

حل تحلیلی برای سیستم چندچاهی پاکسازی آب‌های زیرزمینی در مجاورت یک آبراهه دائمی

عبدالله رضائی چرمهینه^۱، مهدی اسدی آقباغی^{۲*}، رسول میرعباسی نجف آبادی^۲، سیدحسین طباطبائی^۳

۱. دانشجوی دکتری منابع آب، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد

۲. دانشیار، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

۳. استاد، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

Email: mahdi.asadi.a@gmail.com

تاریخ پذیرش: [۱۴۰۲/۱۰/۱۶]

تاریخ دریافت: [۱۴۰۲/۰۱/۱۲]

چکیده

تمدن‌های بشری همواره برای شکل‌گیری، توسعه و رفع نیازهای مختلف به آب شیرین وابستگی زیادی داشته‌اند. با گسترش شهرنشینی، نه تنها نیاز به آب شیرین کمتر نشده است؛ بلکه برخی از فناوری‌ها و صنایع جدید نیز مصرف آب را افزایش داده‌اند و آلودگی منابع آب سرعت چشمگیری یافته است. منابع آب زیرزمینی برای دور بودن از آلودگی‌های سطحی و همچنین ظرفیت پالایش طبیعی آن‌ها، در مقوله حفاظت و پاکسازی به اندازه کافی و شایسته مورد توجه قرار نگرفته‌اند. وجود این موضوع به همراه برداشت بی‌رویه از آبخوان‌ها موجب عدم تعادل پایدار آب‌های زیرزمینی از نظر کمی و کیفی شده است. این موارد، لزوم پژوهش بیشتر در مورد جوانب مختلف پاکسازی آب‌های زیرزمینی را نشان می‌دهد. با توسعه معادلات حرکت آب در محیط‌های متخلخل و تجزیه و تحلیل آن‌ها، می‌توان جریان آب‌های زیرزمینی را شبیه‌سازی کرد. در این مطالعه، سیستم دو چاهی پمپاژ به عنوان یکی از روش‌های موثر در رفع آلودگی آبخوان‌ها، به طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در این سیستم، چاه‌های پمپاژ با تخلیه آب آلوده و جلوگیری از گسترش آن در آبخوان، بازگشت به شرایط طبیعی را فراهم می‌کنند. بدین منظور، با در نظر گرفتن دو چاه پمپاژ در کنار یک آبراهه دائمی، معادلات توابع پتانسیل و جریان آب زیرزمینی تعیین شده‌اند. به بیان دیگر، قسمت حقیقی معادله پتانسیل مختلط، نمایانگر تابع پتانسیل و بخش موهومی آن، تابع جریان را مشخص نموده؛ در حالی که با بهره‌گیری از تئوری چاه مجازی، اثر آبراهه در روابط مسئله نیز اعمال شده است. با به دست آمدن مختصات نقاط سکون، ناحیه گیرش سیستم چندچاهی در پیکربندی‌های مختلف ترسیم شده و میزان آبیگری از آبراهه نیز محاسبه شده است. ناحیه گیرش با نمایش محدوده جذب توسط چاه‌های پمپاژ به ازای فواصل متفاوت این چاه‌ها و چند دبی تخلیه، رفتار و توان سیستم چندچاهی را توصیف می‌کند. سه پیکربندی برای سیستم پاکسازی در کنار دو نوع دبی بحرانی ارائه شد. در این شرایط، کنترل ناحیه گیرش بدون برخورد با مرز آبراهه و عدم شکاف در حوضه آبیگری در فواصل مختلف چاه‌ها و در دبی‌های مشخص امکان‌پذیر می‌شود. در دبی بحرانی اول، ناحیه گیرش سیستم دو چاهی بر مرز آبراهه دائمی مماس شده، و به ازای مقادیر کمتر از این دبی، آلودگی آب زیرزمینی به آب سطحی وارد نمی‌شود. در دبی بحرانی دوم، نواحی گیرش دو چاه با هم یکی می‌شوند. در حقیقت، در دبی‌های کمتر از این دبی بحرانی، یک فاصله (شکاف) بین نواحی گیرش چاه‌ها وجود دارد و آلودگی می‌تواند از این فاصله وارد آب سطحی شود. همچنین فاصله دو چاه در حالتی تعیین شد که هر دو نوع دبی بحرانی با هم برابر هستند. این حالت، وضعیتی از محدوده جذب را نشان می‌دهد که مرز آن بر مرز آبراهه مماس است و نواحی گیرش دو چاه با هم ادغام شده‌اند. در وضعیت مذکور، فاصله بی‌بعد دو چاه پمپاژ (فاصله دو چاه تقسیم بر فاصله آن‌ها از مرز آبراهه) و دبی بحرانی بی‌بعد به ترتیب برابر با $2 \times 0/58$ و $0/33$ هستند.

واژگان کلیدی: ناحیه گیرش، پاکسازی آبخوان، روش تحلیلی، آبراهه دائمی، تئوری پتانسیل مختلط.

۱- مقدمه

رشد روزافزون جمعیت و به دنبال آن، افزایش نیاز انسان‌ها به آب در بخش‌های کشاورزی، صنعت و شرب، محدودیت استفاده از منابع آب زیرزمینی را دوچندان می‌کند. مدیریت اشتباه از یک طرف، کاهش بارش و تغییر اقلیم از سوی دیگر، نگرانی‌ها را بابت آینده این منابع، بیش از پیش افزایش داده است [1]. بنابراین نظر به این که آبخوان‌ها بخش مهمی از منابع آبی مورد استفاده در مصارف متنوع بشر را شامل می‌شوند؛ کنترل و بررسی کیفیت آب زیرزمینی امری بسیار ضروری است. با توجه به افزایش آلودگی‌ها، محافظت از کیفیت آب در منابع زیرزمینی به چالشی بزرگ در سطح جهانی تبدیل شده است. به طوری که در دهه‌های اخیر، آلودگی آبخوان‌ها به وسیله فعالیت‌های انسانی، مشکلات متعددی را به بار آورده است [2].

یکی از روش‌های مهم در سیستم پاکسازی^۱ آب‌های زیرزمینی، روش پمپ و تصفیه^۲ می‌باشد. این شیوه را می‌توان به تکنیکی برای محصور کردن هاله آلودگی در آبخوان توصیف کرد تا غلظت آلودگی با رقیق‌سازی آب آلوده، به سطح مطلوب کاهش یابد. پمپ و تصفیه روشی است که به موقعیت چاه‌های جذب (که وظیفه گیرش آب آلوده و ممانعت از فرار آن به پایین‌دست را دارند) تکیه دارد. پس از اتمام مرحله پالایش در سطح زمین، آب تصفیه‌شده رهاسازی و مصرف می‌شود یا از طریق چاه‌های تزریق به آبخوان بر می‌گردد [3]. قابل توجه است که در روش پمپ و تصفیه، تزریق و برگشت آب به آبخوان الزامی نیست. از این رو، در صورتی که در این روش، گردش آب به وقوع پیوندد؛ تصفیه درجا به شمار می‌رود و در حالت عدم گردش آب، به عنوان سیستم غیردرجا معرفی می‌شود [4].

همچنین از مسائل مهم در چگونگی جانمایی چاه‌های جذب آلودگی آب زیرزمینی، ناحیه گیرش^۳ می‌باشد. این ناحیه برای یک چاه جذب، بخشی از آبخوان است که آب آن ناحیه،

توسط چاه برداشت می‌شود. وسعت این ناحیه، با ادامه پمپاژ افزایش پیدا می‌کند و در شرایط پایدار به بیشترین اندازه خود دست می‌یابد. این حوضه آگیری چاه، تحت تأثیر عوامل مختلفی از جمله میزان پمپاژ آب از چاه، نوع و آرایش مرزهای آبخوان، هدایت هیدرولیکی لایه آبدار و نوع و موقعیت چاه‌ها می‌باشد [5].

هنگام استفاده از چند چاه جذب در روش پمپ و تصفیه، چینش و آرایش چاه‌ها، در شکل ناحیه گیرش و استخراج آلودگی توسط سیستم چندچاهی از اهمیت زیادی برخوردار است؛ به طوری که طبق شکل (۱) فرار آلودگی از میان چاه‌های پمپاژ رخ ندهد. به بیان دیگر، اگر آرایش چاه‌ها (و در نتیجه، حوضه آگیری آن‌ها) پوشش مناسبی نداشته باشد؛ آلودگی می‌تواند از شکاف ناحیه گیرش سیستم پاکسازی عبور کند و در آبخوان باقی بماند. بنابراین عملکرد صحیح سیستم پاکسازی وابسته به چگونگی قرارگیری چاه‌ها می‌باشد.

شکل ۱. تصویری از فرار آلودگی در یک سیستم پاکسازی آب‌های زیرزمینی در نمای مسطح [6]

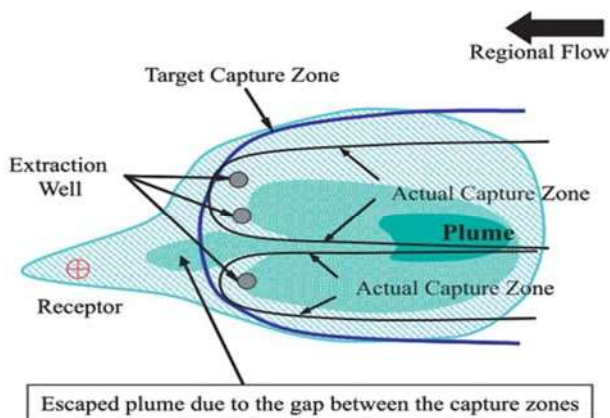


Fig. 1. An illustration of the escape of contamination in a groundwater remediation system in plan view [6]

دی اسمد [7] ناحیه آگیری مربوط به یک چاه را در یک آبخوان تغذیه شده به طور تحلیلی به دست آورد. اسدی‌آقبلاغی و رخشنده‌رو [8] ناحیه گیرش یک چاه پمپاژ را

1. Remediation
2. Pump and treat
3. Capture zone

انجام این مطالعه ضروری به نظر می‌رسد. بر این اساس، با لحاظ کردن مرز هیدرولیکی (آبراهه دائمی) در مطالعه حاضر، اثر چینش چاه‌های جذب آلودگی بر کارایی پاک‌سازی آبخوان در مجاورت آبراهه دائمی به طور تحلیلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

توجه شود که اضافه کردن یک مؤلفه (مثل آبراهه) به مسئله (هرچند راه‌حل عمومی آن ارائه شده باشد)، سبب می‌شود تا بر مبنای تأثیر مؤلفه‌های مختلف (مثل چاه، آبراهه و آبخوان) بر یکدیگر، مسئله پیچیدگی زیادی پیدا کند و ناگزیر حل تحلیلی آن امکان‌پذیر نخواهد بود. شاید همین مطلب را بتوان از دلایل توجه کمتر به چنین موضوعاتی برشمرد.

۲- مواد و روش‌ها

در این بخش به معرفی سیستم چندچاهی و شرح مدل ریاضی مربوط به آن پرداخته شده است تا ضمن ارائه جزئیات و چگونگی تشکیل این سیستم، تصویر واضحی از مسئله روشن شود.

در شکل (۲) می‌توان هندسه مسئله مورد مطالعه را مشاهده نمود. در این شکل، یک آبراهه دائمی در مجاورت آبخوان قرار دارد که در ارتباط هیدرولیکی کامل با آن می‌باشد. به بیان دیگر، آبراهه به طور کامل در آبخوان فرو رفته است و هیچ لایه‌ای میان آن‌ها وجود ندارد. چنین شرایطی در ایالت مونتانا ایالات متحده گزارش شده است [15, 17]. بنابراین وضعیت مذکور در برخی از آبخوان‌ها به وقوع می‌پیوندد. همچنین تشریح حالتی که ارتباط هیدرولیکی کامل بین آبراهه و آبخوان برقرار نباشد، در مطالعات هانتوش [18] و اندرسون [19] ارائه شده است. در آبخوان قبل از پمپاژ، یک جریان ماندگار به سوی آبراهه وجود دارد. مبدأ مختصات روی خط مرزی آبخوان و آبراهه دائمی قرار گرفته است؛ به نحوی که محور x ها برای دو چاه پمپاژ، محور قرینه شود. آبخوان از یک سمت به آبراهه دائمی ختم می‌شود (در $x=0$) و از سمت دیگر تا بی‌نهایت ادامه دارد. در چنین مسائلی که آبخوان در مجاورت آبراهه دائمی قرار گرفته است؛ از تئوری چاه مجازی استفاده

با راه‌حل‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی تعیین کردند. زارعی‌دودجی و سامانی [9] کارایی روش‌های تحلیلی را در حل معادلات حاکم بر ناحیه گیرش در یک سیستم چندچاهی اثبات کردند. بایکا و همکاران [10] موثر بودن یک روش جدید نیمه‌تحلیلی را برای ارزیابی میدان جریان ناشی از چاه‌های تخلیه یا تغذیه با وجود جریان منطقه‌ای یکنواخت نشان دادند. ناقلی و همکاران [5] با تعیین محدوده گیرش در سیستم چندچاهی، راه‌حلهایی تحلیلی و نیمه‌تحلیلی در شرایط پایدار به دست آوردند. ایشان در پژوهشی دیگر [11] با به کار بردن نگاهت هم‌مدیس و روش چاه مجازی، توانستند به معادلات ناحیه گیرش برای یک سیستم چندچاهی در آبخوان‌های نواری شکل دست یابند. مهدوی [12] با ارائه یک راه‌حل تحلیلی در شرایط پایدار، شبکه جریان مربوط به چاه‌های تخلیه را در یک آبخوان گوه‌ای شکل و ناهمگن، مشخص کرد. این پژوهشگر در مطالعه دیگری [13] توان بالای یک شیوه تحلیلی بر مبنای تابع گرین را در بررسی تداخل هیدرولیکی بین میدان چاه‌های پمپاژ با جریان پیرامونی نشان داد.

تمام موارد مذکور، بر لزوم مطالعه ناحیه گیرش در کنترل آلودگی آب زیرزمینی با روش پمپ و تصفیه تأیید می‌کند. از سوی دیگر، طبق مطالعات انجام شده تاکنون هیچ تحقیقی به بررسی ناحیه گیرش یک سیستم دو چاهی پمپاژ در مجاورت یک آبراهه دائمی نپرداخته است. بنابراین در نظر گرفتن آبراهه دائمی در کنار سامانه چاه-آبخوان، با توجه به قرارگیری موقعیت چاه‌ها (سیستم دو چاهی)، از نوآوری‌های مطالعه حاضر تلقی می‌شود؛ به شکلی که ساختار این پژوهش را با تحقیقات قبلی متفاوت می‌نماید. با قرار گرفتن یک یا چند چاه در مجاورت یک آبراهه، برای حل مسئله از تئوری چاه‌های مجازی استفاده می‌شود و اضافه کردن چاه یا چاه‌های مجازی باعث تغییر ناحیه گیرش و پیکربندی آن می‌شود. این مورد را می‌توان در مطالعاتی مانند پژوهش‌های اسدی‌آق‌بلاغی و رخشنده‌رو [8]، بکر و اندرسون [14]، اینتراپراسونگ و ژان [15] و اسدی‌آق‌بلاغی و همکاران [16] (در مقایسه با تحقیقاتی که آبراهه ندارند) یافت. بنابراین با توجه به مطالعات پیشین،

سمت راست رابطه (۱)، پتانسیل مختلط چاه‌های مجازی را در تحقیق حاضر نشان می‌دهد اما در پژوهش کریست و گلنز [3] به سبب نداشتن مؤلفه آبراهه، چنین عبارتی وجود ندارد. هرچند محبوس بودن آبخوان از فرضیات ارائه شده در پژوهش کریست و گلنز [3] است، با این حال (همان طور که در ادامه شرح داده شده است) راه‌حل به دست آمده در این مقاله، علاوه بر آبخوان‌های محبوس در آبخوان‌های آزاد نیز اعتبار دارد.

شکل ۲. آرایش سیستم چندچاهی در مطالعه حاضر (دو چاه پمپاژ)

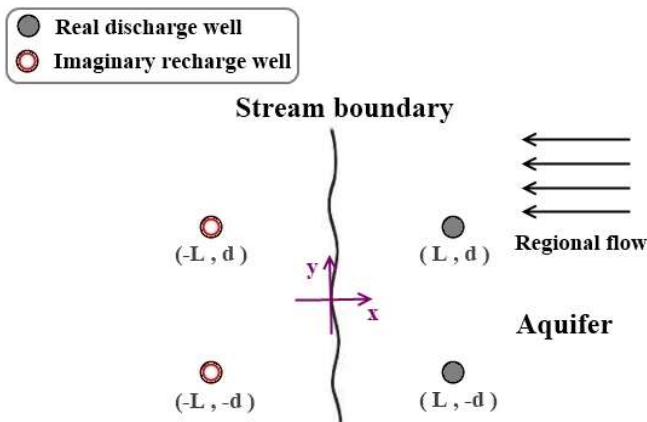


Fig. 2. Configuration of multi-well system in the present study (two pumping wells)

بر اساس شکل (۲) و وارد کردن مختصات چاه‌های حقیقی و مجازی، رابطه (۱) به صورت معادله (۲) تغییر می‌کند که $z = x + iy$ و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشند.

$$\Omega = Uz + \frac{Q}{2\pi B} \ln(z - L - id) + \frac{Q}{2\pi B} \ln(z - L + id) - \frac{Q}{2\pi B} \ln(z + L - id) - \frac{Q}{2\pi B} \ln(z + L + id) + C \quad (2)$$

در سمت راست معادله (۲)، جمله‌های دوم و سوم به ترتیب بیانگر پتانسیل مختلط برای چاه‌های حقیقی پمپاژ بالا و پایین، و جمله‌های چهارم و پنجم نشانگر پتانسیل مختلط برای چاه‌های مجازی تغذیه بالا و پایین هستند.

لازم به ذکر است که تابع پتانسیل (Φ) در آبخوان آزاد به صورت $\Phi = \frac{1}{2} K \phi^2 + C_u$ و در آبخوان محبوس به طور $\Phi = K B \phi + C_e$ تعریف شده است [20, 21]. در این روابط،

می‌شود [20]. بنابراین، علاوه بر دو چاه حقیقی پمپاژ (در سمت راست شکل)، دو چاه مجازی تغذیه (در سمت چپ شکل) اثر آبراهه را در روابط مربوط به مسئله، منعکس می‌کنند.

در راستای ترکیب تأثیر دو چاه پمپاژ و مرز آبراهه دائمی (بار ثابت)، از پتانسیل مختلط (Ω) طبق رابطه (۱) استفاده شده است [3].

(۱)

$$\Omega = Uz + \frac{1}{2\pi B} \sum_{j=1}^2 Q_j \ln(z - z_j) + \frac{1}{2\pi B} \sum_{j=1}^2 (-Q_j) \ln(z + \bar{z}_j) + C$$

رابطه فوق، برای یک آبخوان همگن و همسان برقرار می‌باشد و جریان آب زیرزمینی در حالت ماندگار فرض شده است. در این رابطه، U سرعت دارسی جریان منطقه‌ای یکنواخت (به سمت آبراهه و موازی با محور x)، B ضخامت آبخوان، Q_j نشان‌دهنده دبی پمپاژ چاه حقیقی z_j ، $-Q_j$ بیانگر دبی تغذیه چاه مجازی z ، موقعیت پتانسیل مختلط محاسبه شده در صفحه مختلط، z_j و \bar{z}_j مختصات و مختصات مزدوج چاه z در صفحه مختلط ($z_j = x_j + iy_j$ و $\bar{z}_j = x_j - iy_j$) و C ثابت معادله می‌باشند. در توضیح ثابت C می‌توان گفت که این پارامتر با توجه به شرایط مرزی مسئله (بار آبی آبراهه دائمی) تعیین می‌شود. در معادله (۱)، پتانسیل مختلط با به کارگیری اصل برهم‌نهی به دست آمده است که در طرف راست معادله، عبارت نخست بیانگر پتانسیل مختلط برای جریان منطقه‌ای (آبخوان)، عبارت دوم نشان‌دهنده پتانسیل مختلط به ازای دو چاه جذب (چاه حقیقی) و سومین جمله بیانگر پتانسیل مختلط برای دو چاه مجازی (اثر آبراهه دائمی) هستند. در واقع با استفاده از این معادله، تأثیر دو چاه حقیقی و آبراهه بر جریان آب زیرزمینی مشخص می‌شود.

رابطه (۱) از پژوهش کریست و گلنز [3] اخذ شده است. با این وجود، این رابطه در مقاله حاضر تغییراتی داشته است. از جمله می‌توان به افقی بودن جریان منطقه‌ای در همه حالات مورد بررسی برای این مقاله اشاره کرد. همچنین جمله سوم در

ارتباط پتانسیل مختلط (Ω) با تابع پتانسیل (Φ) و تابع جریان (Ψ) از معادله (۴) پیروی می‌نماید.

$$\Omega = \Phi + i\Psi \quad \text{and} \quad i = \sqrt{-1} \quad (4)$$

در ادامه، دبی بی‌بعد پمپاژ یا تغذیه (Q_D)، پتانسیل مختلط بی‌بعد (Ω_D)، تابع پتانسیل بی‌بعد (Φ_D) و تابع جریان بی‌بعد (Ψ_D) در رابطه (۵) به نمایش درآمده‌اند.

$$Q_D = \frac{Q}{2\pi BLU}, \quad \Omega_D = \frac{\Omega}{LU}, \quad \Phi_D = \frac{\Phi}{LU}, \quad \Psi_D = \frac{\Psi}{LU} \quad (5)$$

معادله (۲) برای سیستم دو چاهی در تحقیق حاضر (شکل ۲)، در رابطه (۶) بازنویسی شده است.

$$\Omega_D = z_D + Q_D \ln(z_D - 1 - id_D) + Q_D \ln(z_D - 1 + id_D) - Q_D \ln(z_D + 1 - id_D) - Q_D \ln(z_D + 1 + id_D) + C' \quad (6)$$

توابع بدون بعد پتانسیل و جریان برای شکل (۲)، از روابط (۷) و (۸) پیروی می‌کنند که در این معادلات، جمله‌های اول، دوم و سوم مقدار توابع مذکور را به ترتیب برای جریان منطقه‌ای، چاه‌های حقیقی و مجازی بالا، و چاه‌های حقیقی و مجازی پایین محاسبه می‌کنند.

$$\Phi_D = x_D + \frac{Q_D}{2} \ln \left[\frac{(x_D - 1)^2 + (y_D - d_D)^2}{(x_D + 1)^2 + (y_D - d_D)^2} \right] + \frac{Q_D}{2} \ln \left[\frac{(x_D - 1)^2 + (y_D + d_D)^2}{(x_D + 1)^2 + (y_D + d_D)^2} \right] + C' \quad (7)$$

$$\Psi_D = y_D + Q_D \left[\arctan\left(\frac{y_D - d_D}{x_D - 1}\right) - \arctan\left(\frac{y_D - d_D}{x_D + 1}\right) \right] + Q_D \left[\arctan\left(\frac{y_D + d_D}{x_D - 1}\right) - \arctan\left(\frac{y_D + d_D}{x_D + 1}\right) \right] \quad (8)$$

۳-۲- معادلات نقاط سکون

ناحیه گیرش نقش محوری در مبحث پاک‌سازی آب‌های زیرزمینی بر عهده دارد. تعیین این ناحیه در سیستم چندچاهی، نیاز به مشخص کردن نقاط سکون دارد که بر مبنای رابطه (۹) از برابر با صفر قرار دادن تابع دبی بی‌بعد (W_D) و حل معادله برای Z به دست می‌آیند.

K ضریب هدایت هیدرولیکی، Φ هد هیدرولیکی، B ضخامت آبخوان، C_u ثابت آبخوان آزاد و C_e ثابت آبخوان محبوس هستند. بنابراین، راه‌حل ارائه شده در تعیین معادلات ناحیه گیرش که در ادامه توضیح داده شده است، برای هر دو نوع آبخوان (آزاد و محبوس) معتبر می‌باشد.

۳- نتایج و بحث

در این قسمت، چگونگی بدون بعد کردن روابط در مسئله توضیح داده شده است. پس از آن، بر پیدا کردن نقطه کلیدی مسئله (یعنی نقطه سکون) تمرکز گردیده که با توجه به این نقطه، آرایش ناحیه گیرش در حالت‌های مختلف در دسترس قرار گرفته است. این روند با ترسیم شکل‌های مربوطه و بحث در مورد آن به پایان رسیده است؛ به شکلی که مقدار جریان عبوری از شکاف ناحیه گیرش و مقدار آگیری از آبراهه دائمی نیز مشخص گردیده است. لازم به ذکر است که روابط مطرح شده در این بخش، برای مشخص کردن ناحیه‌های گیرش چاه‌های جذب در محیط آبخوان به کار رفته‌اند. در نواحی گیرش، میدان جریان به سوی چاه‌های پمپاژ هدایت می‌شود. مقادیر نرخ پمپاژ و فاصله بین چاه‌ها، روی شکل و هندسه این نواحی تأثیر می‌گذارد. با ارائه سه پیکربندی در تحقیق حاضر، تغییر شکل در ناحیه‌های مذکور به ازای مقادیر مشخصی از دبی و فاصله میان چاه‌ها، در یک چارچوب ریاضی قابل توضیح شده است.

۳-۱- بی‌بعدسازی روابط

برای ساده‌سازی مسئله و امکان ترسیم دقیق‌تر شکل‌های نواحی گیرش چاه‌ها، از بی‌بعد کردن معادلات سود برده شده است. بر اساس رابطه (۳)، با تقسیم مختصات دکارتی (x, y) و مختصات مختلط (Z) بر فاصله چاه‌های پمپاژ از مرز آبراهه دائمی (L)، صفحه بی‌بعد ایجاد شده است.

$$x_D = \frac{x}{L}, \quad y_D = \frac{y}{L}, \quad z_D = \frac{z}{L}, \quad d_D = \frac{d}{L} \quad (3)$$

$$W_D = -\frac{d\Omega_D}{dz} = 0 \quad (9)$$

تابع W_D ، منفی مشتق پتانسیل مختلط بی‌بعد، نسبت به z است و در واقع، معادله (۹) در تحقیق حاضر موجب تشکیل معادله‌ای با چهار ریشه مختلط برای چهار چاه می‌شود که با حل آن، به ازای هر چاه یک ریشه بی‌بعد (Z_{SD}) به دست می‌آید. هر ریشه، بیان‌گر مختصات مختلط نقطه سکون (Z_{SD}) مربوط به یکی از چاه‌هاست. این ریشه‌ها در رابطه (۱۰) نشان داده شده‌اند.

$$Z_{SD(1,2,3,4)} = \pm \sqrt{1 - d_D^2 - 2Q_D \pm 2\sqrt{-d_D^2 + 2d_D^2 Q_D + Q_D^2}} \quad (10)$$

۳-۳- پیکربندی ناحیه گیرش

به منظور ارزیابی دقیق مسئله، دو دبی بحرانی تعریف شده است. ناحیه گیرش سیستم جذب دو چاهی در دبی بحرانی اول (Q_{c1})، به مرز آبراهه دائمی می‌رسد و بر آن مماس می‌شود. در دبی بحرانی دوم (Q_{c2})، ناحیه‌های گیرش هر یک از چاه‌های پمپاژ با هم مماس می‌شوند و شکافی در محدوده آبیگری چاه‌ها دیده نمی‌شود. بنابراین در هنگام بررسی توامان این دو دبی، مقادیر تحلیلی بزرگتر از Q_{c1} به برخورد و تلاقی ناحیه گیرش با آبراهه دائمی اشاره دارند و دبی‌های بزرگتر از Q_{c2} بر پیوسته شدن ناحیه گیرش تمرکز دارند.

۳-۳-۱- پیکربندی (I)

در اولین پیکربندی، برای دبی‌های کوچک، ناحیه گیرش دو چاه از هم مجزا بوده و شکافی بین ناحیه گیرش دو چاه برقرار است (شکل ۳-ا). در این حالت، دبی چاه‌ها از دبی‌های بحرانی نوع یک و نوع دو، کوچکتر است. با افزایش دبی، ابتدا شکاف بین ناحیه گیرش دو چاه از بین رفته است (شکل ۳-ب). در چنین وضعیتی، نقطه سکون دو چاه یکی می‌شود و همچنان ناحیه گیرش چاه‌ها برخوردی با مرز آبراهه دائمی ندارد. با بیشتر شدن دبی، ناحیه گیرش دو چاه بر آبراهه مماس می‌شود و هیچ شکافی نیز بین دو ناحیه گیرش وجود ندارد

(شکل ۳-ج). در صورتی که دبی باز هم افزایش پیدا کند، ناحیه گیرش سیستم دو چاهی با مرز آبراهه برخورد می‌کند (شکل ۳-د). در این حالت، مقداری از آب پمپاژ شده توسط چاه‌ها از آبراهه تأمین می‌شود.

روشن است که در پیکربندی نخست، دبی بحرانی نوع اول از دبی بحرانی نوع دوم بزرگتر است. برای یافتن دبی‌های بحرانی در این پیکربندی، به طرز زیر عمل شده است:

دبی بحرانی اول (QC1)

در این دبی، مرز ناحیه گیرش مماس بر محور آبراهه می‌شود. با جایگذاری مختصات نقطه سکون به صورت پارامتری در معادله (۸) و نام‌گذاری این عبارت به Ψ_{SD} ، شرط تقاطع این نقطه با محور y ها در قالب معادله (۱۱) برقرار خواهد شد.

$$\Psi_D - \Psi_{SD} \Big|_{x=0} = 0 \quad (11)$$

از طرف دیگر، شرط مماس شدن این خط جریان (ناحیه گیرش) بر محور y ها در معادله (۱۲) آورده شده است.

$$\frac{\partial \Psi_D}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

اکنون با در اختیار داشتن دو معادله (۱۱ و ۱۲)، دو مجهول (Q_D) و (d_D) قابل تعیین می‌شوند. برای نمونه، به ازای $d_D=0.4$ مقدار دبی بحرانی اول برابر با 0.290 است.

دبی بحرانی دوم (QC2)

در این دبی، شکاف بین ناحیه گیرش دو چاه از بین می‌رود و نقطه سکون دو ناحیه گیرش بر هم هماهنگ می‌شود؛ پس لازم است که معادله (۱۰) ریشه مضاعف داشته باشد. به عبارت دیگر، در این معادله باید عبارت زیر رادیکال (رادیکال داخلی) برابر با صفر شود که منجر به تشکیل رابطه (۱۳) می‌شود.

$$-d_D^2 + 2d_D^2 Q_D + Q_D^2 = 0 \quad (13)$$

شکل ۳. میدان جریان برای سیستم دو چاهی، پیکربندی (I) به ازای $d_b=0.4$: (a) $Q_D=0.200$ ، (b) $Q_D=Q_{C2}=0.271$ ، (c) $Q_D=Q_{C1}=0.290$ و (d) $Q_D=0.333$ (خطوط توپر: موقعیت ناحیه گیرش، خطوط خط‌چین: خطوط هم‌پتانسیل و خطوط باریک: خطوط جریان)

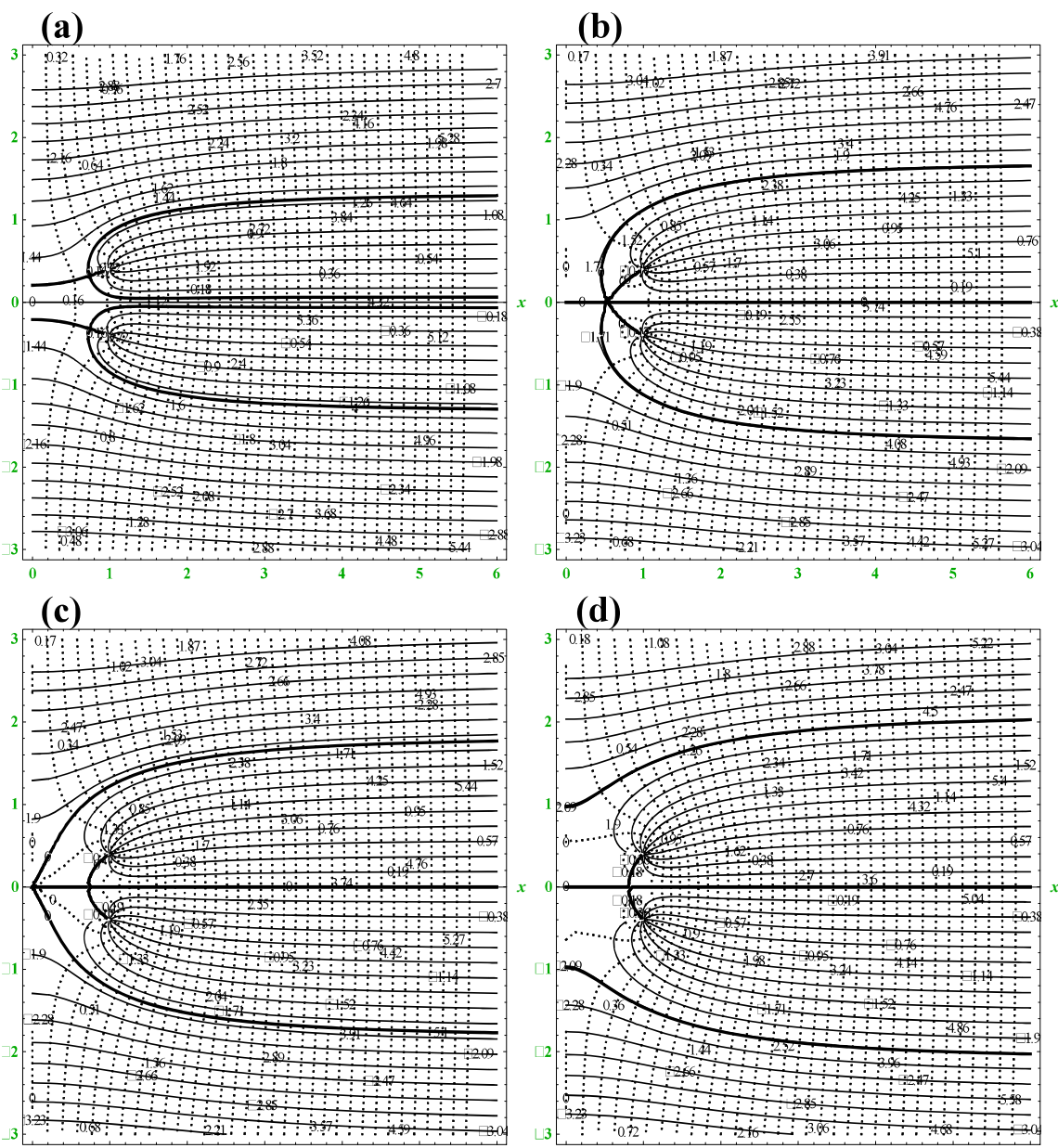


Fig. 3. The flow field for double-well system, configuration (I) for $d_b=0.4$: (a) $Q_D=0.200$, (b) $Q_D=Q_{C2}=0.271$, (c) $Q_D=Q_{C1}=0.290$, (d) $Q_D=0.333$ (Solid lines display Position of capture zone, Dashed lines display Equipotential lines, and Thin lines display Stream lines)

۳-۳-۲- پیکربندی (II)

گیرش هم بر محور آبراهه دائمی مماس می‌باشد. برای یافتن این فاصله و این دبی، باید طبق رابطه (۱۴) سه معادله زیر حل شوند.

$$-d_b^2 + 2d_b^2 Q_D + Q_D^2 = 0, \Psi_D - \Psi_{SD}|_{x=0} = 0, \frac{\partial \Psi_D}{\partial y}|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

در این پیکربندی، دبی‌های بحرانی نوع اول و نوع دوم با هم یکسان می‌شوند. به بیان دیگر، در این فاصله از دو چاه و در این دبی، ناحیه گیرش دو چاه بر هم مماس می‌شوند (شکاف بین دو ناحیه گیرش از بین می‌رود)؛ در حالی که مرز ناحیه

از آبراهه دائمی به دبی بی‌بعد پمپاژ را می‌توان با تعریف f مطابق رابطه (۱۶) به دست آورد.

$$f = \frac{Q_i}{Q_D} \quad (16)$$

$$Q_i = \frac{|\Psi_{D1} - \Psi_{D2}|}{2\pi} \quad (15)$$

در معادله (۱۵)، Ψ_{D1} و Ψ_{D2} به ترتیب مقادیر تابع جریان بی‌بعد در خط بالایی و خط پایینی محدوده برداشت چاه هستند. مقدار Q_i برای شکل‌های (۳-d، ۵-c و ۵-d) به ترتیب برابر با ۰/۰۰۹، ۰/۰۱۴ و ۰/۰۶۱ بوده است. نسبت برداشت آب

شکل ۵. میدان جریان برای سیستم دو چاهی، پیکربندی (III) به ازای $d_D=1.2$: (a) $Q_D=0.333$ ، (b) $Q_D=Q_{C1}=0.434$ ، (c) $Q_D=0.500$ و (d) $Q_D=Q_{C2}=0.610$ (خطوط توپر: موقعیت ناحیه گیرش، خطوط خط‌چین: خطوط هم‌پتانسیل و خطوط باریک: خطوط جریان)

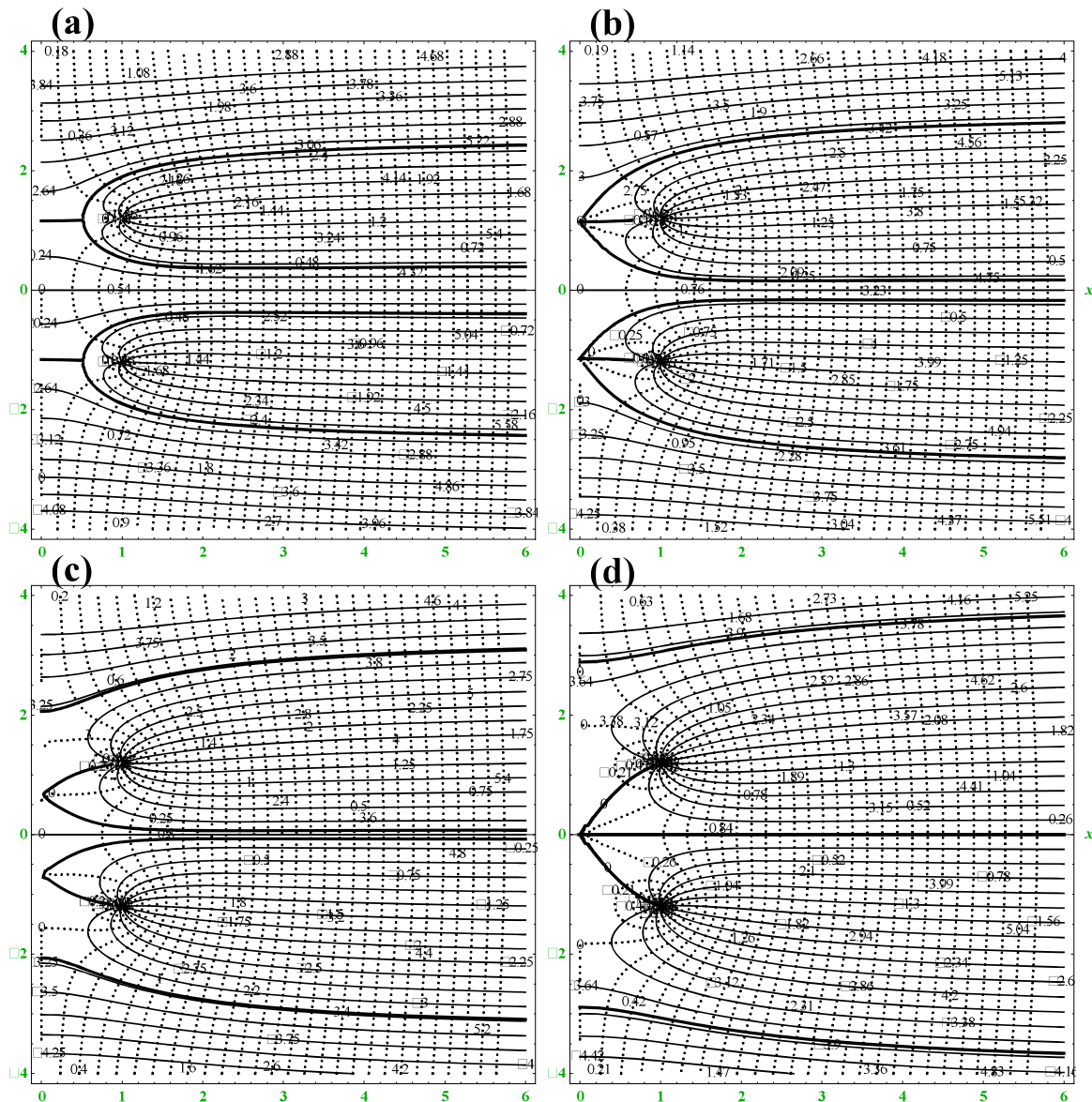


Fig. 5. The flow field for double-well system, configuration (III) for $d_D=1.2$: (a) $Q_D=0.333$, (b) $Q_D=Q_{C1}=0.434$, (c) $Q_D=0.500$, (d) $Q_D=Q_{C2}=0.610$ (Solid lines display Position of capture zone, Dashed lines display Equipotential lines, and Thin lines display Stream lines)

با وجود این که مؤلفه آبراهه در پژوهش‌های اسدی‌آق‌بلاغی و رخشنده‌رو [8]، بکر و اندرسون [14]، اینتراپراسونگ و ژان [15] و اسدی‌آق‌بلاغی و همکاران [16] به کار رفته است؛ تنها یک چاه پمپاژ در این پژوهش‌ها لحاظ شده است. در حالی که در این مقاله، با توجه به امکان تداخل حوضه آبریزی دو چاه پمپاژ و تأثیر بر یکدیگر، ناحیه گیرش در سه پیکربندی ترسیم شکل‌های (۳ تا ۵) و سپس تفسیر شده است.

نظر به تحقیقات [5, 9, 11] بر مبنای بررسی سیستم‌های چندچاهی در آبخوان‌ها (که فاقد آبراهه هستند)، نیز روشن می‌سازد که اضافه کردن مؤلفه آبراهه به ساختار مسئله در مقاله حاضر، باعث شده است که تجزیه و تحلیل‌های دقیق و مختص به این نوشتار، در زمینه مقدار برداشت آب از آبراهه و ارتباط آن با فاصله چاه‌ها ارائه شود (شکل ۷).

مقدار بی‌بعد جریان عبوری از شکاف ناحیه گیرش بر مبنای معادله (۱۷) در دسترس می‌باشد.

$$Q_e = \frac{|\Psi_{D3} - \Psi_{D4}|}{2\pi} \quad (17)$$

شکل ۶. تغییرات دبی‌های بحرانی در مقابل نصف فاصله بی‌بعد چاه‌ها

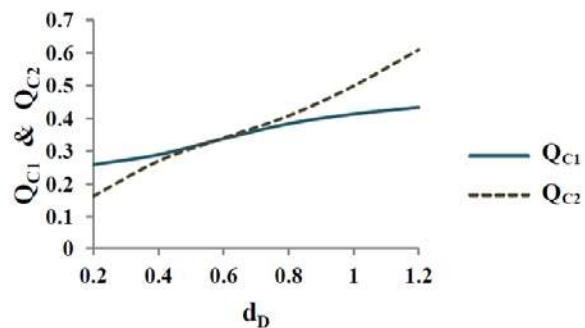


Fig. 6. Variations of critical pumping rates versus the dimensionless half distance of the wells

در معادله (۱۶)، متغیر f میزان آبریزی هر چاه از آبراهه دائمی را نسبت به کل آبریزی آن چاه (چه از آبخوان و چه از آبراهه) می‌سنجد. برای بررسی این متغیر در مسئله، شکل (۷) ارائه شده است. در این شکل، برای مقادیر مختلف فاصله بی‌بعد چاه‌های پمپاژ، تغییرات f در مقابل دبی تخلیه ترسیم شده است. روشن است که در یک فاصله ثابت با بیشتر شدن دبی، مقدار f نیز روند صعودی طی کرده است؛ در حالی که در یک دبی معین با بیشتر شدن فاصله، میزان f تنزل می‌یابد. شایان توجه است که هر یک از نمودارها، محور افقی را در دبی بحرانی نوع اول یعنی Q_{C1} قطع کرده است که با دور شدن چاه‌ها از یکدیگر، مقدار این نوع دبی بیشتر می‌شود.

شکل ۷. تغییرات نسبت برداشت در مقابل دبی بی‌بعد پمپاژ به ازای فواصل متفاوت چاه‌ها

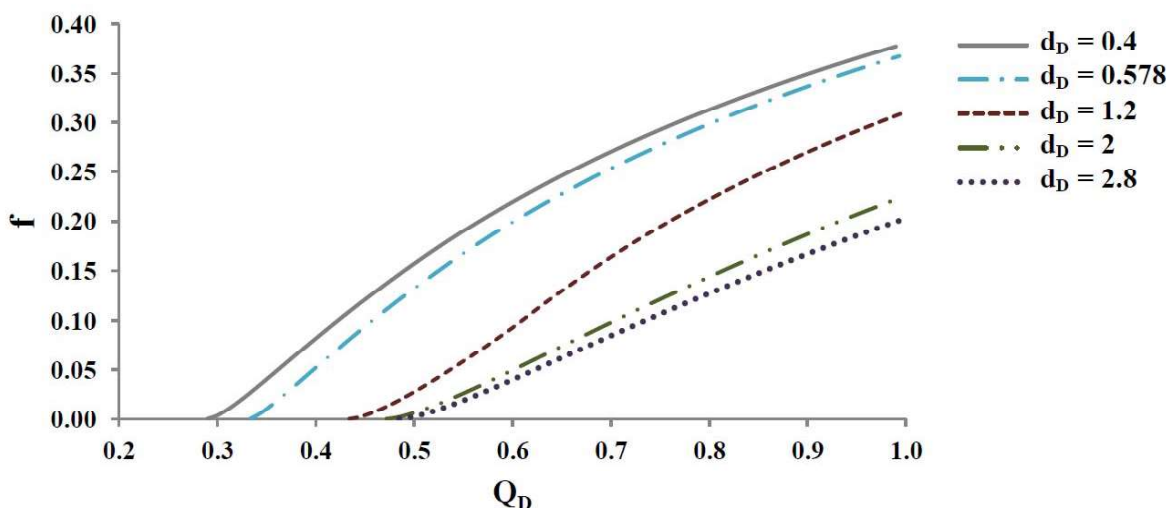


Fig. 7. Variations of extraction ratio versus dimensionless pumping rate for different distances of wells

این که ناحیه گیرش سیستم فاقد شکاف باشد. دومین شرط به عدم تغذیه ناحیه گیرش از آبراهه مربوط می‌شود. چرا که این موضوع، اختلاط آلودگی (با منشأ جریان منطقه‌ای بالادست در آبخوان) را با جریان آبراهه ممکن می‌سازد. دو شرط مذکور نیز منجر به تعریف دو نوع دبی بحرانی شد که دبی بحرانی نوع اول با مماس شدن ناحیه گیرش با آبراهه و دبی بحرانی نوع دوم با پیوستگی ناحیه گیرش متناظر بودند.

۴- منابع

- [1] Mohtashami A., Hashemi Monfared S. A., Azizyan G. & Akbarpour A. 2019. Determination the capture zone of wells by using meshless local Petrov-Galerkin Numerical Model in confined aquifer in unsteady state (case study: Birjand Aquifer). *Iranian journal of Ecohydrology*, 6(1), 239-255. (In Persian)
- [2] Samani N. & Kamrani S. 2016. Determination of quantitative and qualitative capture zone of drinking water wells to nitrate, case study: Aspas Plane, Eghlid City, Fars Province. *Advanced Applied Geology*, 6(2), 29-40. (In Persian)
- [3] Christ J. A. & Goltz M. N. 2002. Hydraulic containment: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation. *Journal of Hydrology*, 262(1-4), 224-244.
- [4] Shackelford C. D. 2013. Geoenvironmental engineering. *Reference Module in Earth Systems and Environmental Sciences*. 24p.
- [5] Nagheli S., Samani N. & Barry D. A. 2020. Capture zone models of a multi-well system in aquifers bounded with regular and irregular inflow boundaries. *Journal of Hydrology X*, 7, 100053.
- [6] EPA (U.S. Environmental Protection Agency). 2008. A systematic approach for evaluation of capture zones at pump and treat systems. Final Project Report, *Office of Research and Development*, Washington, DC, 164p.
- [7] De Smedt F. 2014. Analytical solution for capture and catchment zones of a well located on a groundwater divide. *Water Resources Research*, 50(1), 736-740.
- [8] Asadi-Aghbolaghi M. & Rakhshandehroo G. R. 2016. Delineating capture zone of a pumping well in a slanting regional groundwater flow to a stream with a leaky layer. *Water Resources Management*, 30(12), 4273-4291.
- [9] Zarei-Doudeji S. & Samani N. 2018. Capture zone of a multi-well system in bounded rectangular-shaped aquifers: modeling and application. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42(1), 191-201.
- [10] Bica I., Boukhemacha M. A. & Groza G. 2019. A semi-analytical solution for groundwater flow-field delineation near pumping/injection wells in confined aquifers. *Hydrogeology Journal*, 27(1), 61-71.

در معادله (۱۷)، Ψ_{D3} مقدار تابع جریان بی‌بعد مربوط به شاخه پایینی ناحیه گیرش چاه بالایی و Ψ_{D4} مقدار تابع جریان بی‌بعد در شاخه بالایی ناحیه گیرش چاه پایینی هستند.

در شکل‌های (۳-a، ۵-b، ۵-c) مقدار بی‌بعد جریان عبوری از شکاف ناحیه گیرش (Q_e)، به ترتیب برابر با ۰/۰۲۱، ۰/۱۲۹، ۰/۰۵۷ و ۰/۰۲۵ به دست آمده است. این نقیصه، نشان از عدم کارایی سیستم جذب در مواجهه با آلودگی آبخوان در بالادست دارد؛ چرا که جریان عبوری از شکاف موجود در سیستم دو چاهی، بسان یک مجرا، انتقال آلودگی به آبراهه دائمی را امکان‌پذیر می‌نماید.

سیستم دو چاهی تعریف شده در این پژوهش به ازای دبی‌های پمپاژ و فواصل چاه‌ها، قابلیت استفاده این سیستم برای جلوگیری از انتقال آلاینده از آبخوان به آبراهه و محاسبه درصد آگیری از آبراهه را نشان می‌دهد. این موضوع می‌تواند برای مدیریت بهره‌برداری از منابع آبی مختلف (آبخوان و آبراهه) و کنترل آلودگی سودمند باشد.

در شرایط طبیعی، محدودیت‌هایی به چارچوب مسئله وارد می‌شود. جریان منطقه‌ای غیریکنواخت و مستقیم نبودن مرز آبراهه، از شرایط واقعی برای این پژوهش هستند.

۴- نتیجه گیری

کنترل آلودگی و کیفیت را می‌توان از مباحث حیاتی در آب زیرزمینی برشمرد. با توجه به این که سیستم چندچاهی پمپاژ از روش‌های موثر در رفع آلودگی آبخوان‌ها می‌باشد؛ در تحقیق حاضر دو چاه جذب در نزدیکی یک آبراهه دائمی، چارچوب مسئله را تشکیل داده‌اند. بر پایه تئوری چاه مجازی، تئوری پتانسیل مختلط و اصل برهم‌نهی، امکان تعیین ناحیه گیرش سیستم دو چاهی فراهم شد. محدوده آگیری چاه‌ها، خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان منطبق بر نتایج به دست آمده از معادلات مدل ریاضی پیاده شده در آبخوان، ترسیم شدند. این موارد، کارایی سیستم دو چاهی در رویارویی با آلودگی را منوط به برقراری دو شرط اساسی نشان دادند. شرط نخست

- [16] Asadi-Aghbolaghi M., Rakhshandehroo G. R. & Kompani-Zare M. 2013. An analytical approach to capture zone delineation for a well near a stream with a leaky layer. *Hydrological Sciences Journal*, 58(8), 1813-1823.
- [17] Sun D. & Zhan H. 2007. Pumping induced depletion from two streams. *Advances in Water Resources*, 30(4), 1016-1026.
- [18] Hantush M. S. 1965. Wells near streams with semipervious beds. *Journal of Geophysical Research*, 70(12), 2829-2838.
- [19] Anderson E. I. 2000. The method of images for leaky boundaries. *Advances in Water Resources*, 23(5), 461-474.
- [20] Strack O. D. L. 1989. Groundwater mechanics. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey. 752p.
- [21] Haitjema H. M. 1995. Analytic element modeling of groundwater flow. *Academic Press*, San Diego, California. 406p.
- [11] Nagheli S., Samani N. & Barry D. A. 2020. Multi-well capture zones in strip-shaped aquifers. *Plos One*, 15(3), e0229767.
- [12] Mahdavi A. 2021. Response of dual-zone heterogeneous wedge-shaped aquifers under steady-state pumping and regional flow. *Advances in Water Resources*, 147, 103823.
- [13] Mahdavi A. 2022. Well hydraulics in dual-zone heterogeneous wedge-shaped aquifers under an ambient flow from stream-wise varying boundary heads. *Journal of Hydrology*, 612, Part A, 128063.
- [14] Bakker M. & Anderson E. I. 2003. Steady flow to a well near a stream with a leaky bed. *Ground Water*, 41(6), 833-840.
- [15] Intaraprasong T. & Zhan H. 2007. Capture zone between two streams. *Journal of Hydrology*, 338, 297-307.

Analytical Solution for Multi-well System of Groundwater Remediation in the vicinity of a Permanent Stream

Abdollah Ramezani-Charmahineh¹, Mahdi Asadi-Aghbolaghi^{2*}, Rasoul Mirabbasi Najafabadi², Sayyed-Hassan Tabatabaei³

1. PhD Student of Water Resources, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.
2. Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.
3. Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

Email: mahdi.asadi.a@gmail.com

Abstract

Human civilizations have always depended on freshwater to form, develop and fulfillment of various needs. With increasing urbanization, not only has the need for freshwater not diminished, but also some new technologies and industries have increased water consumption, and the pollution of water sources has increased significantly. Since groundwater resources are far from surface pollution and have their natural remediation ability, protection and remediation have not been given sufficient and appropriate attention. This issue and the overexploitation of aquifers have resulted in the quantitative and qualitative balance of groundwater resources being unsustainable. These issues show that further research is needed on various aspects of groundwater remediation. By developing the equations for water movement in porous media and analyzing them, it is possible to simulate groundwater flow. In this study, the double-well pumping system has been investigated analytically as one of the effective methods for aquifer remediation. In this system, pumping wells provide a return to natural conditions by draining polluted water and preventing it from spreading in the aquifer. For this purpose, the equations of the groundwater potential function and the stream function were determined for two pumping wells near a permanent stream. In other words, the real part of the complex potential equation represents the potential function and its imaginary part specifies the stream function; using the image well theory, the effect of the stream was also applied in the problem relations. By determining the coordinates of the stagnation points, the capture zone of the multi-well system was delineated in various configurations and the amount of stream withdrawal was also calculated. The capture zone describes the behavior and capability of the multi-well system by indicating the capture domain of discharge wells for different distances and different pumping rates. Three configurations of the remediation system are presented for two types of critical pumping rates. Under these conditions, it is possible to control the capture zone without intercepting the stream boundary and creating gaps in the extraction region at different distances of the wells with certain pumping rates. At the first critical pumping rate, the capture zone of the double-well system is tangent to the permanent stream boundary, and at a pumping rate below this threshold, groundwater pollution does not reach the surface waters. At the second critical pumping rate, capture zones of two wells merge together. Indeed, in discharges less than this critical rate, there is a distance (gap) between capture zones of the wells and pollution can enter the surface water through this gap. Also, the distance between two wells was determined in the state that both types of critical pumping rate are equal. This case shows a state of capture zone whose boundary is tangent to the stream boundary, and the capture zones of two wells are merged together. In the mentioned state, the dimensionless distance between two pumping wells (the distance between the two wells divided by their distance from the stream boundary) and the dimensionless critical pumping rate are equal to 2×0.58 and 0.33 , respectively.

Keywords: Capture zone, Aquifer remediation, Analytical method, Permanent stream, Complex potential theory.