta c^{k-j} - \Delta c^{k-j-1}| < \varepsilon \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (4)$$

مطابق این رابطه در صورتی که قدر مطلق تفاضل تغییرات انرژی کرنشی در  $m$  تکرار متوالی از مقدار تلوئرانس  $\varepsilon$  که عدد کوچکی است، کمتر باشد، عملیات بهینه‌سازی متوقف می‌شود.  $k$  شمارنده تکرار بهینه‌سازی می‌باشد.

### ۳- تحلیل حساسیت

در این مقاله از الگوریتم MMA برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده می‌شود. این الگوریتم بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی عمل می‌کند و مقادیر مشتقات توابع هدف و قید برای انجام بهینه‌سازی لازم هستند. در مسئله حاضر، با توجه به رابطه (۱)، توابع هدف و قید به ترتیب انرژی کرنشی و حجم سازه هستند. حجم سازه از رابطه (۲) به دست می‌آید و با یک مشتق‌گیری ساده می‌توان حساسیت آن را نسبت به مقدار چگالی هر المان مطابق رابطه (۴) به دست آورد.

$$P(\mathbf{X}) \approx P(\mathbf{X}^k) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{r_i}{U_i - x_i} + \frac{s_i}{x_i - L_i} \right) \quad (13)$$

که مقادیر  $r_i$  و  $s_i$  با رابطه (۱۴) تعیین می‌شوند.

$$\text{if } \frac{\partial P}{\partial x_i}(X^k) > 0 \quad (14)$$

$$\rightarrow r_i = (U_i - x_i^k)^2 \frac{\partial P}{\partial x_i}(X^k), s_i = 0$$

$$\text{if } \frac{\partial P}{\partial x_i}(X^k) < 0 \rightarrow$$

$$r_i = 0, s_i = -(x_i^k - L_i)^2 \frac{\partial P}{\partial x_i}(X^k)$$

پارامترهای مثبت  $U_i$  و  $L_i$  به ترتیب مجانب‌های بالا و پایین هر متغیر طراحی هستند که محدوده‌ای را که در آن تابع  $P$  می‌تواند پاسخ‌های معقول برای بهینه‌سازی داشته باشد را محدود می‌کنند. این مقادیر برای هر یک از متغیرهای طراحی در هر تکرار به روز می‌شوند و از این رو نام مجانب‌های پویا نامیده می‌شوند.

در مسئله حاضر با توجه به اینکه افزایش چگالی منجر به افزایش سختی و در نتیجه کاهش میزان انرژی کرنشی (تابع هدف) می‌شود، همواره مشتق انرژی کرنشی نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی (چگالی هر المان) منفی خواهد بود. در نتیجه تقریب رابطه (۱) در  $k$  امین گام بهینه‌سازی به شکل رابطه (۱۵) خواهد بود.

$$\min \left\{ c(\boldsymbol{\rho}^k) - \sum_{i=1}^n \frac{(\rho_i^k - L_i)^2}{\rho_i - L_i} \frac{\partial c}{\partial \rho_i}(\boldsymbol{\rho}^k) \right\} \quad (15)$$

$$\text{s.t. : } \sum_{i=1}^n \rho_i A_0 l_i \leq V^{\max}$$

$$0 < \rho^{\min} \leq \rho_i \leq 1$$

در این رابطه  $\rho^{\min}$  یک مقدار بسیار کوچک است که برای جلوگیری از تکنیکی در تحلیل اعمال می‌شود. به این ترتیب در هر گام بهینه‌سازی، یک مسئله محدب و تفکیک پذیر قابل حل به دست می‌آید. در الگوریتم MMA این مسئله به کمک روش دوگان<sup>۱</sup> [11] حل می‌شود.

با قرار دادن رابطه (۹) در رابطه (۷)، مشتق انرژی کرنشی نسبت به متغیر طراحی دلخواه مطابق رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

معادله (۱۰) نشان می‌دهد مشتق انرژی کرنشی نسبت به یک متغیر طراحی دلخواه، بستگی به مشتق ماتریس سختی کل سازه به آن متغیر طراحی دارد. با توجه به اینکه در فرمول‌بندی متداول اجزای محدود، ماتریس سختی کل از جمع ماتریس‌های سختی المان‌ها به دست می‌آید (رابطه ۱۱) و با توجه به رابطه (۳) می‌توان به سادگی مشتق ماتریس سختی کل سازه را نسبت به چگالی هر المان مطابق رابطه (۱۲) به دست آورد.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i = \sum_{i=1}^n \rho_i^\mu \mathbf{k}_{0i} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = \mu \rho_i^{\mu-1} \mathbf{k}_{0i} \quad (12)$$

به این ترتیب مشتقات مورد نیاز توابع هدف و قید برای الگوریتم بهینه‌سازی به دست می‌آیند.

#### ۴- الگوریتم مجانب‌های پویا

در فرایند بهینه‌سازی سازه، الگوریتم حل بهینه‌سازی، باید مسئله بهینه‌سازی (۱) را حل کند. برای حل به روش ریاضی، این مسئله باید محدب و خطی باشد. در عمل و در مسائل واقعی بسیاری از مسائل این شرایط را دارا نیستند. به این خاطر، یک تقریب‌سازی انجام می‌شود که در آن با استفاده از اطلاعات مقادیر توابع هدف و قید و مشتقاتشان در یک نقطه خاص، یک تابع محدب ساخته می‌شود که تفکیک‌پذیر و قابل حل است. از پاسخ این مسئله، برای تقریب‌سازی مرحله بعد استفاده می‌شود و این کار تا حصول همگرایی ادامه می‌یابد.

در روش مجانب‌های پویا، این تقریب برای تابع  $P$  با  $n$  متغیر حقیقی  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$  در همسایگی  $K$  امین نقطه تکرار،  $\mathbf{X}^K$  به شکل رابطه (۱۲) انجام می‌شود.

<sup>1</sup> Dual Method

## ۵- نمونه‌های عددی

برای حل این نمونه سه حالت مختلف در نظر گرفته شده است که تفاوت آنها در مقدار ضریب جریمه می‌باشد. نتایج بهینه‌سازی توپولوژی در هر یک از حالت‌ها در شکل (۳) نمایش داده شده است. در حالت اول مقدار ضریب جریمه برابر  $\mu = 1$  (یعنی بدون جریمه) اعمال شده است. با مشاهده حالت اول در شکل (۳) ملاحظه می‌شود که مصالح در تمامی اعضا توزیع شده اند و هیچ عضوی حذف نشده است. چنانچه پیشتر ذکر شد، اعمال ضریب جریمه باعث پرهزینه شدن المان‌های با چگالی بینابین و در نتیجه حذف آنها از سازه خواهد شد. در اینجا نتیجه عدم اعمال این ضریب به خوبی مشاهده می‌شود. سازی است.

شکل ۳. نتایج بهینه‌سازی سازه نمونه اول

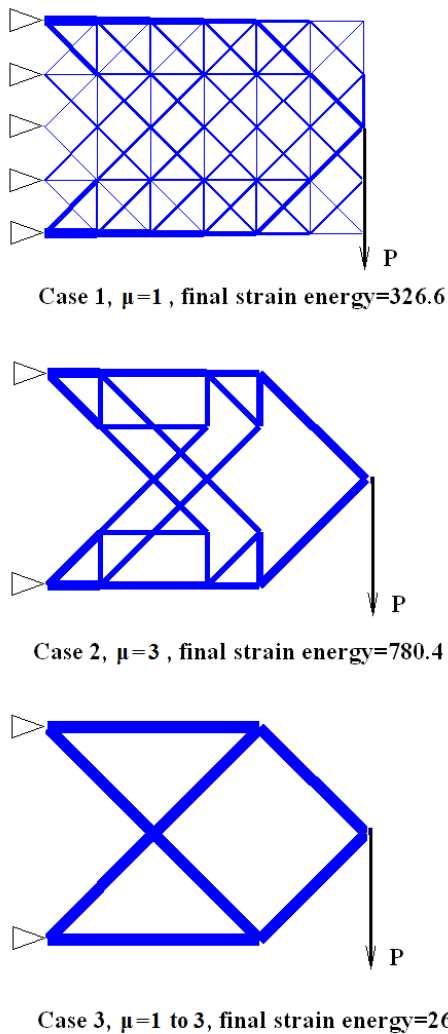


Fig. 3. Optimization results of example one

در این بخش نمونه‌هایی از حل مسائل خرپای دو بعدی به روش مذکور ارائه خواهد شد. دو نمونه اول از مسائل معیار انتخاب شده‌اند تا درستی روش ارائه شده نشان داده شود. نمونه‌های سوم و چهارم از مسائل کاربردی‌تر هستند. در تمام نمونه‌ها مقدار مدول الاستیسیته مصالح خرپا برابر  $E = 10,000$  در نظر گرفته شده است. مقدار حد پایین تابع چگالی برابر  $\rho^{\min} = 0.001$  انتخاب شده است و در هنگام بهینه‌سازی، المان‌های با این مقدار چگالی و یا خیلی نزدیک به آن از سازه حذف شده‌اند. پارامترهای همگرایی رابطه (۴) برابر  $m = 5$  و  $\varepsilon = 0.005$  در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر معیار همگرایی مذکور، معیار حداقل ۸۰ تکرار نیز در حل مسائل این بخش لحاظ شده است. سایر پارامترها، در هر یک از نمونه‌ها ذکر شده‌اند.

## ۵-۱- نمونه یک

در این نمونه، سازه خرپایی طره تحت بار نقطه‌ای در انتهای آن مطابق شکل (۲) در نظر گرفته شده است. خرپای سازه از یک شبکه گره  $5 \times 7$  تشکیل شده که هر گره فقط به گره‌های مجاور خودش متصل شده است. مقدار بار برابر  $P = 100$  و مساحت هر یک از اعضا برابر  $A_0 = 6.45 \times 10^{-2}$  لحاظ شده‌اند. بیشترین مقدار حجم مورد استفاده برابر  $V^{\max} = 1.6$  در نظر گرفته شده است که برابر با بیست درصد از حالت کامل است.

شکل ۲. سازه خرپایی نمونه یک

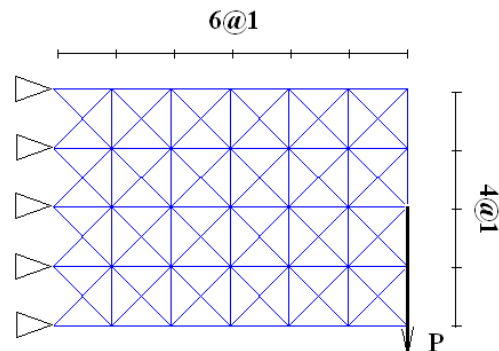


Fig. 2. Truss structure of example one

برای مشخص شدن اینکه کدام تعبیر درست است، می توان از ایده "روش ممتد"<sup>۱</sup> استفاده نمود. این ایده که توسط مرجع [26] معرفی شد برای مواردی که پاسخ محلی اتفاق می افتد می تواند کارگشا باشد. روش کار به این صورت است که در ابتدا از ضریب جریمه برابر یک استفاده می شود و سپس مقدار آن به صورت تدریجی در هر گام تا مقدار مشخصی افزایش داده می شود. در این نمونه، در حالت سه، از این ایده استفاده می شود و مقدار این ضریب از  $\mu=1$  تا  $\mu=3$  با گام های  $\Delta\mu=0.1$  افزایش داده می شود. توپولوژی به دست آمده در این حالت به همراه مقدار نهایی انرژی کرنشی آن در حالت سه شکل (۳) نشان داده شده است. مشاهده می شود یک سازه کاملاً صفر-یک به دست آمده است که از مقایسه آن با نتیجه مرجع [13] (شکل ۴)، درستی آن مشخص می شود. این شکل، نتیجه بهینه سازی توپولوژی این نمونه در محیط پیوسته را با استفاده از روش SIMP نشان می دهد. به علاوه با مقایسه مقادیر انرژی کرنشی نهایی مشخص می شود که پاسخ حالت دو یک پاسخ محلی و دور از پاسخ بهینه کلی بوده است. همچنین مقایسه انرژی های نهایی حالت های یک و سه بیانگر این موضوع است که اعمال ضریب جریمه متغیر و حذف المان های با چگالی بینابین موجب ایجاد سازه سخت تر شده است. توجه شود که اعمال ضریب جریمه برابر یک (حالت اول)، معادل در نظر گرفتن سطح مقطع هر المان به عنوان متغیر طراحی است و به عبارتی، مبنای روش SIMP در این حالت برقرار نیست. این نمونه، نشان دهنده کارایی بهتر روش ارائه شده، نسبت به سایر روش هایی است که در آنها سطح مقطع به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می شود.

در ادامه برای بررسی تاثیر مقدار ضریب جریمه، این نمونه با مقادیر دیگر  $\mu$  حل می شود. شکل (۵) نتایج حل نمونه حاضر با ضرایب جریمه ثابت  $\mu=4$  و  $\mu=5$  را نشان می دهد. مشاهده می شود که توپولوژی به دست آمده این حالت ها با نتیجه حالت  $\mu=3$  یکسان است. با

شکل ۴. بهینه سازی توپولوژی نمونه اول در محیط پیوسته [13]

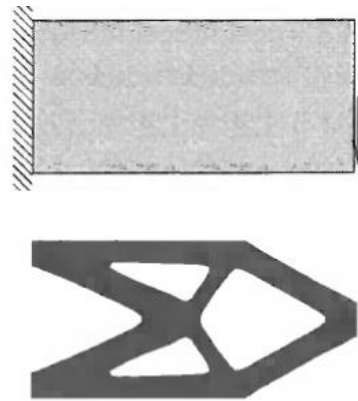


Fig. 4. Topology optimization of example one [13]

شکل ۵. نتیجه بهینه سازی نمونه اول، برای ضرایب جریمه  $\mu=4$  و

$\mu=5$

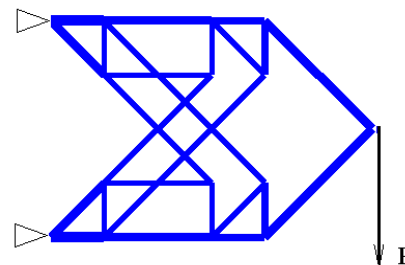


Fig. 5. Optimization results of example one, for  $\mu=4$  and  $\mu=5$

در حالت دوم مقدار ضریب جریمه برابر  $\mu=3$  لحاظ شده است. با مشاهده حالت دو شکل (۳) ملاحظه می شود که اعضای بیشتری نسبت به حالت یک حذف شده اند و می توان گفت توپولوژی متمایزی شکل گرفته است. با مقایسه مقادیر نهایی انرژی کرنشی حالت های یک و دو در این شکل، ملاحظه می شود در حالت دو انرژی کرنشی بزرگتری حاصل شده است. از این موضوع می توان دو تعبیر کرد که یکی از آنها باید درست باشد. تعبیر اول اینکه به خاطر اعمال ضریب جریمه بزرگتر از یک در حالت دو، و حذف جبری برخی المان ها، سازه به دست آمده انرژی کرنشی بیشتری نسبت به حالت یک دارد و پاسخ بهتری از این دو حالت وجود ندارد. تعبیر دو این است که اعمال این ضریب جریمه موجب به دام افتادن در یک پاسخ بهینه محلی شده است و پاسخ بهینه واقعی می تواند غیر از حالت دو باشد.

<sup>۱</sup> Continuation method

چگونگی ارتباط گره‌ها در سازه اولیه متفاوت با نمونه اول در نظر گرفته شده است، طوری که فضای دامنه خرابا مطابق شکل (۷) به سه ناحیه ۱، ۲ و ۳ تقسیم شده است و برای این نواحی یک شبکه نقاط گرهی به ترتیب  $2 \times 3$ ،  $2 \times 2$  و  $3 \times 2$  اعمال شده است.

شکل ۷. دامنه طراحی، حل SIMP [13]، تقسیم‌بندی دامنه و سازه

اولیه نمونه دوم

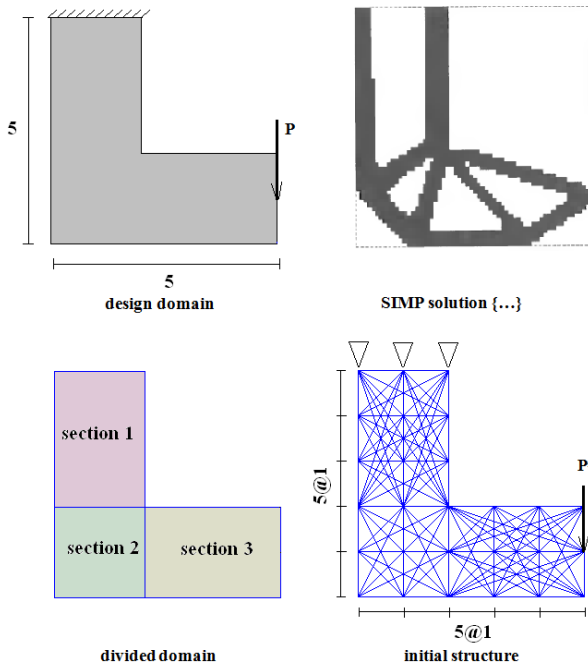


Fig. 7. Design domain, SIMP solution [13], divided domain and initial structure of example two

در هر ناحیه، هر گره، به تمام گره‌های موجود در آن ناحیه متصل شده است (شکل ۷). مقدار بار برابر  $P = 100$  در نظر گرفته می‌شود.

در مسائل توپولوژی محیط پیوسته، یکی از روش‌های بررسی درستی پاسخ، سنجش میزان وابستگی پاسخ به حجم مورد استفاده است. در اینجا با توجه به خرابا بودن سازه، این موضوع می‌تواند با مقایسه پاسخ‌ها در سطح مقطع‌های متفاوت انجام گیرد. به این منظور در این نمونه مدلسازی در سه حالت با سطوح مقطع  $A_0 = 6.45 \times 10^{-2}$ ،  $A_0 = 12.9 \times 10^{-2}$  و  $A_0 = 19.35 \times 10^{-2}$  انجام شده و نسبت حجمی در تمام حالت‌ها برابر ده درصد حجم کل اعضا اعمال شده است. پاسخ به دست آمده این سه حالت

مشاهده این شکل می‌توان نتیجه گرفت که مقدار ضریب جرمی ثابت برای حل این نمونه منجر به حصول پاسخ بهینه نخواهد شد و تنها در صورت استفاده از ضریب جرمی با تغییرات تدریجی این امر حاصل می‌شود.

شکل ۶. نمودار تغییرات انرژی کرنشی و حجم نمونه اول

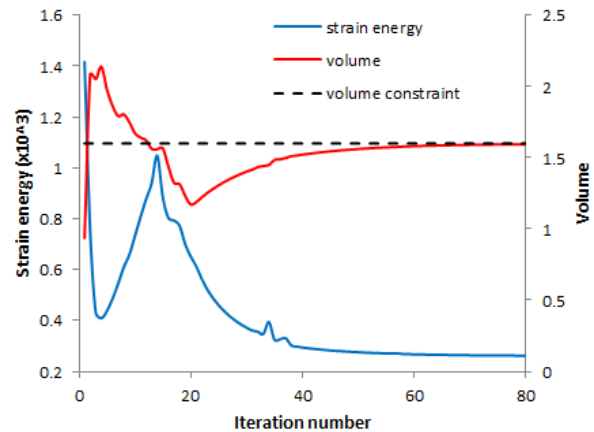


Fig. 6. Variation of strain energy and volume of example one

شکل (۶) نمودار تغییرات انرژی کرنشی و حجم نمونه اول را نشان می‌دهد. نمودار نشان دهنده همگرایی و پایداری پاسخ در انتهای تکرارها می‌باشد. مشاهده می‌شود که در ابتدای تکرار مقدار حجم از محدوده قید عبور می‌کند و مقدار انرژی کرنشی کاهش بسیاری می‌یابد. اما بعد از آن این روند به تدریج اصلاح می‌شود و تا تکرار حدود ۱۵ مقدار حجم به ناحیه شدنی<sup>۱</sup> برمی‌گردد و بعد از آن روند نزولی انرژی کرنشی آغاز شده و تا همگرایی نهایی ادامه دارد. به علاوه، دو نوسان کوچک دیگر نیز در انرژی کرنشی در تکرارهای ۳۰ تا ۴۰ مشاهده می‌شود. در نهایت با وجود این نوسان‌ها و خروج از محدوده شدنی ابتدایی، همگرایی پاسخ حاصل می‌شود که نشان دهنده توانایی بالای الگوریتم MMA در حل این مسئله بهینه

۵-۲- نمونه دو

در این نمونه یک خرابای زانویی شکل مورد بررسی قرار می‌گیرد که در وجه فوقانی مقید شده و در طرف دیگر تحت یک بار متمرکز قرار گرفته است (شکل ۷). در اینجا

<sup>۱</sup> feasible



دیده می‌شود که با وجود آنها، در نهایت روند کاهش می‌شود تا حصول همگرایی ادامه دارد.

شکل ۹. نمودار تغییرات انرژی کرنشی و حجم نمونه دوم

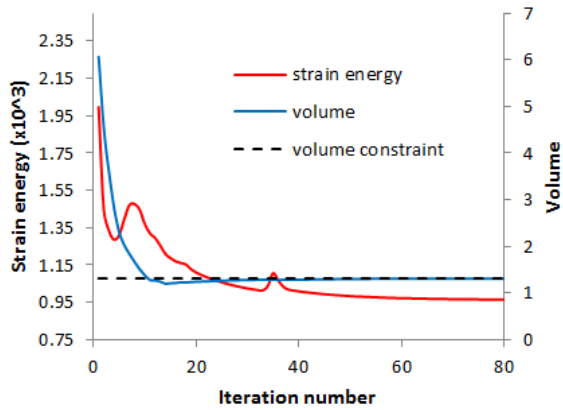


Fig. 9. Variation of strain energy and volume of example two

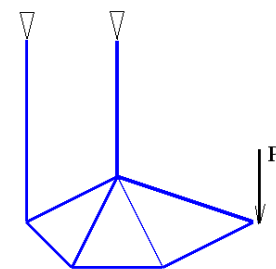
۵-۳- نمونه سه

در این نمونه یک سازه به شکل پل با بارهای متمرکز در گره‌های بالایی برابر  $P=10$  و چهار تکیه‌گاه در قسمت زیرین در نظر گرفته شده است (شکل ۱۰). چگالی اعضای فوقانی سازه که کارکرد عرشه پل را دارند از ابتدا برابر  $\rho=1$  در نظر گرفته شده و در فرایند بهینه‌سازی ثابت خواهد ماند. به عبارت دیگر چگالی این اعضا در مسئله بهینه‌سازی جزو متغیرهای طراحی محسوب نخواهند شد. مقدار سطح مقطع اعضا برابر  $A_0 = 6.45 \times 10^{-2}$  مقدار ضریب جریمه به صورت متغیر با تغییرات تدریجی از  $\mu=1$  تا  $\mu=3$  اعمال می‌شود. میزان حجم مورد استفاده برابر چهل درصد کل حجم کل اعضا اعمال شده است.

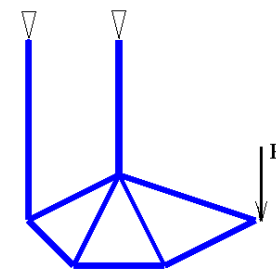
پاسخ به دست آمده در شکل (۱۰) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود توپولوژی سازه با حذف المان‌های غیر ضروری تشکیل شده است. سازه به دست آمده از بهینه‌سازی به صورتی شکل گرفته که در هر یک از دهانه‌ها یک شبه قوس تشکیل شده و المان‌های باقی مانده بارها را مستقیماً از عرشه به تکیه‌گاه‌ها منتقل می‌کنند. توجه شود که با توجه به اینکه سازه‌های مورد بررسی در این مقاله خرپا هستند و اعضا طول مشخصی دارند، روش ارائه شده همیشه منتج به المان‌های با چگالی یک نخواهد شد. برای

در شکل (۸) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود پاسخ‌های حاصل یکسان هستند و تفاوت در میزان بعد اعضا است که به خاطر متفاوت بودن سطح مقطع آنها می‌باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت، روش ارائه شده در این مقاله، حساسیت نسبت به سطح مقطع ندارد. مقایسه پاسخ‌ها با حل SIMP محیط پیوسته این مسئله در شکل (۷) بیانگر درستی پاسخ به دست آمده از این روش است.

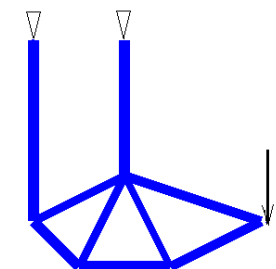
شکل ۸. نتایج بهینه‌سازی حالت‌های مختلف نمونه دو



Case 1  $A_0=0.0645$



case 2  $A_0=0.129$



case 3  $A_0=0.1935$

Fig. 8. Optimization results of different cases of example two

شکل (۹) نمودار تغییرات انرژی کرنشی و حجم کل سازه را در حین انجام بهینه‌سازی نشان می‌دهد. این نمودارها برای حالت اول این نمونه ( $A_0 = 6.45 \times 10^{-2}$ ) ترسیم شده‌اند. همگرایی پاسخ برای هر دو نمودار مشهود است. در اینجا هم نوسان‌هایی در نمودار انرژی کرنشی

می‌توان گفت در الگوریتم MMA با اینکه امکان ایجاد نامنظمی و پرش در تکرارهای اولیه وجود دارد، در نهایت پاسخ به سمت پاسخ بهینه و همگرایی آن حرکت می‌کند.

شکل ۱۱. نمودار تغییرات انرژی کرنشی نمونه سه

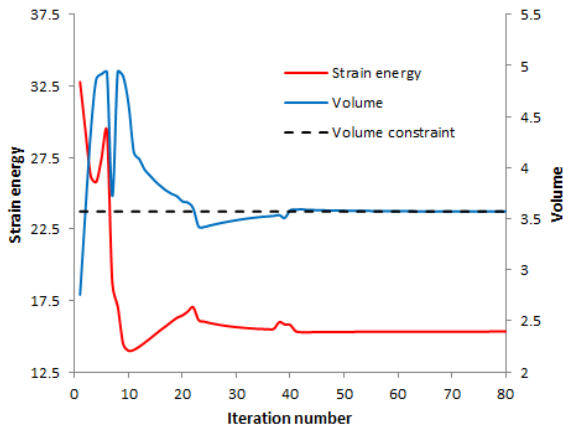


Fig. 11. Variation of strain energy of example three

#### ۴-۵- نمونه چهار

در این نمونه به عنوان آخرین نمونه این مقاله، سعی شده است از یک مسئله کاربردی تر استفاده شود. به این منظور سازه مورد بررسی در اینجا، خرابایی مشابه پل فورث بریج کشور اسکاتلند است. این پل که در شکل (۱۲) نشان داده شده است یکی از پل‌های مشهور این کشور است که با کاربری حمل و نقل ریلی در سال ۱۸۹۰ با خرابی فلزی ساخته شده است و در حال حاضر همچنان در حال سرویس‌دهی می‌باشد.

شکل ۱۲. پل فورث بریج



Fig. 12. The forth bridge

سازه در نظر گرفته شده در این نمونه، با الهام از این پل و با مدل‌سازی یکی از دهانه‌های آن مطابق شکل (۱۳) در نظر گرفته شده است. در این شکل نقشه واقعی اجرایی [27] و مدل دو بعدی مشابه با سازه واقعی نشان داده

نشان دادن این موضوع، مقادیر سطح مقطع‌های اعضای سازه بهینه، در انتهای شکل (۱۰) نشان داده شده است. چنانچه پیشتر اشاره شد، این نتیجه می‌تواند به نوعی بهینه‌سازی ابعادی یا همان سطح مقطع اعضای سازه باشد. به بیان دیگر روش ارائه شده توپولوژی کلی سازه را مشخص می‌کند و با توجه به حجم مصالح در دسترس، مساحت اعضای با اهمیت کمتر را نیز به دست می‌آورد.

شکل ۱۰. سازه اولیه و نتایج بهینه‌سازی نمونه سه

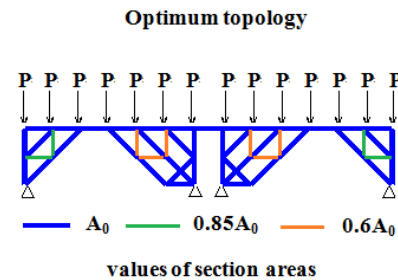
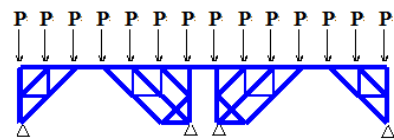
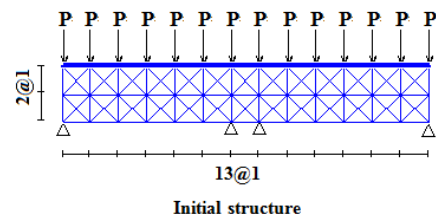
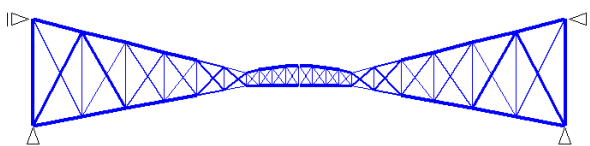


Fig. 10. Initial structure and optimization results of example three

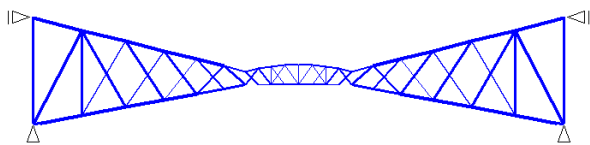
نمودار تغییرات انرژی کرنشی در حین انجام بهینه‌سازی در شکل (۱۱) گنجانده شده است. مانند نمونه‌های گذشته، در نمودار این نمونه هم پرش و نوسان در تکرارهای ابتدایی دیده می‌شود. به ویژه در مقدار حجم که در ابتدای کار از محدوده شدنی عبور نموده و یک نوسان انجام می‌دهد. در تکرارهای بعد از شماره ۲۰ که مقدار حجم به ناحیه شدنی باز می‌گردد، روند کاهشی انرژی کرنشی آغاز شده و تا همگرایی ادامه می‌یابد. توجه شود که در محدوده تکرار ۱۰ مقدار انرژی کرنشی کمتر از مقدار نهایی است که به خاطر تجاوز از قید حجمی طبیعتاً مورد قبول نیست. در نهایت با توجه به نمودار این شکل و نمودارهای نمونه‌های گذشته

خواهند شد. مقدار انرژی کرنشی سازه بهینه در حالت اول این نمونه، چنانچه در شکل (۱۴) نشان داده شده است برابر 1509.83 می‌باشد. به علاوه، در نمونه اول، هدف پیدا کردن توپولوژی بهینه و مقایسه با مراجع دیگر بود. در اینجا که یک نمونه از یک سازه کاربردی از پیش ساخته شده است، مرزهای سازه از پیش تعیین شده‌اند و تغییر و یا عدم تغییر توپولوژی شاید چندان اهمیت نداشته باشد. شکل (۱۵) نمودار همگرایی انرژی کرنشی و حجم سازه را در این حالت نشان می‌دهد.

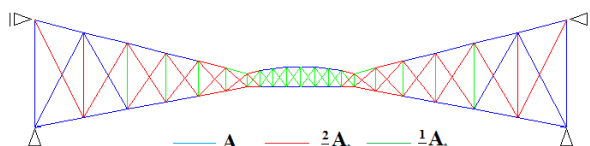
شکل ۱۴. نتایج بهینه‌سازی حالت‌های مختلف نمونه چهار



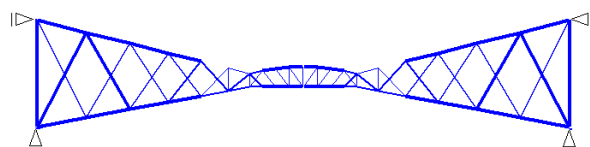
Optimization results for case 1,  
 $\mu=1$ , final strain energy= 1509.83



Optimization results for case 2,  
 $\mu=3$ , final strain energy= 1738.77



Areas of element for optimization in case 3



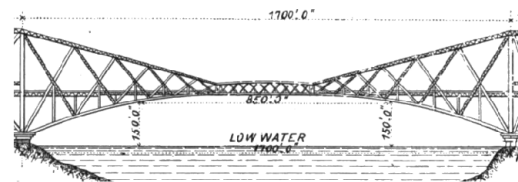
Optimization results for case 3,  
 $\mu=3$ , non-equal areas, final strain energy= 1619.04

Fig. 14. Optimization results of different cases of example four

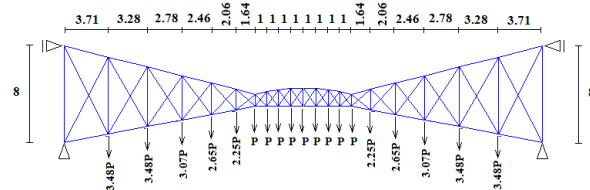
در حالت دوم، مقدار ضریب جریمه برابر  $\mu=3$  منظور می‌شود. نتیجه بهینه‌سازی این حالت به همراه مقدار انرژی کرنشی نهایی آن در شکل (۱۴) نشان داده شده است.

شده‌اند. توجه شود که ابعاد مدل در اندازه واقعی نیست، اما سعی شده است که با توجه به تصاویر موجود از سازه واقعی، نسبت‌های هندسی تا حد امکان نزدیک به آن باشند. مقادیر بارها، متناسب با طول دهانه‌های بارگیر هر گره انتخاب شده‌اند. به منظور کمتر کردن حجم محاسبات، با توجه به تقارن این مدل، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مناسب در محور تقارن، نصف سازه را در فرایند بهینه‌سازی مدل سازی نمود. در همه حالت‌های زیر حجم مصالح مورد استفاده برابر  $V^{\max}=5.6$  و مقدار  $P=10$  می‌باشند.

شکل ۱۳. نمای دو بعدی سازه واقعی [27] و مدل اولیه نمونه چهارم



2 D view of the real structure



Dimensions, loading and initial structure of the model

Fig. 13. 2D view of real structure [27] and initial model of example 4

برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه این نمونه، در اینجا سه حالت در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول مقدار سطح مقطع تمامی اعضا مانند نمونه‌های قبلی برابر  $A_0 = 6.45 \times 10^{-3}$  لحاظ می‌شود. همچنین مقدار ضریب جریمه در این حالت برابر  $\mu=1$  در نظر گرفته می‌شود. نتیجه بهینه‌سازی در این حالت در شکل (۱۴) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در این حالت هیچ یک از اعضای سازه حذف نشده‌اند و فقط ابعاد آنها تغییر یافته است. این موضوع قبلاً در نمونه یک نیز مشاهده شده بود و بنابراین در اینجا قابل انتظار بود. اما هدف از اعمال دوباره ضریب جریمه یک در اینجا مقایسه انرژی کرنشی به دست آمده با سایر حالت‌هایی است که در ادامه بیان

داده شده است. مشاهده می‌شود که در این حالت نیز اکثر اعضا قائم حذف شده و اعضای قطری باقی مانده‌اند و از این لحاظ مشابه حالت ۲ می‌باشد. با توجه به مقدار انرژی کرنشی 1619.04 و مقایسه آن با مقدار حالت ۲، مشاهده می‌شود انرژی کرنشی کمتری حاصل شده است. یعنی با تقسیم‌بندی اعضا به سه دسته مختلف و اختصاص مقادیر مختلف سطح مقطع اولیه به ترتیب اهمیت آنها، سازه به دست آمده از بهینه‌سازی، نتیجه بهتری نسبت به حالت با سطح مقطع‌های یکسان، حاصل شده است. اما با مقایسه آن با حالت ۱ مشاهده می‌شود، همچنان حالت ۱ انرژی کرنشی کمتری دارد. به عبارت دیگر حفظ توپولوژی اولیه و فقط بهینه‌سازی ابعاد برای این نمونه، در مقایسه با حالت‌های دیگر، پاسخ بهتری حاصل کرده است. فراموش نشود در همه حالت‌ها، مقدار حجم مصالح مصرفی یکسان بوده است.

شکل ۱۵. نمودار تغییرات انرژی کرنشی نمونه چهار ( $\mu = 1$ )

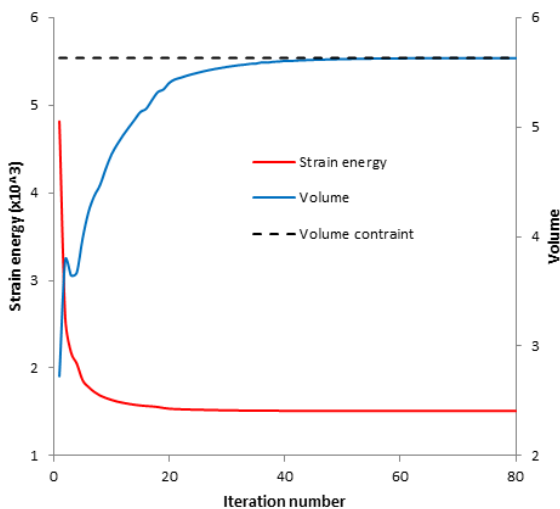


Fig. 15. Variation of strain energy of example three ( $\mu = 1$ )

با مشاهده شکل (۱۳) ملاحظه می‌شود در عمل و در اجرای سازه، المان‌های قائم حذف شده‌اند و فقط اعضا قطری باقی مانده‌اند. فراموش نشود که در اجرای سازه واقعی، جزییات طراحی بسیار زیادی به همراه مسائل فنی و اجرایی وجود دارند. به علاوه مدل کوچک شده مورد استفاده در این مقاله، از نظر جزییات هندسی و بارگذاری تفاوت‌هایی با سازه واقعی دارد. علاوه بر این، سازه واقعی،

توجه شود که در این حالت به خاطر وجود ضریب جریمه بزرگتر از یک، مقدار انرژی کرنشی به کار رفته در فرایند بهینه‌سازی، با مقدار واقعی متفاوت است. مقدار انرژی کرنشی بیان شده در اینجا با توجه به این موضوع و عدم لحاظ ضریب جریمه محاسبه شده است و مطابق شکل (۱۴) برابر 1738.77 می‌باشد. از مقایسه نتایج حالت‌های اول و دوم مشاهده می‌شود در حالت دوم بیشتر اعضای قائم، به ویژه در دو انتهای دوزنقه‌ای شکل کناری حذف شده‌اند. از این نظر، سازه نهایی شباهت زیادی با سازه اجرا شده دارد. با توجه به بزرگتر از یک بودن ضریب جریمه، حذف برخی از اعضای با اهمیت کمتر، کاملاً مورد انتظار بود. اما نکته جالب مقایسه مقادیر انرژی کرنشی نهایی دو حالت است. مشاهده می‌شود که انرژی کرنشی حالت اول مقدار کمتری نسبت به حالت دوم دارد و از این نظر محصول نهایی حالت اول با مقادیر یکسان مصالح، سازه سخت‌تری بوده است. به عبارت دیگر در این نمونه توپولوژی اولیه، نزدیکتر به بهینه بوده و نیازی به اعمال ضریب جریمه و حذف المان‌های اضافی نبوده است. توجه شود در هر دو حالت، فرایند بهینه‌سازی به درستی انجام شده و به معنی اشتباه بودن پاسخ در حالت دوم نیست. اما این چگونگی فرمول‌بندی و پیش فرض اولیه حالت دوم است که در نهایت تاثیرگذار بوده است. به بیان دیگر در این حالت با اعمال ضریب جریمه، المان‌های بینابین به طرف حذف شدن سوق داده شده‌اند که این موضوع از نظر بیشتر شدن سختی، نتیجه معکوس داشته است.

در ادامه، یک حالت دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود که در آن بر خلاف نمونه‌های قبل، مقدار سطح مقطع اعضا با یکدیگر برابر نیستند. به این منظور با توجه به نتیجه بهینه‌سازی سطح مقطع در حالت یک، مقادیر سطح مقطع مسئله به سه دسته  $\frac{1}{3}A_0$  و  $\frac{2}{3}A_0$  و  $A_0$  تقسیم می‌شوند. شکل (۱۴) نشان می‌دهد که مقدار سطح مقطع اولیه هر یک از اعضا برای حالت سوم چقدر است. در ادامه نتیجه بهینه‌سازی این حالت به همراه مقدار نهایی انرژی کرنشی بدون اعمال ضریب جریمه، در شکل (۱۴) حالت ۳ نشان

1996. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, part b (cybernetics)*, 26(1), pp.29-41.
- [4] Geem, Z.W., Kim, J.H. and Loganathan, G.V., 2001. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. *simulation*, 76(2), pp.60-68.
- [5] Kaveh, A. and Zolghadr, A., 2018. Meta-heuristic methods for optimization of truss structures with vibration frequency constraints. *Acta Mechanica*, 229, pp.3971-3992.
- [6] Rozvany, G.I.N. and Zhou, M., 1991. The COC algorithm, part I: cross-section optimization or sizing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1-3), pp.281-308.
- [7] George, I. and Rozvany, N., 1989. Structural Design Via Optimality Criteria: The Prager approach to Structural Optimization.
- [8] Schmit Jr, L.A. and Miura, H., 1976. *Approximation concepts for efficient structural synthesis* (No. NASA-CR-2552). NASA.
- [9] Vanderplaats, G.N. and Salajegheh, E., 1989. New approximation method for stress constraints in structural synthesis. *AIAA journal*, 27(3), pp.352-358.
- [10] Fleury, C., 1989. CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. *Structural optimization*, 1, pp.81-89.
- [11] Svanberg, K., 1987. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2), pp.359-373.
- [12] Rozvany, G., 2000, June. The SIMP method in topology optimization-theoretical background, advantages and new applications. In *8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization* (p. 4738).
- [13] Bendsoe, M.P. and Sigmund, O., 2003. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media
- [14] Hassani, B., Khanzadi, M. and Tavakkoli, S.M., 2012. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria. *Structural and multidisciplinary optimization*, 45, pp.223-233.
- [15] Tavakkoli, S.M., Hassani, B. and Ghasemnejad, H., 2013. Isogeometric topology optimization of structures by using MMA. *Int J Optim Civil Eng*, 3(2), pp.313-26.

یک سازه سه بعدی است و مدل‌سازی دو بعدی باعث ساده سازی‌هایی خواهد شد. با توجه به همه این مسائل، در این نمونه نشان داده شد که برای مدل دو بعدی، با فرضیات مطرح شده، با اینکه المان‌های قائم از اهمیت کمتری برخوردار هستند، اما از نظر تئوریک وجودشان منجر به ایجاد سازه سخت‌تری خواهد بود.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر روش SIMP با ضریب جریمه اعمالی بر تابع چگالی برای سازه‌های خرپایی ارائه شده است. از الگوریتم ریاضی MMA با انجام تحلیل حساسیت برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده شده است. در حل مسائل با روش مطرح شده مشاهده شد که چگونگی انتخاب ضریب جریمه بر پاسخ موثر بوده است. در برخی نمونه‌ها، ضریب جریمه ثابت منجر به پاسخ مطلوب نشده است، در حالی که اعمال آن با تغییرات تدریجی به پاسخ مورد انتظار رسیده است. همچنین مشاهده شد که عدم اعمال ضریب جریمه (مقدار ثابت یک) می‌تواند منجر به بهینه‌سازی سطح مقطع بدون تغییر توپولوژی شود. ملاحظه شد که چگونگی فرمول‌بندی اولیه مسئله می‌تواند منجر به تفاوت در پاسخ شود. در نمونه‌های مورد بررسی در این مقاله، مسئله با سطح مقطع متفاوت اعضا، پاسخ بهتری نسبت به مسئله با اعضای دارای سطح مقطع یکسان داشته است.

#### ۷- سپاسگزاری

نویسنده نهایت سپاسگزاری را از جناب آقای پروفیسور K. Svanberg به خاطر قرار دادن کد متلب روش MMA می‌نماید.

#### ۸- مراجع

- [1] Holland, J.H. (1975) *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor
- [2] Eberhart, R. and Kennedy, J., 1995, October. A new optimizer using particle swarm theory. In *MHS'95. Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science* (pp. 39-43). Ieee.
- [3] Dorigo, M., Maniezzo, V. and Colorni, A.,

2020. Size and shape optimization of truss structures with natural frequency constraints using modified simulated annealing algorithm. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 45(5), pp.3511-3525.
- [23] Azizi, M., Aickelin, U., Khorshidi, H.A. and Shishehgarkhaneh, M.B., 2022. Shape and size optimization of truss structures by Chaos game optimization considering frequency constraints. *Journal of Advanced Research*, 41, pp.89-100.
- [24] Noii, N., Aghayan, I., Hajirasouliha, I. and Kunt, M.M., 2017. A new hybrid method for size and topology optimization of truss structures using modified ALGA and QPGA. *Journal of Civil Engineering and Management*, 23(2), pp.252-262.
- [25] Hassani, B. and Hinton, E., 2012. *Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software*. Springer Science & Business Media.
- [26] Petersson, J. and Sigmund, O., 1998. Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8), pp.1417-1434.
- [27] [https://en.wikipedia.org/wiki/Forth\\_Bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/Forth_Bridge)
- [16] Dorn, W.S., 1964. Automatic design of optimal structures. *Journal de mecanique*, 3, pp.25-52.
- [17] Jiang, Y., Zegard, T., Baker, W.F. and Paulino, G.H., 2018. Form-finding of grid-shells using the ground structure and potential energy methods: a comparative study and assessment. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57, pp.1187-1211.
- [18] Sotiropoulos, S. and Lagaros, N.D., 2020. Topology optimization of framed structures using SAP2000. *Procedia Manufacturing*, 44, pp.68-75.
- [19] Miguel, L.F.F. and Miguel, L.F.F., 2012. Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 39(10), pp.9458-9467.
- [20] Kaveh, A. and Khayatazad, M., 2013. Ray optimization for size and shape optimization of truss structures. *Computers & Structures*, 117, pp.82-94.
- [21] Cao, H., Qian, X., Chen, Z. and Zhu, H., 2017. Enhanced particle swarm optimization for size and shape optimization of truss structures. *Engineering Optimization*, 49(11), pp.1939-1956.
- [22] Millan-Paramo, C. and Abdalla Filho, J.E.,

# Topology and size optimization of truss structures based on material density approach and MMA

Hossein Ghasemnejad Moghri<sup>\*1</sup>, Seyed Mehdi Tavakkoli<sup>2</sup>

- 1- Assistant Professor in Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ayatollah Amoli branch, Islamic Azad University
- 2- Associate Professor in Department of Structural Engineering, Faculty of Civil Engineering, Shahrood University of Technology

\* Email: Hossein.Ghasemnejad@yahoo.com

Received: 02/12/2023

Accepted: 10/07/2024

## Abstract

In this article, the Method of Moving Asymptotes (MMA), which is a mathematical programming method, is utilized for solving truss optimization problems. In comparison with metaheuristic optimization methods that require large number of structural analyses, using MMA can decrease the computational cost by using sensitivity analysis. In the MMA method, the objective function is approximated using the derivatives information at the specific point and a convex and separable sub-problem is generated. The sub-problem is then solved by using a dual method and the solution is used as the next iteration point. The process is interrupted until the convergence of solutions. The Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method has been used for topology optimization (TO) parameterization. Although this method has been widely used in TO problems of continuous structures, it is the first time that is considered in truss structures. In this method, the material density is considered as a continuous function in the design domain where its values are limited between zero and one. In continuous problems, the optimal distribution of this function in the design domain leads to optimal topology of the structure. To remove intermediate densities, which is not desirable in a practical point of view, a penalty exponent is applied to this formulation. For truss problems, the values of this function can be considered constant in each truss member. As a result, an optimization problem can be formed in which the density values of the members are considered as design variables of the optimization problem. The optimization problem considered here is minimization of the strain energy under the volume constraint. In other words, the aim is to find the stiffest possible structure under specific loading and support conditions by considering a certain volume of material. As mentioned earlier, in mathematical programming methods such as MMA, the derivatives of objective and constraint functions are needed. This information is obtained by sensitivity analysis. Sensitivity analysis methods are generally divided into three categories: analytical, semi-analytical and numerical methods. In this article, analytical method is used to perform sensitivity analysis. The required derivatives are presented by using explicit functions, which saves calculation cost and the computational time. Various benchmark examples and some more practical cases have been solved at the end of the article and results have been discussed. For the benchmark problems, it is observed that final solution highly depends on the value of the applied penalty exponent, and by taking the appropriate value; the correct optimal solution will be reached. It is also shown that in these problems, obtained solution is independent of cross-sectional area values of truss members. In addition, it is concluded that applying a constant value of one for penalty exponent, can lead to optimization of cross-section of members without varying structural topology. It is also shown that considering different initial designs for the optimization problem can lead to different solutions, so that in examples, studied in this article, the case with different cross-sectional area has a better result than the case with the same cross-sectional area.

**Keywords:** Topology Optimization, Size Optimization, Truss, Sensitivity Analysis, SIMP, MMA.