

## بررسی کمانش دینامیکی ستونی با مقطع متغیر و میراگر ویسکوز تحت بارمحوری متناوب

امیرحسین طاهرخانی<sup>۱</sup>، مجید امین افشار<sup>۲\*</sup>

۱. کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین.
۲. دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین.

\* رایانامه نویسنده مسئول: [mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir](mailto:mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir)

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۲ - تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۰۹

### چکیده

به کارگیری اعضای با مقطع غیریکنواخت به دلیل کاهش مقدار مصالح و وزن سازه به طور گسترده در سوله‌های صنعتی و پل‌های فلزی مرسوم است. کمانش از مشکلات عمده‌ای است که مهندسان در طراحی اعضای تحت فشار محوری (ستون‌ها) با آن مواجه‌اند. به همین دلیل، پژوهش‌های متعددی توسط پژوهشگران در زمینه کمانش ستون‌ها انجام شده است. بیشتر پژوهش‌های پیشین، محدود به بررسی کمانش استاتیکی در ستون‌های غیرمنشوری الاستیک است. در مقاله حاضر، در مدلی جامع کمانش دینامیکی ستونی با مقطع متغیر و میراگر ویسکوز تحت بارمحوری متناوب بررسی می‌شود. اثر بارمحوری متناوب به صورت تابع کسینوسی، اثر میراگر ویسکوز در انتهای عضو و تغییرات ممان اینرسی در سه حالت تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه چهارم لحاظ می‌شود. برای حل معادله تشکیل شده، ابتدا شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته می‌شود. از توابع میان‌یابی لاگرانژ به عنوان تابع شکل و از تابع فوریه (پیشنهادی بولوتین) به عنوان پاسخ دینامیکی معادله استفاده می‌شود. در گام بعدی، ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی و جرم استخراج می‌شود. پس از استخراج ماتریس‌های فوق، مقادیر ویژه (ضریب بارکمانشی) معادله بررسی می‌شود. از تکنیک ریشه‌یابی مولر به وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب برای محاسبه مقادیر ویژه استفاده می‌شود. ضریب بارکمانشی ستون به‌ازای مقادیر مختلفی از ضریب بازشوندگی و درصد میرایی میراگر ویسکوز در شرایط مرزی مختلف ارزیابی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر مذکور تأثیر قابل‌توجهی بر تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک و فرکانس تشدید دارند. تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک به صورت تابع نمایی است. نتایج مقاله حاضر با پژوهش‌های پیشین درستی آزمایشی و مقایسه می‌شود. هماهنگی قابل‌قبولی بین نتایج مقاله حاضر و پژوهش‌های پیشین برقرار است.

**کلمات کلیدی:** کمانش دینامیکی، پایداری دینامیکی، ضریب بارکمانشی، ظرفیت بار بحرانی، تحلیل مقدار ویژه.

### ۱- مقدمه

به مطالعه ظرفیت بارکمانشی ستون‌های الاستیک بر مبنای روش‌های حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم یا تقریبی عددی پرداختند. سیگینر<sup>۵</sup> [5] به بررسی پایداری ستون الاستیک با مقطع مخروطی پرداخت. ایشان، تغییرات ممان اینرسی در طول ستون را خطی پیوسته فرض کرده است و از توابع بسط برای محاسبه بارکمانشی ستون بهره گرفته است. لی<sup>۶</sup> [6] و ال سدر<sup>۷</sup> [7] به بررسی پایداری ستون‌های الاستیک غیر منشوری با استفاده از

اعضای با مقطع متغیر به علت به حداقل رساندن مصرف مصالح و وزن سازه و افزایش ظرفیت بار بحرانی کمانشی، کاربرد فراوانی در سازه‌های فولادی به ویژه سوله‌های صنعتی و پل‌های فلزی دارند. بدین منظور تحقیقات زیادی توسط پژوهشگران برای ارزیابی پایداری در ستون‌های غیر منشوری صورت گرفته است. نخستین بار تیموشنکو<sup>۱</sup> [1]، وانگ<sup>۲</sup> [2]، بازانت<sup>۳</sup> [3]، مورلی<sup>۴</sup> [4]

<sup>1</sup> Timoshenko

<sup>2</sup> Wang

<sup>3</sup> Bazant

<sup>4</sup> Morley

<sup>5</sup> Siginer

<sup>6</sup> Lei

<sup>7</sup> Al Sadder

معادلات تعادل در زمینه جابه‌جایی‌های کوچک با در نظر گرفتن اثر کوپل بین انحراف عرضی و زاویه چرخش به دست آمده است. بولوتین<sup>9</sup> [15] نخستین بار به بررسی کمناش دینامیکی سیستم‌های مکانیکی پرداخت. ایشان با معرفی یک بارگذاری دینامیکی مشخص برای سیستم دینامیکی بر مبنای روش‌های تحلیلی به مطالعه پایداری دینامیکی سیستم پرداخت. در بخشی از پژوهش ایشان، به بررسی کمناش دینامیکی ستون‌های الاستیک منشوری تحت بارمحوری دینامیکی پرداخت. ایشان بر مبنای روش تحلیلی و ارائه تابع سری فوریه به عنوان پاسخ، تغییر مکان دینامیکی ستون را بررسی کرد و نشان داد که فرکانس تحریک بر بارکمناشی دینامیکی اثرگذار است. دوویدی و همکاران<sup>10</sup> [16] به مطالعه و بررسی ناپایداری تیری ساندویچی سه‌لایه متقارن با هسته نرم و تحت یک نیروی محوری نوسانی پرداختند. ایشان از روش گالرکین تعمیم‌یافته برای استخراج معادلات حرکت به یک مجموعه از معادلات بی‌بعد متیو - هیل با ضرایب مختلط استفاده کرده‌اند. اواینگ<sup>11</sup> [17] به بررسی پایداری دینامیکی تیری الاستیک اولر - برنولی تحت اثر جرم متحرک ساده پرداخت. ایشان از روش تئوری آشوب<sup>12</sup> و روش مقیاس چندگانه<sup>13</sup> برای بررسی اثر جرم متحرک بر پایداری تیر استفاده کرد. قنادپور<sup>14</sup> و همکاران [18] به بررسی کمناش و ارتعاشات تیر اولر - برنولی غیرمحللی به روش ریتز پرداختند. ژیرالدو - لندونیو و آریستیزابال - اوچوا<sup>15</sup> [19] به بررسی پایداری دینامیکی ستون لاغر الاستیک با اتصالات نیمه‌سخت، میرایی و اینرسی دورانی تحت بارمحوری متناوب پرداختند. مطالعات پژوهش فوق نشان می‌دهد که رفتار دینامیکی ستون‌ها تحت بارگذاری متناوب به شدت تحت تأثیر سختی خمشی اتصالات نیمه‌سخت و میرایی قرار می‌گیرد، اما لحاظ اینرسی دورانی در معادله متشکله تأثیر چندانی بر رفتار دینامیکی عضو ندارد. پوراصغر و کاماریان<sup>16</sup> [20] به مطالعه پایداری دینامیکی ستون نانوکامپوزیت درجه‌بندی شده غیریکنواخت تقویت شده توسط نانولوله کربنی روی بستر وینکر پرداختند. آزاربنی و

روش سری‌های توانی (ریتز) پرداختند. لو و هوآنگ<sup>1</sup> [8] به بررسی ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو باریک شونده با مواد مدرج تابعی پرداختند. ایشان از روش سری‌های توانی برای حل معادله متشکله بهره گرفتند. مواد تابعی مدرج، مواد مرکبی هستند شامل دو یا چند نوع ماده که خواص آنها به صورت تابعی تغییر کرده و به صورت درجه‌بندی کنار هم قرار می‌گیرند. حدیدی و همکاران<sup>2</sup> [9] به تحلیل غیرخطی مرتبه دوم تیرهای با مقطع متغیر پرداختند. ایشان از روش سری‌های توانی برای حل معادله متشکله بهره گرفته‌اند. ایشان، اثر بارهای متمرکز در طول تیر را نیز در نظر گرفتند. صفوی و حق‌الهی<sup>3</sup> [10] به بررسی بارکمناشی خمشی ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار آزاد در برابر حرکت جانبی پرداختند. برای حل معادله حاکم از روش ترکیبی انرژی و تفاضل محدود استفاده شده است. بلیک و همکاران<sup>4</sup> [11] به بررسی بارکمناشی، طول مؤثر ستون‌های با مقطع متغیر در یک سوله صنعتی پرداختند. از روش تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم استفاده شده است. پایداری ستون‌های قاب در حالت با مهاربند و مهارنشده بررسی شده است و برای درستی‌آزمایی، نتایج تحقیق با نرم‌افزار انسیس<sup>5</sup> مقایسه شده است. فتحی و همکاران<sup>6</sup> [12] به بررسی پایداری ستون‌های دارای اتصالات نیمه صلب، دارای نقص اولیه و تغییر شکل‌های برشی پرداختند. ایشان معادله دیفرانسیل حاکم را بر مبنای روش شیب افت استخراج کرده است. پس از حل معادله، پارامترهای بارکمناشی و لنگرهای ایجاد شده ستون‌های قاب به دست آمده است. عسگریان<sup>7</sup> [13] به بررسی پایداری ستون‌های مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر نمایی پرداخت. در این پژوهش، معادله حرکت حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع متغیر نمایی با استفاده از ترکیب بسط مک لورن و روش سری‌های توانی بررسی شده است. سلطانی و عسگریان<sup>8</sup> [14] به بررسی پایداری ستونی غیر منشوری تیموشنکو با شرایط مرزی گیردار - آزاد بر مبنای روش سری توانی پرداختند. بر اساس تئوری تیر تیموشنکو،

<sup>9</sup> Bolotin<sup>10</sup> Dwivedy et al<sup>11</sup> Ouyang<sup>12</sup> Perturbation method<sup>13</sup> Method of Multiple Scales<sup>14</sup> Ghannadpour et al<sup>15</sup> Giraldo-Londoño, Aristizábal-Ochoa<sup>16</sup> Poursaghar, Kamarian<sup>1</sup> Luo, Huang<sup>2</sup> Hadidi et al<sup>3</sup> Safavi, Haghollahi<sup>4</sup> Bilyk et al<sup>5</sup> Ansys<sup>6</sup> Fathi et al<sup>7</sup> Asgarian<sup>8</sup> Soltani, Asgarian

باردینامیکی زلزله مولفه قائم قرار می‌گیرد. برای لحاظ اثر بار قائم زلزله، بار محوری  $P$  به صورت مجموع بارمحوری هارمونیک و استاتیکی نوشته می‌شود.

شکل ۱. ستونی با مقطع متغیر و میراگر ویسکوز تحت بارمحوری متناوب

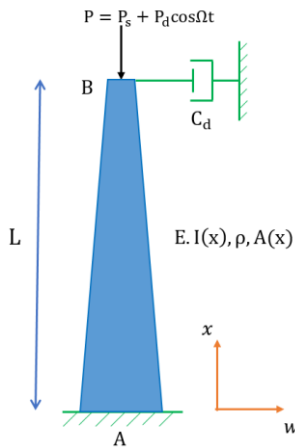


Fig. 1. A column with variable section and viscous damper under alternating axial load

## ۲-۱- استخراج معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای روش همیلتون

در این بخش با استفاده از روش همیلتون، معادله متشکله مجموعه موردنظر استخراج می‌شود. بدین منظور باید اصل همیلتون برای کارهای جنبشی، خارجی و پتانسیل ناشی از (اینرسی در واحد طول ستون، بار کمانش محوری، انرژی کرنشی ستون و میراگر ویسکوز و میرایی ذاتی) نوشته شود.

مطابق تئوری تیر اویلر - برنولی، فرضیه‌های ذیل برقرار می‌باشند:

سطح مقطع ستون بعد از تغییرشکل مسطح باقی می‌ماند. یعنی ستون دارای یک تغییر مکان در پلان  $x - z$  و یک دوران حول محور  $y$  است. از آثار اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در پلان  $x - z$  صرف نظر می‌شود. زاویه دوران کوچک بوده به گونه‌ای که فرضیه زوایای کوچک صادق است. بدین ترتیب، برای تیر اویلر - برنولی میدان‌های جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (2)$$

در رابطه فوق فرض می‌شود که محورهای  $x$  و  $z$  به ترتیب در جهت طول و ضخامت هستند و  $z$  نسبت به تار خنثی اندازه‌گیری می‌شود.  $w$  معرف جابه‌جایی عرضی ستون است. کرنش عرضی بر

انصاری<sup>۱</sup> [21] به مطالعه پایداری دینامیکی نانولوله کربنی تحت بارگذاری استاتیکی و متناوب محوری با استفاده از روش فلوکت - لیاپانوف پرداختند. هنائو و همکاران<sup>۲</sup> [22] به مطالعه پایداری دینامیکی تیری تیموشنکو غیرمنشوری الاستیک پرداختند. آثار تغییر شکل برشی در امتداد عضو، نیروی برشی مرتبه دوم ناشی از بارمحوری در معادله متشکله لحاظ شده است. پایداری دینامیکی عضو در حالات مقطع مخروطی و پلکانی بررسی شده است. همان‌طور که بیان شد، پژوهش‌های متعددی در زمینه بررسی پایداری استاتیکی ستون‌های غیر منشوری انجام شده است. در صورتی که برای طراحی جامع باید مقاومت و پایداری ستون تحت انواع بارگذاری ثقلی و دینامیکی بررسی شد. با توجه به اینکه بیشتر تغییر مکان جانبی در سازه‌ها ناشی از بار جانبی زلزله و باد است و تغییر مکان جانبی ناشی از بار قائم زلزله جزئی است. به همین علت، در سازه‌ها از میراگر ویسکوز جانبی برای کنترل و کاهش ارتعاشات و تغییر مکان جانبی در مقابل بار جانبی زلزله و باد استفاده می‌شود. اما حضور میراگر ویسکوز جانبی علاوه بر کنترل تغییر مکان جانبی سازه بر پایداری دینامیکی نیز اثر گذار است. در این مقاله تاثیر میراگر ویسکوز خطی جانبی بر پایداری دینامیکی ستون غیرمنشوری در مقابل بار قائم زلزله بررسی می‌شود. در این تحقیق از معادله بولوتین به عنوان تابع پاسخ دینامیکی مجموعه و از تابع لاگرانژ مرتبه سی به عنوان تابع شکل برای حل معادله استفاده می‌شود. ممان اینرسی و مساحت عضو در سه حالت به صورت تابعی بر حسب ممان اینرسی ابتدایی و مساحت ابتدایی در معادله اعمال می‌شود. معادله هدف از نوع مقدار ویژه است. از تکنیک‌های ریشه‌یابی برای حل معادله و یافتن پارامترهای پاسخ از جمله (بارکمانشی و ضریب بارکمانشی) استفاده می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی و تعریف مسئله

مطابق شکل (۱) ستونی با مقطع متغیر با مشخصات گشتاور دوم سطح  $I(x)$ ، مدول الاستیسیته  $E$ ، جرم واحد طول  $\rho \times A(x)$ ، طول  $L$ ، سطح مقطع  $A(x)$  و جرم مخصوص  $\rho$  فرض می‌شود. اثر میراگر ویسکوز با متغیر  $C_d$  و میرایی ذاتی با متغیر  $C$  لحاظ می‌شود. فرض می‌شود ستون مورد نظر در زمان رخداد زلزله تحت

<sup>1</sup> Azarboni, Ansari

<sup>2</sup> Henao et al

$$\delta V_1 = - \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_0^L dt \quad (11)$$

$$+ \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dt \right] dx$$

در رابطه فوق،  $P_s$  و  $P_d$  و  $\Omega$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی، ضریب بار استاتیکی و فرکانس تحریک است.

کار خارجی میراگر ویسکوز و میرایی ذاتی به صورت زیر بیان می‌شود. برای میراگر ویسکوز و میرایی ذاتی، عملگر وردشی زیر در بازه زمانی برای نقطه انتهایی برقرار می‌باشد.  $\delta_d$  معرف تابع دلتای دیراک است.

$$\delta V_2 = \int_0^{t_f} C + C_d \delta_d(x-L) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \quad (12)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی و اعمال شرایط مرزی طبیعی و زمانی، روابط زیر نتیجه می‌شوند.

$$\delta \pi = \delta T - \delta U - \delta V = \quad (13)$$

$$- \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w dx dt$$

$$+ \int_0^L \rho A(x) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta w \right]_0^{t_f} dx$$

$$- \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta u - EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt$$

$$+ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_0^L dt$$

$$+ \int_0^{t_f} C + C_d \delta_d(x-L) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx = 0$$

بنابراین معادله (۱۳) شامل دو بخش است. در بخش اول معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو و در بخش دوم شرایط مرزی مسئله استخراج شده است. شرایط مسئله باتوجه به شکل (۱) در تابع شکل اعمال می‌شود. معادله دیفرانسیل طبق رابطه زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$+ (C + C_d \delta_d(x-L)) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0$$

برای شرایط مرزی گیردار - آزاد شکل (۱)، روابط زیر برای شرایط مرزی هندسی و زمانی حاصل می‌شوند.

$$\theta(x=0) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0$$

$$w(x,0) = w(x,t_f) = 0$$

حسب جابه‌جایی عرضی به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{zz}(x,z) = \gamma_{xz}(x,z) = 0 \quad (4)$$

در رابطه فوق  $\varepsilon_{xx}$  بیانگر کرنش نرمال ایجاد شده در ستون است. با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییر در کار ناشی از انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\delta U = \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \int_0^A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx \right] dt \quad (5)$$

$t_f$  زمان نهایی است. روابط تنش-کرنش مطابق قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (6)$$

با جایگذاری معادلات (۳ و ۶) در رابطه‌ی (۵) و انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی کرنشی ستون به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود.

$$\delta U = - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right] dt \quad (7)$$

$$= \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w - EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt$$

$$- \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx \right] dt$$

کار جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد ستون به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T = \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \frac{1}{2} \rho A(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (8)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء، تغییر در انرژی جنبشی به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta T = \int_0^L \rho A(x) \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_0^{t_f} dx \quad (9)$$

$$- \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \right] dx$$

کار ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$V_1 = - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{1}{2} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt \quad (10)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال‌گیری جزء به جزء، تغییر در کار ناشی از بار کمانش محوری به صورت زیر ارائه می‌شود.

۲-۲- معادله دیفرانسیل ستون غیر منشوری با میراگر ویسکوز

معادله دیفرانسیل ستونی با مقطع متغیر با لحاظ اثر جرم واحد طول ستون، میراگر ویسکوز، میرایی ذاتی، انرژی کرنشی ستون و اثر بار محوری دینامیکی بر مبنای روش انرژی به صورت زیر بیان می‌شود.  $w(x, t)$  خیز جانبی ستون مورد نظر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + (C + C_d \delta_d(x-L)) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (16)$$

از معادله بولوتین [15] به عنوان تابع پیشنهادی برای پاسخ ارتعاشات سیستم‌های دینامیکی استفاده می‌شود. در رابطه زیر  $\Omega$  معرف فرکانس تحریک،  $a_k, b_k$  ضرایب بسط،  $u(x)$  بیان کننده تابع شکل معادله است.

$$w(x, t) = u(x) \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left[ a_k \sin\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) \right] \quad (17)$$

رابطه  $P = P_s + P_d \cos(\Omega t)$  به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P = P_{cr} \left( \frac{P_s}{P_{cr}} + \frac{P_d}{P_{cr}} \cos(\Omega t) \right) = P_{cr} (\eta + \mu \cos(\Omega t)) \quad (18)$$

در رابطه فوق  $\eta = \frac{P_s}{P_{cr}}$ ،  $\mu = \frac{P_d}{P_{cr}}$  است.  $\eta$  و  $\mu$  و  $P_d$  و  $P_s$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد، ضریب بار استاتیکی بی‌بعد، ضریب بار دینامیکی و ضریب بار استاتیکی است. با جای گذاری معادله (۱۷) و (۱۸) در معادله (۱۶)، معادله زیر بیان می‌شود.

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \left( \frac{\rho A(x) \Omega^2}{4} \mp \frac{C_d \Omega}{2} \delta_d(x-L) \right) \mp \frac{C \Omega}{2} u - P_{cr} \left( \eta \pm \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = 0 \quad (19)$$

شرایط مرزی هندسی و نیرویی برای هر دو انتهای اعضای

تحلیل شده به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$u(0) = 0, u(L) = 0 \quad \text{مفصلی - مفصلی} \quad (20)$$

$$\left( \frac{d^2 u(0)}{dx^2} \right) = 0, \left( \frac{d^2 u(L)}{dx^2} \right) = 0$$

$$u(0) = 0, u(L) = 0 \quad \text{گیردار - مفصلی}$$

$$\left( \frac{du(0)}{dx} \right) = 0, \left( \frac{d^2 u(L)}{dx^2} \right) = 0$$

$$u(0) = 0, u(L) = 0 \quad \text{گیردار - گیردار}$$

$$\left( \frac{du(0)}{dx} \right) = 0, \left( \frac{du(L)}{dx} \right) = 0$$

بر اساس فرض کوشی، میرایمیراگر ویسکوز متناسب با

ماتریس جرم آن لحاظ می‌شود [23].

$$C_d = 2\rho \int_0^L A(x) dx L \omega_1 \xi \quad (21)$$

در رابطه فوق  $C_d$  ضریب میرایی میراگر ویسکوز است که براساس فرکانس طبیعی مود اول  $\omega_1$  تعیین می‌شود. ( $\xi$  برابر با درصد میرایی است و مقادیری از (۵ تا ۲۰٪) را شامل می‌شود). هم‌چنین بر اساس فرض رایلی، ماتریس میرایی ذاتی متناسب با ترکیب خطی ماتریس‌های جرم و سختی آن لحاظ می‌شود [23].

$$C = \alpha[(\rho A)] + \beta[K_S] \quad (22)$$

در رابطه فوق  $K_S$  و  $(\rho A)$  و  $C$  به ترتیب ماتریس سختی ستون، ماتریس جرم، ماتریس میرایی هستند.  $\alpha$  و  $\beta$  ضرایب میرایی هستند که براساس نسبت‌های میرایی مربوط به دو مود ارتعاشی مشخص سازه ( $\omega_i, \omega_j$ ) یا در دو فرکانس مشخص تعیین می‌شوند. ( $\xi$  برابر با درصد میرایی است و مقادیری از (۱ تا ۵٪) دارد) [24].

$$\alpha = \frac{2\xi \omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \beta = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \quad (23)$$

۲-۳- اثر مقطع غیر منشوری

در اعضای غیر منشوری به دلیل غیرثابت بودن مقادیر طول و عرض، گشتاور دوم سطح مقطع و مساحت مقطع در حال تغییر هستند. جهت اعمال اثر غیر یکنواختی مقطع،  $A_0$  و  $I_0$  به ترتیب سطح مقطع بزرگتر در ابتدای عضو و ممان اینرسی آن است.  $X$  فاصله هر نقطه از ستون،  $L$  طول ستون،  $\beta$  ضریب باریک شونده‌گی،  $b$  عرض،  $h$  ارتفاع مقطع هستند. ضریب  $\beta$  مقادیری از ۰ تا ۰٫۹ را دارد [17].

جدول ۱. معادلات حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی مقطع

$I(x)$	$A(x)$	حالت
$I_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)$	$A_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)$	۱ طول مقطع مستطیلی به صورت خطی کاهش می‌یابد. اما عرض مقطع ثابت است.
$I_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)^3$	$A_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)$	۲ عرض مقطع در امتداد عضو با شیب $\beta$ کاهش می‌یابد. اما طول مقطع ثابت است.
$I_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)^4$	$A_0 \left(1 - \frac{\beta x}{L}\right)^2$	۳ طول و عرض مقطع مستطیلی در راستای عضو و با شیب $\beta$ به صورت هم‌زمان کاهش می‌یابد.

Table 1. Equations governing changes in area and moment of inertia of the section

## ۲-۴- حل معادله با روش لاگرانژ

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۱۹) و شرایط مرزی مسئله (۲۰) ارائه شد. در این بخش با استفاده از روش عددی توابع میان‌یابی لاگرانژ معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، توابع شکل از نوع درجه سی‌ام برای استخراج ماتریس‌های عضو فرض می‌شوند.

### ۲-۴-۱- شکل ضعیف شده معادله متشکله

در پژوهش حاضر از روش لاگرانژ برای حل معادله متشکله استفاده می‌شود. در این روش، تابع باقیمانده در تابع وزنی ضرب شده و از حاصل آن انتگرال‌گیری می‌شود. پاسخ به صورت معادله نمایش داده می‌شود. در این رابطه  $v(x)$  تابع وزن است که باید نسبت به  $x$  حداقل دوبار مشتق پذیر باشد.

$$\int_0^L R(x) v(x) dx = 0 \quad (24)$$

$$\int_0^L v(x) \times \left[ \frac{\rho A(x) \Omega^2 u}{4} \mp \frac{C_d \Omega u}{2} \delta_d(x-L) \mp \frac{C \Omega u}{2} - \frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - P_{cr} \left( \pm \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] dx = 0$$

معادله (۲۴) دو بار انتگرال‌گیری جز به جز شده تا دومرتبه مشتق‌گیری با تابع وزن  $v(x)$  مبادله شود و دو مرتبه مشتق‌گیری روی متغیر وابسته  $u(x)$  باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می‌شود. روش پیشنهادی روش تحلیل معادله در فضای گسسته است. با توجه به اینکه اثر میراگر ویسکوز تنها در نقطه انتهایی عضو اثر گذار است. بدین منظور اثر میراگر ویسکوز به عنوان شرایط مرزی انتهایی، در معادله متشکله اعمال می‌شود.

$$\int_0^L \left[ -EI(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + P_{cr} \left( \eta \pm \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + \left( -\frac{\rho A(x) \Omega^2}{4} \mp \frac{C \Omega}{2} \right) uv \right] dx - v(L) \left( \mp \frac{C_d \Omega}{2} \right) u(L) + v(0) \frac{d^3 u(0)}{dx^3} + \frac{dv(L)}{dx} \frac{d^2 u(L)}{dx^2} - \frac{dv(0)}{dx} \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = 0 \quad (25)$$

با توجه به اینکه در معادله (۲۵) چهار شرط در یک جز (برای هر گره دو عدد) برقرار است. ایجاب می‌کند که توابع میان‌یابی یک جز دارای مشتقات غیرصفر و تا مرتبه سه پیوسته باشند. برای افزایش دقت در محاسبات، از توابع میان‌یابی درجه سی‌ام برای

حل معادله استفاده می‌شود.

$$u(x) = \sum_{j=1}^{30} (c_j \varphi_j) \quad (26)$$

$$V(x) = \sum_{j=1}^{30} (\varphi_j) \quad (27)$$

مدل لاگرانژ معادله حاکم با جایگزینی میان‌یابی لاگرانژ معادله (۲۶) برای  $u$  و  $\varphi_j$  برای تابع وزن  $v$  (۲۷) در شکل ضعیف معادله (۲۴) حاصل می‌شود. از آنجا که چهار متغیر گرهی موجود است. پس باید برای حل معادله، تابع شکل حداقل مرتبه سوم باشد. اما برای افزایش دقت، سی انتخاب مختلف برای  $v$ ،  $v_1 = \varphi_1$  و ... و  $v_{30} = \varphi_{30}$  مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\sum_{i,j=1}^{30} \left[ \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \right) - P_{cr} \left( \eta \pm \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{d \varphi_i}{dx} \right) \left( \frac{d \varphi_j}{dx} \right) + \left( -\frac{\rho A(x) \Omega^2}{4} \mp \frac{C \Omega}{2} \right) \varphi_i \varphi_j \right] dx - Q_i = 0 \quad (28)$$

$$K_{ij(S)} = \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \right) dx \quad (29)$$

$$K_{ij(G)} = \int_0^L \left( \frac{d \varphi_i}{dx} \right) \left( \frac{d \varphi_j}{dx} \right) dx$$

$$M_{ij} = \int_0^L (\rho A(x)) \varphi_i \varphi_j dx$$

$$C_{ij} = \int_0^L C \varphi_i \varphi_j dx$$

$$\sum_{i,j=1}^{30} \left( K_{ij(S)} - P_{cr} \left( \eta \pm \frac{\mu}{2} \right) K_{ij(G)} - \frac{\Omega^2}{4} M_{ij} \mp \frac{C \Omega}{2} C_{ij} \right) X_{ij} - Q_i = 0 \quad (30)$$

$$[K_S - P_{cr} \left( \eta \pm \frac{\mu}{2} \right) K_G - \frac{\Omega^2}{4} M \mp \frac{\Omega}{2} C] X - Q = 0$$

در رابطه (۲۹)  $K_{ij(S)}$  و  $K_{ij(G)}$  و  $M_{ij}$  و  $C_{ij}$  و  $Q_i$  و  $X_{ij}$  به ترتیب معرف ماتریس سختی مصالح، ماتریس سختی هندسی، ماتریس جرم، ماتریس میرایی، بردار نیروی جزء ستون و ماتریس بردار ویژه می‌باشد. رابطه (۳۰)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش‌های ریشه‌یابی عددی استفاده شود.

$$K_{ij} U_i = Q_i \quad (31)$$

$$K_{11} U_1 + K_{12} \theta_1 + \dots + K_{1n} \theta_n = 0$$

$$K_{21} U_1 + K_{22} \theta_2 + \dots + K_{2n} \theta_n = 0$$

⋮

سری توانی مرتبه سی ام بررسی می شود. تمامی مراحل فوق به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب<sup>۲</sup> انجام می شود. باید ابتدا مقدار بارکمانشی استاتیکی محاسبه، به این صورت که ابتدا باید ضریب  $\mu$  برابر صفر لحاظ شود و بارکمانشی  $P_{cr}$  مطابق رابطه (۳۲) محاسبه شود. بر مبنای بار کمانشی مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  به ازای فرکانس های تحریک مختلف ریشه یابی می شود. برای تعمیم پذیری نتایج به جای پارامتر  $\mu$  از پارامتر ضریب بارکمانشی  $\lambda_{cr}$  برای ارائه نتایج استفاده می شود. تأثیر متغیرهای مقطع غیر منشوری و میراگر ویسکوز بر ضریب بار دینامیکی بی بعد و ضریب بار کمانشی برای ستونی با طول ستون  $L = 15 \text{ m}$ ، سطح مقطع ستون (INP 220)  $A = 6.9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ، ممان اینرسی ستون (INP 220)  $I = 98 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ، مدول الاستیسیته  $E_s = 210 \text{ Gpa}$ ، جرم مخصوص فولاد  $\rho_s = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، ضریب بار استاتیکی  $\eta = 0.5$  بررسی می شود. در شکل (۲) تغییرات ممان اینرسی و مساحت در طول مقطع در حالت های مختلف به ازای  $\beta = 0.1$  (ضریب باریک شونده) نمایش داده می شود.

شکل ۲. تغییرات ممان اینرسی در طول مقطع در موارد مختلف

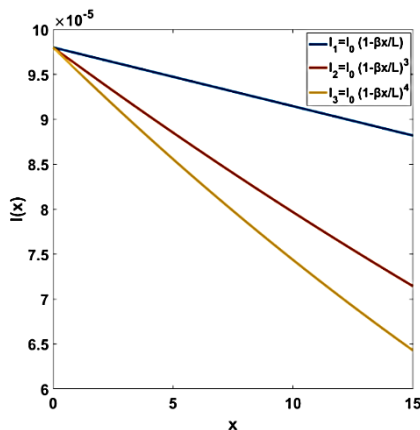


Fig. 2. Changes of the moment of inertia along the section in different cases

با توجه به شکل فوق مشخص است که در حالت ۱ تغییرات ممان اینرسی در طول مقطع به صورت خطی، حالت ۲ تغییرات ممان اینرسی به صورت سهمی درجه سوم، حالت ۳ تغییرات ممان اینرسی به صورت سهمی درجه چهارم است. مقدار ممان اینرسی در نقطه ابتدایی به ازای حالت های مختلف برابر مقدار ثابتی است. مقدار فوق با توجه به نوع توزیع ممان اینرسی در طول مقطع در

$$K_{(n-1)1}U_1 + K_{(n-1)1}\theta_1 + \dots + K_{(n-1)(n-1)}\theta_{(n)} \\ = \mp \frac{C_d \Omega}{2} U_{n-1}$$

$$K_{(n)1}U_1 + K_{(n)1}\theta_1 + \dots + K_{(n)(n)}\theta_{(n)} = 0$$

ماتریس  $K = K_S + K_G + M + C$  معرف ماتریس کل است. ماتریس فوق از جمع تمامی ماتریس های سختی مصالح، سختی هندسی، ماتریس میرایی، جرم واحد طول محاسبه می شود. در این معادله، تغییر مکان  $U$  و دوران  $\theta$  دو متغیر مجهول هستند. مطابق معادله (۳۱) مشخص است که اثر متغیر میراگر ویسکوز  $C_d$  به صورت شرایط مرزی در معادله و در بردار نیروی جزء ستون  $Q$  اعمال می شود. مقدار میراگر ویسکوز با ماتریس سختی کل جمع می شود. با توجه به اینکه مقدار میرایی ذاتی سازه در مقایسه با میرایی میراگر ویسکوز عدد کوچکتری است. در ادامه محاسبات، اثر میرایی ذاتی در محاسبات لحاظ نمی شود و تنها اثر میرایی میراگر ویسکوز در نظر گرفته می شود. چنانچه در رابطه (۳۰) اثر ضریب بار دینامیکی  $\mu$  صفر منظور شود. رابطه ذیل برای محاسبه بارکمانشی استاتیکی ستون به دست می آید.

$$|K_S - P_{cr}K_G| = 0 \quad (32)$$

برای ساده سازی روابط از بی بعد سازی متغیرها استفاده می شود.  $\bar{P}_{cr}$ ,  $\lambda_{cr}$ ,  $\bar{\Omega}$ ، به ترتیب معرف فرکانس تحریک بی بعد، ضریب بارکمانشی بی بعد و بارکمانشی بی بعد هستند.

$$\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}} \cdot \lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_0}{P_{cr} L^2 \mu}} \cdot \bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI_0} \quad (33)$$

### ۳- بحث روی نتایج

رابطه (۳۰)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  است. ثابت شده که مقادیر سختی مصالح و میرایی میراگر ویسکوز بر مقدار متغیر فوق اثرگذار است. رابطه فوق یک معادله با مقادیر ویژه است. برای حل این معادله لازم است مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک ریشه یابی شود. بدین منظور از روش ریشه یابی مولر<sup>۱</sup> برای حل استفاده می شود. برای دقت در ریشه یابی تأثیر مقادیر فرکانس تحریک بر معادله متشکله با گام ۰،۰۱ بررسی می شود. همان طور که اشاره شد از روش لاگرانژ برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده شده است. برای همگرایی پاسخ ها، معادله با

<sup>2</sup> MATLAB

<sup>1</sup> Muller

کتاب از وانگ [2] پایداری ستون‌های الاستیک غیرمنشوری بررسی شده است. ایشان با حل تحلیلی معادله دیفرانسیل متشکله، پاسخ دقیقی برای محاسبه بارکمانشی ستون‌ها ارائه کرده‌اند. محاسبه پارامترهای بارکمانشی بی‌بعد استاتیکی به‌عنوان فصل مشترک مقاله حاضر و تحقیق نامبرده تلقی می‌شود. بدین منظور، از نتایج این تحقیق برای درستی آزمایشی مقاله حاضر استفاده می‌شود.

نقاط انتهایی برای حالت ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر ۸۸،۲ و ۷۱،۴۴ و ۶۴،۳۰ میکرومتر به توان چهارم می‌شود.

### ۳-۱- درستی آزمایشی نتایج

نخست درستی آزمایشی نتایج حاصل از این پژوهش، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل‌های ارائه شده توسط پژوهشگران پرداخته می‌شود. همان‌طور که بیان شد، در بخشی

جدول ۲. مقادیر بارکمانشی بی‌بعد برای ستونی غیرمنشوری با تغییرات خطی، مکعبی و مرتبه چهارم ممان اینرسی برای شرایط مرزی مختلف

New results		Wang, Wang [2]		$\beta$	Boundary conditions
$\bar{P}_{cr}$	$\bar{P}_{cr}$	$\bar{P}_{cr}$	$\bar{P}_{cr}$		
N=30	N=20	N=4			
Linear variations of the moment of inertia					
9.372	9.372	11.387	9.372	0.1	P-P
8.343	8.343	10.681	8.343	0.3	
7.256	7.256	8.588	7.256	0.5	
19.169	19.169	27.750	19.17	0.1	C-P
17.035	17.035	23.250	17.03	0.3	
14.740	14.740	18.750	14.74	0.5	
37.477	37.477	-	-	0.1	C-C
33.373	33.373	-	-	0.3	
28.697	28.697	-	-	0.5	
0	0	44.78%	-	-	$\Delta_{max}\%$
Cubic variations of the moment of inertia					
8.436	8.436	10.211	8.436	0.1	P-P
5.840	5.840	6.799	5.840	0.3	
3.628	3.628	3.937	3.628	0.5	
17.252	17.252	23.803	17.252	0.1	C-P
11.923	11.923	14.434	11.923	0.3	
7.362	7.362	8.437	7.362	0.5	
1.336	1.336	1.387	1.336	0.5	C-C
33.729	33.729	-	-	0.1	
23.941	23.941	-	-	0.3	
14.349	14.349	-	-	0.5	$\Delta_{max}\%$
0	0	37.97%	-	-	
Fourth order variations of the moment of inertia					
7.994	7.994	9.650	7.994	0.1	P-P
4.836	4.836	5.503	4.836	0.3	
2.467	2.467	2.629	2.467	0.5	
16.354	16.354	22.075	16.354	0.1	C-P
9.983	9.983	11.596	9.983	0.3	
5.048	5.048	6.161	5.048	0.5	
31.977	31.977	-	-	0.1	C-C
19.345	19.345	-	-	0.3	
9.872	9.872	-	-	0.5	
-	-	34.98%	-	-	$\Delta_{max}\%$

**Table 2.** Values of dimensionless buckling load for a non-radius column with Linear, Cubic, fourth order variations of moment of inertia for different boundary conditions

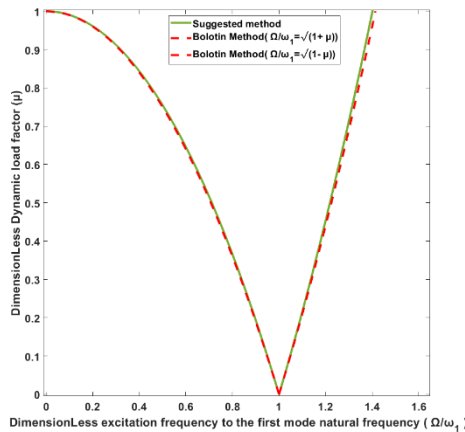
ماتریس‌های سختی مستخرج از مرتبه ۴ هستند و با توجه به شرایط مرزی، دو سطر و دو ستون از این ماتریس حذف می‌شوند و مقادیر ویژه تنها به ازای ماتریس دو در دو محاسبه می‌شوند. برای افزایش دقت، معادله متشکله به ازای جملات مرتبه بالاتر (۲۰ و ۳۰) جمله بررسی می‌شوند. با انتخاب جملات مراتب بالاتر، مقادیر این پارامتر در مقاله حاضر و مقاله پیشین منطبق می‌شود.

مطابق جدول فوق، مقادیر بارکمانشی بی‌بعد برای ستون غیرمنشوری برای شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. معادله متشکله به ازای توابع شکل (۴ و ۲۰ و ۳۰) جمله‌ای بررسی می‌شود. مبین است که اگر معادله به ازای ۴ جمله (مرتبه حداقل) بررسی شود، مقادیر بارکمانشی بی‌بعد مقاله حاضر در مقایسه مقاله پیشین اختلاف قابل توجهی خواهد داشت. به این دلیل که



بی بعد برای صفر لحاظ شود. مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد برابر ۱ می شود. نمودار فوق مبین این است که نتایج تحقیق حاضر با نتایج تحقیق پیشین هم خوانی دارد.

شکل ۳. نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول بی بعد



**Fig. 3.** The diagram of the changes of the dimensionless dynamic load coefficient according to the ratio of the excitation frequency to the natural frequency of the first dimensionless mode

### ۳-۲- تأثیر مقطع غیر منشوری بر ضریب بارکمانشی

در این بخش، تأثیر مقاطع غیر منشوری بر ضریب بارکمانشی در شرایط مرزی مختلف C-C (گیردار-گیردار)، C-P (گیردار-مفصلی)، P-P (مفصلی-مفصلی) بررسی می شود. تغییرات ممان اینرسی مطابق جدول (۱) به صورت خطی (مورد اول)، مکعبی (مورد دوم) و مرتبه چهارم (مورد سوم) در نظر گرفته می شود.

مطابق شکل مشخص است که تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک بی بعد به صورت تابع نمایی است. در نقطه خاصی (نقطه تکین) مقدار ضریب بارکمانشی برابر عدد بزرگی است. این نقطه خاص در بحث پایداری، فرکانس تشدید نام دارد. در واقع ستون تحت باری با مقدار فرکانس تشدید ناپایدار می شود. مشخص است که در موردهای مکعبی و مرتبه چهارم تغییر ممان اینرسی در طول عضو برای ستون گیردار - مفصلی، با افزایش  $\beta$  (ضریب باریک شونده) نمودار به سمت چپ میل می کند. در حالی که در مورد خطی ممان اینرسی، با افزایش  $\beta$  (ضریب باریک شونده) نمودار به سمت راست میل می کند. مبین است که نوع شرایط مرزی و نوع تغییرات ممان اینرسی در طول عضو بر پایداری دینامیکی و مقادیر فرکانس تشدید عضو اثرگذار است. تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک بی بعد شامل

همانطور که ذکر شد از روش اجزاء محدود با توابع هرمیتی (لاگرانژ) برای حل معادله دیفرانسیل استفاده می شود. برای حل معادله از توابع لاگرانژ مرتبه ی سی ام برای محاسبه تابع شکل استفاده شده و دقت حل معادله به این وسیله فراهم می شود. در این رویکرد نیازی به تجمیع ماتریس سختی نیست. چون به یکباره ماتریس سختی به وسیله حدس تابع شکل از مرتبه ی سی ام محاسبه می شود. در این روش با توجه به استفاده از توابع شکل مرتبه بالا نیازی به تقسیم ستون به اجزای کوچکتر و تجمیع ماتریس سختی نیست. در بخشی دیگر از درستی آزمایی، نتایج تحقیق حاضر با نتایج پژوهش بولوتین [15] مقایسه می شود. همان طور که بیان شد. در مدل بولوتین پایداری دینامیکی یک ستون منشوری مفصلی - مفصلی تنها با اثر جرم در واحد طول به روش تحلیلی بررسی شده است. در حالی که در پژوهش حاضر، پایداری دینامیکی ستون غیر منشوری با لحاظ اثر میراگر ویسکوز تحت بار متناوب به روش لاگرانژ بررسی می شود. مزیت روش مقاله حاضر این است که تمامی شرایط مرزی مختلف در تابع شکل معادله قابل اعمال است. برای درستی آزمایی پژوهش حاضر با مدل بولوتین باید اثر میراگر ویسکوز و مقطع غیر منشوری نادیده گرفته شود و رفتار دینامیکی ستون منشوری تنها به ازای شرایط مرزی گیردار - مفصلی و  $\eta = 0$  (ضریب بار استاتیکی بی بعد) ارزیابی شود. شکل (۳) نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد ستونی گیردار - مفصلی را بر حسب نسبت فرکانسی (فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی) بی بعد نمایش می دهد. محقق رابطه ذیل برای محاسبه ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی ارائه کرده است. ( $k$ , پارامتر مود کمانش است).

$$\frac{\Omega}{2\omega_k} = \frac{\sqrt{1 \pm \mu}}{k} \quad (34)$$

در شکل (۳) نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی بی بعد ستونی با شرایط مرزی گیردار مفصلی تنها با اثر جرم واحد طول ترسیم می شود. با توجه به نمودار مشخص می شود. اگر مقدار نسبت بی بعد فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول برابر  $\frac{\Omega}{2\omega_1} = 1$  باشد. در این صورت ضریب پایداری دینامیکی برابر صفر است. این وضعیت که وضعیت تشدید نام دارد. در این حالت، مجموعه دچار وضعیت ناپایداری دینامیکی می شود. در صورتی که مقدار نسبت فرکانسی

کمانشی از فرکانس تشدید به بعد به صورت نزولی است. در این محدوده به ازای مقادیری از فرکانس تحریک بی بعد ضریب بارکمانشی مقداری کمتر از ضریب بار کمانشی استاتیکی را دارد. از لحاظ تجربی هیچ وقت ظرفیت کمانشی دینامیکی از ظرفیت کمانشی استاتیکی بزرگتر نیست.

سه بخش می شود. اگر مقدار فرکانس تحریک بی بعد صفر شود. مقدار ضریب بارکمانشی برابر ضریب بارکمانشی استاتیکی است. تغییرات ضریب بارکمانشی از فرکانس تحریک بی بعد ( $\bar{\Omega} = 0$ ) تا فرکانس تشدید به صورت صعودی است و ضریب بار کمانشی به ازای فرکانس تشدید مقدار بسیار بزرگی دارد. تغییرات ضریب بار

شکل ۴. تغییرات ضریب بارکمانشی برحسب فرکانس تحریک ستونی غیر منشوری گیردار - مفصلی (a) تغییرات خطی ممان اینرسی، (b) تغییرات مکعبی ممان اینرسی، (c) تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی

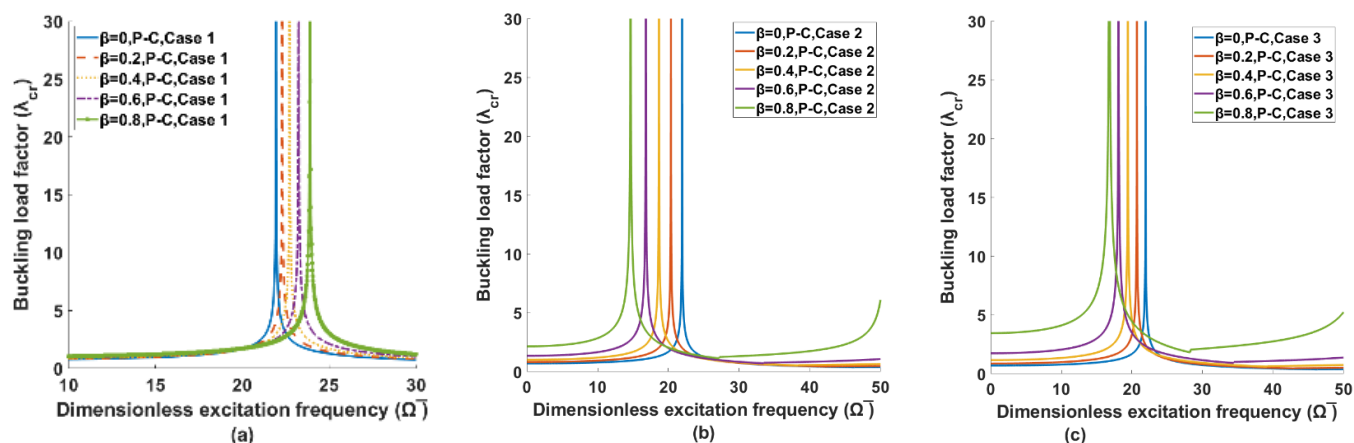


Fig.4. Variations of the buckling load factor according to the frequency of excitation of a non-prismatic column (P – C) A) linear variations of the moment of inertia, B) Cubic variations of the moment of inertia, C) Variations of the fourth order of the moment of inertia

بار کمانشی از ضریب بارکمانشی استاتیکی کمتر باشد. لازم است برای طراحی همان مقدار ضریب بار کمانشی استاتیکی مد نظر قرار گیرد.

در واقع ظرفیت بار کمانشی تابع مشخصات فیزیکی مقطع است و پارامتر فرکانس تحریک به عنوان عامل کاهنده بر ظرفیت بارکمانشی دینامیکی اثر گذار است. اگر در نواحی خاصی ضریب

شکل ۵. تغییرات ضریب بارکمانشی برحسب فرکانس تحریک ستونی غیر منشوری گیردار - گیردار (a) تغییرات خطی ممان اینرسی، (b) تغییرات مکعبی ممان اینرسی، (c) تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی

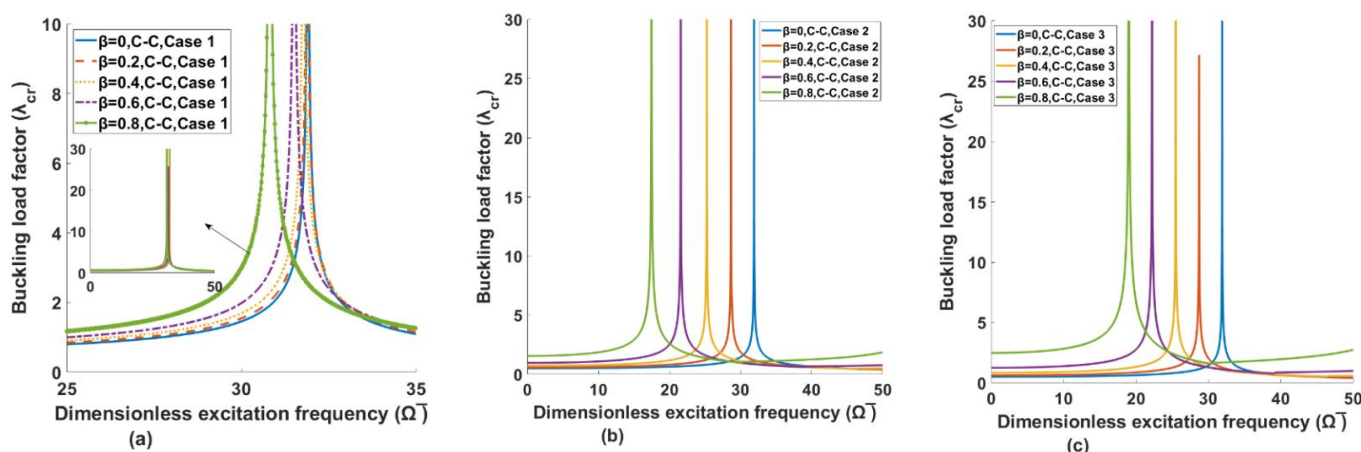
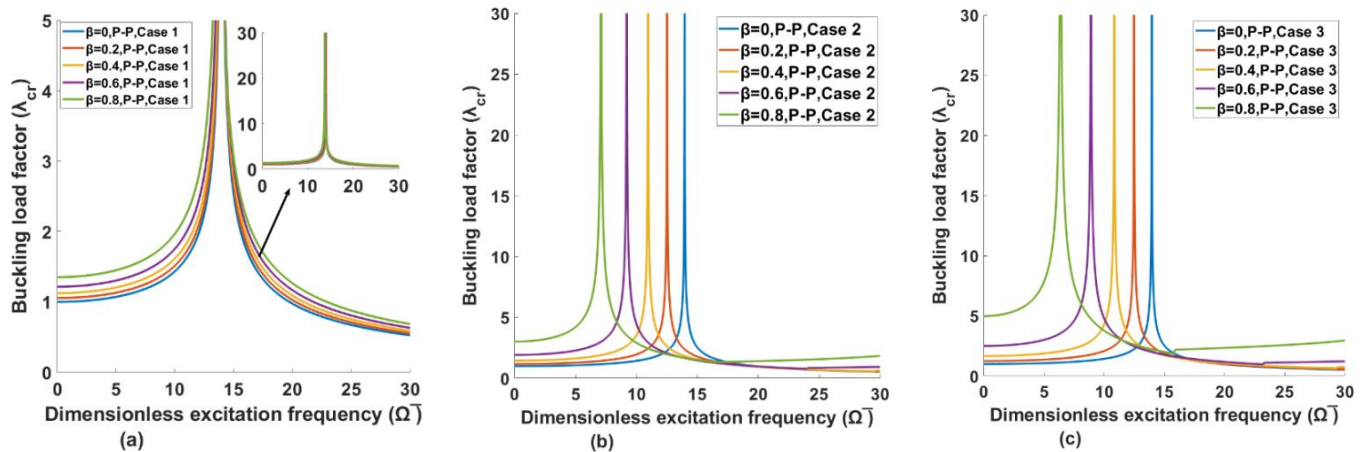


Fig.5. A) Variations of the buckling load factor according to the frequency of non-prismatic column (C-C) excitation A) linear changes in the moment of inertia, B) Cubic changes in the moment of inertia, C) Fourth-order changes in the moment of inertia

دوسرگیردار، با افزایش  $\beta$  (ضریب باریک شوندگی) نمودار به سمت چپ میل می کند.

مطابق شکل مشخص است که در تمامی حالت های تغییر ممان اینرسی در طول عضو (خطی - مکعبی - مرتبه چهارم) برای ستون

شکل ۶. تغییرات ضریب بارکمانشی برحسب فرکانس تحریک ستونی غیر منشوری مفصلی - مفصلی (a) تغییرات خطی ممان اینرسی، (b) تغییرات مکعبی ممان اینرسی، (c) تغییرات مرتبه چهارم ممان اینرسی



**Fig. 6.** Variations of the buckling load according factor to the frequency of a non-prismatic column (P-P) excitation A) linear variations of the moment of inertia, b) Cubic variations of the moment of inertia, c) Variations of the fourth order of the moment of inertia

مرزی گیردار-آزاد بررسی می شود. همانطور که ذکر شد. از اثر میرایی ذاتی سازه در مقابل میراگر ویسکوز صرف نظر شده و تنها اثر میراگر ویسکوز بر پایداری دینامیکی بررسی می شود. حضور میراگر ویسکوز تا ۲۰ درصد بر کنترل میرایی سازه اثر گذار است.

مطابق شکل مشخص است که حضور ضریب میرایی میراگر ویسکوز  $\xi$  تأثیر قابل توجهی در انتقال نمودار تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک بی بعد به سمت چپ محور دارد. اعمال اثر میراگر ویسکوز، در عمل اثر تغییرات فرکانس را برطرف می کند.

برای نمونه برای تغییرات خطی، در محدوده  $1 < \bar{\Omega} < 30$  ضریب بار کمانشی دارای مقادیری کوچکتر از ضریب بارکمانشی استاتیکی است. با این حال، هیچ گاه ظرفیت بار کمانشی دینامیکی بزرگتر از ظرفیت بارکمانشی استاتیکی نیست. با توجه به این نکته می توان گفت که در تمامی حدود  $1 < \bar{\Omega} < 30$  ظرفیت بار کمانشی استاتیکی و ظرفیت بارکمانشی دینامیکی برابر است.

همانطور که در متن ذکر شد. پدیده کمانش در حالت استاتیکی وابسته به مشخصات مصالح سازه است. اما با توجه به پژوهش بولوتین [15] و نتایج مقاله حاضر مشخص شد که پدیده کمانش در حالت دینامیکی علاوه بر مشخصات مصالح سازه بر فرکانس تحریک بارگذاری هارمونیک نیز وابسته است. در حالت خاصی که بارگذاری هارمونیک کسینوسی باشد با ارائه مسیرتعدادل پایداری و تابع پاسخ دینامیکی (معادله ۱۷) مقدار ضریب طول موثر دینامیکی محاسبه شد. روش ارائه شده یک نوع تحلیل فرکانس بوده و رفتار دینامیکی ستون تنها برای بارگذاری خاص دینامیکی هارمونیک

در این حالت، فرکانس تشدید و ناپایداری دینامیکی به ازای فرکانس تحریک بی بعد کوچک تری رخ می دهد. افزایش  $\beta$  (ضریب باریک شونده) در حالت (دوم و سوم) تأثیر قابل توجهی در انتقال نمودار به سمت چپ محور تغییرات فرکانس تحریک بی بعد در مقایسه با مورد اول دارد.

مطابق شکل مشخص است که در تمامی حالت های تغییر ممان اینرسی در طول عضو (خطی - مکعبی - مرتبه چهارم) برای ستون دو سر مفصلی، با افزایش  $\beta$  (ضریب باریک شونده) نمودار تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک بی بعد به سمت چپ میل می کند. همان طور که مشخص است در صورتی که تغییرات ممان اینرسی خطی باشد. با افزایش ضریب  $\beta$  (ضریب باریک شونده) تغییرات ضریب بارکمانشی با آهنگ آهسته تری به سمت راست محور فرکانس تحریک بی بعد میل می کند. صلیبیت خمشی ستون با افزایش درجه تغییرات ممان اینرسی در طول عضو کاهش می یابد. هم چنین افزایش ضریب  $\beta$  (ضریب باریک شونده) نیز یک عامل کاهش دهنده در صلیبیت خمشی ستون است.

### ۳-۳- تأثیر توأمان مقطع غیر منشوری و میراگر ویسکوز بر ضریب بارکمانشی

در این بخش به بررسی اثر توأمان مقطع غیر منشوری و میراگر ویسکوز بر کمانش دینامیکی ستون پرداخته می شود. بدین منظور پارامتر ضریب بارکمانشی ستون با مقطع غیر منشوری (خطی - مکعبی - مرتبه چهارم) و میراگر ویسکوز به ازای ضریب میرایی  $\xi = 10$  برای شرایط

شکل ۷. تغییرات ضریب بارکمانشی برحسب فرکانس تحریک بی بعد ستونی غیر منشوری با میرایی ۱۰٪  
 (a) تغییرات خطی ممان اینرسی (b) تغییرات مکعبی ممان اینرسی (c) تغییرات مرتبه‌ی چهارم ممان اینرسی

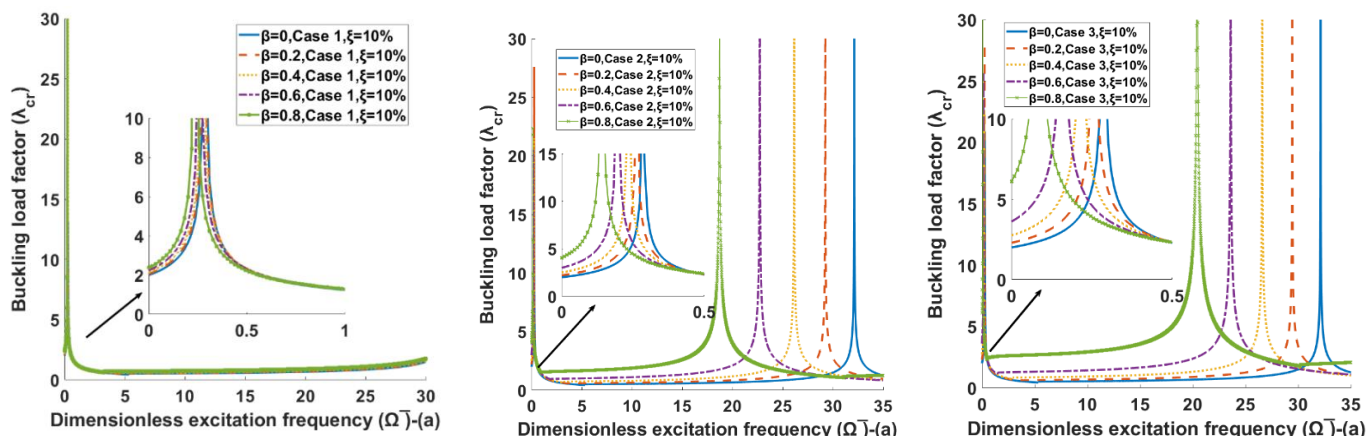


Fig. 7. Variations of the buckling load factor according to the frequency of excitation non-prismatic column with 10% damping A) linear variations of the moment of inertia, b) Cubic variations of the moment of inertia, c) Variations of the fourth order of the moment of inertia

افزایش این مقدار نمودار تغییرات به سمت چپ محور فرکانس تحریک بی بعد منتقل می شود.  
 ۳- در تمامی جداول و شکل ها از پارامترهای بی بعد مانند ضریب بارکمانشی، فرکانس تحریک و ضریب بازشوندگی برای گزارش رفتار دینامیکی مجموعه استفاده شده است. نتایج این تحقیق برای طراحی ستون های تحت بارمحوری تناوبی قابلیت تعمیم دارد.

(کسینوسی) قابل پیش بینی است. اما بارگذاری مولفه قائم زلزله و هر نوع بارگذاری دینامیکی با استفاده از روش تبدیل فوریه به فرم تابع هارمونیک (کسینوسی) قابل تبدیل است. پس نتایج مقاله حاضر برای محاسبه پایداری دینامیکی با شرط تبدیل بارگذاری مورد نظر به بارگذاری هارمونیک کسینوسی قابل استفاده است.

#### ۴- نتیجه گیری

در مقاله حاضر نخستین بار بر مبنای روش عددی کماتش دینامیکی ستونی با مقطع متغیر و میراگر ویسکوز تحت بارمحوری متناوب بررسی شد. در گام اول، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از توابع میان یابی لاگرانژ به عنوان تابع شکل معادله استفاده شود و بر این مبنا ماتریس های سختی مصالح، سختی هندسی و ماتریس جرم استخراج شد. پس از استخراج ماتریس های سختی مقادیر ویژه معادله بررسی شد. از تکنیک ریشه یابی مولر برای محاسبه مقادیر ویژه با کدنویسی در نرم افزار متلب استفاده شد. خلاصه نتایج پژوهش به شرح ذیل است:

۱- مقدار ضریب بازشوندگی تأثیر قابل توجهی بر تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس تحریک بی بعد دارد. افزایش ضریب بازشوندگی بسته به شرایط مرزی حاکم سبب انتقال نمودار به سمت راست یا چپ محور فرکانس تحریک بی بعد می شود.

۲- مقدار ضریب میرایی میراگر ویسکوز تأثیر قابل توجهی بر تغییرات ضریب بارکمانشی بر حسب فرکانس بی بعد دارد. با

#### ۵- مراجع

- [1] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 2009. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation.
- [2] Wang, C.M. and Wang, C.Y., 2004. *Exact solutions for buckling of structural members* (Vol. 6). CRC press.
- [3] Bazant, Z.P., Cedolin, L. and Hutchinson, J.W., 1993. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories. *Journal of Applied Mechanics*, 60(2), p.567.
- [4] Morley, A., 1917. Critical loads for long tapering struts. *Engineering*, 104, p.295.
- [5] Siginer, A., 1992. Buckling of columns of variable flexural rigidity. *Journal of engineering mechanics*, 118(3), pp.640-643.
- [6] Li, G.Q. and Li, J.J., 2002. A tapered Timoshenko–Euler beam element for analysis of steel portal frames. *Journal of constructional steel research*, 58(12), pp.1531-1544.
- [7] Al-Sadder, S.Z., 2004. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam–column member. *Journal of Constructional Steel Research*, 60(11), pp.1561-1584.

- static and periodic axial loads using Floquet–Liapunov theory. *Modares Mechanical Engineering*, 16(12), pp.365-372.
- [22] Uribe-Henao, A.F., Zapata-Medina, D.G., Arboleda-Monsalve, L.G. and Aristizabal-Ochoa, J.D., 2018, August. Static and dynamic stability of a multi-stepped Timoshenko column including self-weight. In *Structures*, 15, pp.28-42.
- [23] Chopra, A.K. and McKenna, F., 2016. Modeling viscous damping in nonlinear response history analysis of buildings for earthquake excitation. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 45(2), pp.193-211
- [24] Carr, A.J., Puthanpurayil, A.M., Lavan, O. and Dhakal, R., 2017, January. Damping models for inelastic time history analysis: a proposed modelling approach. In *16th world conference in earthquake engineering, Santiago*, p.1488.
- [8] Huang, Y., Yang, L.E. and Luo, Q.Z., 2013. Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), pp.1493-1498.
- [9] Hadidi, A., Azar, B.F. and Marand, H.Z., 2014. Second-order nonlinear analysis of steel tapered beams subjected to span loading. *Advances in Mechanical Engineering*, 6, p.237983.
- [10] Safavi, A., Haghollahi, A. and Sahebi, M.M, 2017, Elastic Flexural Buckling Load for Tapered Columns in Gabled Frames for State of Free to Sway with Finite Differences and Virtual Work Methods.
- [11] Bilyk, S.I., Bilyk, A.S., Nilova, T.O., Shpynda, V.Z. and Tsyupyn, E.I., 2018. Buckling of the steel frames with the I-shaped cross-section columns of variable web height. *Onip materialiv i teorija snopyd*, (100), pp.140-154.
- [12] Fathi M, Shahlaei N, Parvizi M, 2018. Slope-deflection equations development for imperfect beam-column and semi-rigid connection, considering shear deformation. *Journal of Structure & Steel*, 12 (23), pp.65-74. [In Persian]
- [13] Asgarian, B., 2018. Buckling analysis of axially functionally graded columns with exponentially varying cross-section.
- [14] Soltani, M. and Asgarian, B., 2019. Finite Element Formulation for Linear Stability Analysis of Axially Functionally Graded Nonprismatic Timoshenko Beam. *International Journal of Structural Stability & Dynamics*, 19(2).
- [15] Bolotin, V., 1962. Dynamic stability of elastic systems.
- [16] Dwivedy, S.K., Sahu, K.C. and Babu, S., 2007. Parametric instability regions of three-layered soft-cored sandwich beam using higher-order theory. *Journal of sound and vibration*, 304(1-2), pp.326-344.
- [17] Ouyang, H., 2011. Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(6), pp.2039-2060.
- [18] Ghannadpour, S.A.M., Mohammadi, B. and Fazilati, J., 2013. Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method. *Composite Structures*, 96, pp.584-589.
- [19] Giraldo-Londoño, O. and Aristizábal-Ochoa, J.D., 2014. Dynamic stability of slender columns with semi-rigid connections under periodic axial load: verification and examples. *Dyna*, 81(185), pp.66-72.
- [20] Pourasghar, A. and Kamarian, S., 2015. Dynamic stability analysis of functionally graded nanocomposite non-uniform column reinforced by carbon nanotube. *Journal of Vibration and Control*, 21(13), pp.2499-2508.
- [21] Ramezannejad Azarboni, H. and Ansari, R., 2017. Dynamic stability analysis of CNTs under combined

# Investigating The Dynamic Buckling of A Column with Variable Section and Viscous Damper under Intermittent Axial Load

Amir Hossein Taherkhani<sup>1</sup>, Majid Amin Afshar<sup>2\*</sup>

1. Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
2. Associate professor, Faculty of Engineering and Technology, Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

\* Corresponding Author Email: mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir

Received: 2023/05/23- Accepted: 2024/02/28

## Abstract

The use of members with non-uniform cross-sections due to the reduction of the number of materials and the weight of the structure is widely used in industrial structures and metal bridges. Buckling is one of the major problems engineers face in the design of axial compression members (columns). For this reason, several researches have been conducted by researchers in the field of column buckling. Most of the previous research is limited to investigating stability and buckling in Non-prismatic elastic columns in the static state. During an earthquake, the structure is subjected to vertical and lateral earthquake loads. To evaluate the dynamic behavior of the structure during an earthquake, the stability and dynamic buckling of the column must be evaluated. The effect of the earthquake's vertical load and the dynamic axial load has an effect on the dynamic stability of the member in the form of the second-order effect of buckling. In this article, the dynamic buckling of a column with a variable section and viscous damper under alternating axial load is investigated in a comprehensive model. The alternating axial load effect is assumed as a cosine function and the viscous damping effect at the end of the member is assumed as a Dirac delta function. The changes in the moment of inertia along the length of the column are considered in three modes: linear, cubic, and fourth-order changes. The constituent differential equation includes column strain energy, second order effect of alternating axial load, inertia per unit length of the column, and damping of a viscous damper. To solve the constitutive equation, first the weak form of the governing differential equation is written. Lagrange interpolation functions are used as the shape function and the Fourier function (proposed by Bolotin) as the dynamic response of the equation. In the next step, the matrices of material hardness, geometric hardness, and mass are extracted. After extracting the above matrices, the eigenvalues (Buckling load factor, natural frequency) of the equation are checked. Muller root finding technique is used by coding in MATLAB software to calculate eigenvalues. For accuracy in calculations, the function of the form of the equation is checked by the Lagrange method with the number of thirty terms. Also, finding the roots of the equation to calculate the eigenvalue is done with a step of 0.05 using Mueller's method. The buckling load coefficient of the column is evaluated for different values of the expansion coefficient and the damping percentage of the viscous damper in different boundary conditions. The results show that the mentioned values have a significant effect on the changes in the buckling load factor in terms of excitation frequency and resonance frequency. Depending on the boundary conditions, increasing the opening factor causes the diagram to move to the right or left side of the dimensionless excitation frequency axis. Also, increasing the damping coefficient of the viscous damper causes the diagram to move to the left side of the dimensionless excitation frequency axis. Dimensionless parameters such as bar coefficient, excitation frequency, and opening coefficient have been used to report the dynamic behavior of the set in all the tables and figures. The results of this research can be generalized for the design of columns under periodic axial load. The results of this article are verified and compared with previous research. There is an acceptable agreement between the results of the present article and previous research.

**Keywords:** Dynamic Buckling, Dynamic Stability, Buckling Load Factor, Critical Load Capacity, Analysis EigenValue.