

توسعه یک روش تحلیل غیرخطی نموی-تکراری جهت پیمایش مسیر ایستایی گنبدهای فضاکار کم عمق

جواد مشهدی^۱، علیرضا حاجی زاده^۱، سبحان رستمی^{۱*}

۱- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران

*s-rostami@tvu.ac.ir

تاریخ پذیرش ۱۴۰۱/۱۰/۲۵

تاریخ دریافت ۱۴۰۱/۰۳/۰۵

چکیده

در این مقاله یک روش جدید نموی-تکراری برای تحلیل سازه‌های خرپایی، شامل هر دو رفتار غیرخطی هندسی و مصالح پیشنهاد شده است. معادلات تعادل غیرخطی با استفاده از یک روش نموی-تکراری بر مبنای روند کنترل جابه‌جایی حل می‌شوند. مبنای روند غیرخطی هندسی بر اساس فرمول‌بندی هم چرخشی و غیرخطی مصالح براساس ردیابی رابطه تنش-کرنش داده شده برای رفتار پس‌کمانشی عضو خرپایی است. در این روش فرض شده که اندازه بردار نمو جابه‌جایی به اندازه بردار جابه‌جایی کل در شروع هر نمو بار مقداری ثابت است. بر اساس این ایده و تفکر، معادلات مربوطه نوشته شده است و فرمول‌بندی جدید استخراج شده است. روش پیشنهاد شده قادر است نقاط حدی شامل فروجهش و پس‌جهش را نیز به خوبی عبور دهد. برای روش پیشنهاد شده نمونه‌های متعددی در نظر گرفته شده و با حل آنها کارایی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش توسعه داده شده در این مقاله منحنی تعادل را به خوبی روش طول کمان اصلاح شده با اختلاف اندک ردیابی می‌کند.

واژگان کلیدی: تحلیل غیرخطی، بار افزون، گنبدهای فضاکار کم عمق، منحنی تعادل، کنترل جابه‌جایی، روش تکرار

۱- مقدمه

طبیعت نامتناسب رفتار بار-تغییر مکان تعریف می‌شود و به این معناست که پاسخ سازه در مقابل بارگذاری متأثر از سطح بارگذاری و هندسه تغییر شکل یافته سازه است. به بیان دیگر ماتریس سختی سازه علاوه بر تغییر شکل سازه تابعی از نیروهای داخلی اعضا نیز هست. بنابراین برای بسیاری از مسائل، معادله سختی تنها به صورت عددی در روند نموی و تکراری برای تغییرات هندسی سازه قابل محاسبه است. بر اساس روش‌های

به طور کلی تحلیل غیرخطی به دو بخش عمده غیرخطی هندسی و غیرخطی مصالح تقسیم‌بندی می‌شود. در بعضی موارد هر دو نوع غیرخطی هم‌زمان در روند تحلیل به کار گرفته می‌شوند. تحلیل غیرخطی مصالح ناشی از رفتار و رابطه بین تنش و کرنش در المان‌هاست به شکلی که فرض خطی بودن آن در تنش‌های زیاد دور از واقعیت است. تحلیل غیرخطی هندسی بر اساس

نموی- تکراری^۱ (بار افزون^۲)، بار اعمال شده در ابتدا به تعدادی نمو کوچک تقسیم می شود و نمو جابه جایی در میان هر نمو بار بر اساس ماتریس سختی مماسی محاسبه می شود. نیروی مقاوم (نیروی داخلی اعضا) بر مبنای مقدار جابه جایی تجمعی محاسبه می شود و مقدار نیروی نامتعادل بر اساس تفاوت بین بار اعمال شده و برآیند نیروی داخلی گرهی به دست می آید. هرگاه نرم اقلیدسی خطای مربوط به نیروی نامتعادل یا جابه جایی نامتعادل در یک مرز مشخصی قرار گیرد، همگرایی تضمین و مقدار نیروهای اعضا و جابه جایی ها مقادیر صحیح خود را دارند. این روند به نوبت تکرار می شود و مسیر تعادل دنبال می شود [1].

مشکل عددی که ممکن است با آن در ردیابی مسیر تعادل (بار- تغییر مکان) روبرو شویم شرایط بدرفتاری^۳ ماتریس سختی مماسی در نزدیکی نقاط بحرانی است. که ممکن است سبب واگرایی در محاسبات کامپیوتری شود. در حالت واگرایی تشخیص اینکه سیستم به لحاظ سازه ای یا عددی دچار مشکل شده دشوار است. چندین روش عددی برای حل پیشنهاد شده است و هر کدام مزایا و معایب خود را دارند. برای نمونه اگرچه روش نموی خالص^۴ (بدون تکرار) نقاط حدی را پشت سر می گذارد اما خطای محاسبات زیاد است و منحنی تعادل به خوبی تعقیب نمی شود. روش های نموی- تکراری مانند روش نیوتن- رافسون^۵ در هر نمو با انجام تعدادی تکرار مقدار خطای تجمعی را به کمترین ممکن می رسانند لیکن باز در عبور از نقاط حدی دچار مشکل خواهند بود. روش هایی از قبیل روش طول کمان^۶ که در گروه روش های منحنی یاب هستند از بهترین روش ها برای عبور از انواع نقاط حدی هستند [2].

در اوایل دهه ۶۰ میلادی تکنیک نموی در ردیابی منحنی بار- تغییر مکان خرپاها و قاب ها به وسیله ترنر [3] و آرجایرز [4] توسعه داده شد. در روش آن ها، بار اعمالی به تعدادی نمو کوچک تقسیم می شود. پس از هر نمو بار، شکل هندسی و ماتریس سختی سازه، برای لحاظ آثار غیرخطی هندسی

به روزرسانی می شود. در هر نمو یک سری خطا وارد کار می شود که به صورت تجمعی به آن افزوده می شود. آدن [2] در سال ۱۹۶۹ روش اصلاح شده نیوتن- رافسون را به کاربرد به طوری که برای مسائل سازه ای، ماتریس سختی فقط در ابتدای هر نمو بار به روزرسانی شده و در تکرارهای مربوط به هر نمو بار همان ماتریس سختی به کار گرفته می شود.

در دهه ۷۰ میلادی مفهوم کنترل طول کمان برای مسائل فروجهش و برگشت به طور مجزا توسط ویمپر [5] و ریکس [6] ارائه شد. مشکل اصلی این روش این بود که به علت اضافه شدن یک معادله شرطی برای کنترل جابه جایی، تقارن ماتریس سختی به هم می خورد. برای غلبه بر این موضوع کریسفیلد [7] و رام [8] در سال ۱۹۸۱ یک روند تکراری را پیشنهاد کردند که در آن معادله شرطی (قید) از مجموعه معادلات تعادل جدا می شود که سبب می شود طبیعت متقارن و نواری^۷ بودن ماتریس سختی که مناسب برای محاسبات اجزا محدودی است حفظ شود. روش کار ثابت که کار انجام شده را در هر نمو بار به عنوان مقداری ثابت در نظر می گیرد به وسیله بته و دیورکین در سال ۱۹۸۳ پیشنهاد شد [9]. پژوهشگران ادعا می کنند که روش پیشنهادی آن ها نسبت به روش طول کمان عملکرد بهتری را در نزدیکی نقاط حدی از خود نشان می دهد. بعدها یانگ [10] در سال ۱۹۸۴ روش بار ثابت را برای تحلیل تغییر شکل های بزرگ در قاب ها به کار گرفت. در اواخر دهه ۸۰ میلادی، چان [11] روش حداقل سازی جابه جایی پس ماند^۸ را برای تحلیل غیرخطی هندسی و مصالح پیشنهاد داد.

در سال های اخیر نیز روش های گوناگونی برای تحلیل غیرخطی سازه ها چه از نوع هندسی و یا مصالح ارائه شده است که بیشتر بر مبنای روش های عنوان شده در فوق و یا به گونه ای بسطی این روش ها هستند [12]. در روش پیشنهاد شده در این مقاله معادلات تعادل غیرخطی با استفاده از یک روش نموی- تکراری بر مبنای روند کنترل جابه جایی حل می شوند. مبنای روند غیرخطی هندسی بر اساس فرمول بندی هم چرخشی^۹ و

6. Arc-Length Method

7. Symmetry and Band wide

8. Residual displacement method

9. Corotational formulation

1. Increment-Iteration

2. Push Over

3. Ill-condition

4. Pure Incremental Method

5. Newton-Raphson

غیرخطی مصالح براساس ردیابی رابطه تنش-کرنش داده شده برای رفتار پس‌کمانشی عضو خرپایی می‌باشد. در این روش فرض شده که اندازه بردار نمو جابه‌جایی به اندازه بردار جابه‌جایی کل در شروع هر نمو بار مقداری ثابت است و در واقع این ایده اصلی روش است. بر این مبنا معادلات مربوطه با در نظر گرفتن قیودی نوشته شده و فرمول‌بندی جدید استخراج شده است. روش پیشنهاد شده قادر است نقاط حدی شامل فروجهش^۱ و پس‌جهش^۲ را به خوبی عبور دهد. کارایی روش پیشنهاد شده برای تحلیل غیرخطی انواع خرپاها با رفتارهای پیچیده غیرخطی از جمله فروجهش و پس‌جهش، با تحلیل چند نمونه نشان داده شده است.

۲- مفاهیم اصلی در تحلیل غیرخطی

در به‌کارگیری روش معادلات تعادل برای تحلیل غیرخطی، وجود ماتریس سختی به روز شده، به شکلی که پی‌درپی آثار غیرخطی را مدنظر قرار دهد، لازم است. از آنجایی که وضعیت تعادل سازه به طور مرتب تغییر می‌کند، بنابراین تحلیل باید در یک سری نمو‌های باری صورت پذیرد. وضعیت تعادل و سازگاری سازه در انتهای هر نمو باری برای فرمول‌بندی رابطه سختی و حل نمو بعدی بار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین ترتیب حل یک مسئله غیرخطی با یک سری تحلیل‌های خطی تعیین می‌شود. روشن است که میزان نمو بار تأثیر عمیقی بر زمان تحلیل و مشخصات همگرایی مسئله دارد. چنانچه اندازه نمو بار خیلی کوچک باشد، تعداد نمو‌های باری که مورد نیاز است تا محدوده بار مشخصی را پوشش دهد زیاد خواهد شد. از این‌رو هزینه تحلیل بالا خواهد رفت. از طرفی چنانچه میزان نمو بار خیلی بزرگ اختیار شود، ممکن است تعداد تکرارهای مورد نیاز برای تعیین پاسخ برای گام باری مورد نظر زیاد شود.

روش‌هایی از قبیل روش کنترل بار، روش کنترل تغییر مکان، روش طول کمان و روش کنترل کار از معمول‌ترین روش‌های تحلیل مسائل غیرخطی است. به این‌گونه روش‌ها، روش‌های پیش‌بینی - تصحیح^۳ نیز گفته می‌شود زیرا که در یک

نمو پاسخ را پیش‌بینی و با یک سری تکرار به تصحیح جواب می‌پردازند. تعبیر و تفسیر کلی از محاسن و معایب این روش‌ها در کاربرد آن‌ها در مسائل غیرخطی در بسیاری از مراجع آورده شده است. هرچند الگوریتم‌های تحلیل غیرخطی دیگری در مقالات و تحقیقات انجام‌شده وجود داشته، ولی بیشتر این روش‌ها حاصل بسط و تغییرات اعمالی روی این چهار روش می‌باشند. در به‌کارگیری این روش‌ها برای تعقیب منحنی بار تغییر شکل سازه، به‌طور ضمنی فرض شده که مسیر تعادل از یک مسیر ممتد و منحصربه‌فردی پیروی می‌کند. شروع کار نیز با یک نقطه مشخص از پاسخ در مسیر تعادل آغاز می‌شود. این روش‌ها تحلیل‌گر را به محاسبه سایر نقاط حل مسیر، هدایت می‌کند. با تکرار این فرآیند، تمامی منحنی بار- تغییر شکل را به صورت نقطه‌یابی می‌توان دنبال کرد. با توجه به طیف وسیعی تعاریف و پارامترها در موضوع تحلیل غیرخطی، در ادامه، روابط و فرمول‌های حاکم بر اعضا با تاکید بر نوع غیرخطی مربوط به تغییر شکل‌های بزرگ ارائه شده است.

معادله تعادل برای المان سازه که تحت تاثیر نیروی $\{P\}$ قرار گرفته است به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{f(u)\} = \{P\} \quad (1)$$

که در آن $\{f\}$ حاصل نیروهای داخلی در گره‌ها هستند. رابطه نیرو- جابه‌جایی اعضا نشان می‌دهد که $\{f\}$ یک تابع غیرخطی از $\{u\}$ است. فرم نموی معادله (۱) را می‌تواند به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$[\kappa]\{\Delta u\} = \{\Delta P\} \quad (2)$$

که در آن $[\kappa]$ ماتریس سختی مماسی، $\{\Delta u\}$ بردار نمو جابه‌جایی و $\{\Delta P\}$ نمو بار است. ماتریس سختی مماسی سیستم نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[\kappa] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \quad (3)$$

روش تحلیل که در این بخش از مقاله از آن پیروی شده است و همچنین جزئیات دقیق‌تری از محاسبه $[\kappa]$ ، را می‌توان در مرجع [13] مطالعه کرد.

شکل ۱. نیروها و جابه‌جایی‌ها در مختصات محلی و کلی: (الف) عضو در دستگاه کلی؛ (ب) عضو در دستگاه محلی

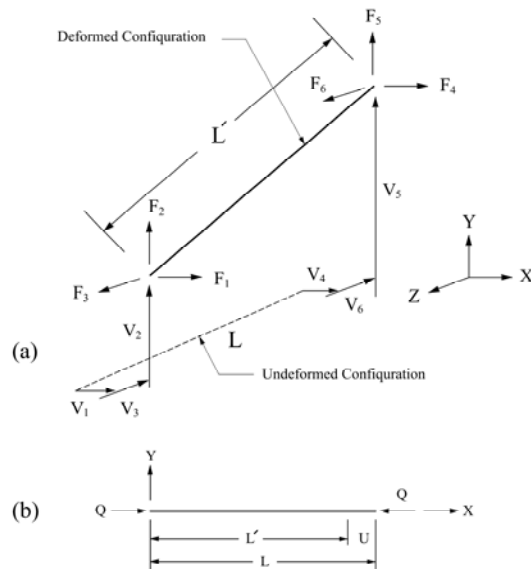


Fig. 1. Forces and displacement in local and global coordinates: (a) Member in global coordinate; (b) Member in local coordinate

شکل ۱-ب عضو خرابایی در مختصات محلی را نشان می‌دهد. رابطه بین نیروهای انتهایی اعضا در مختصات کلی و محلی به صورت زیر است.

$$\{F\} = Q\{B\} \quad (4)$$

که در آن Q نیروی محوری عضو در دستگاه محلی است و

$\{B\}$ بردار انتقال است، که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\{B\} = \{l \quad m \quad n \quad -l \quad -m \quad -n\}^T \quad (5)$$

که در آن l , m و n کسینوس‌های هادی بردار محوری عضو (خط گذرنده از دو انتهای عضو) در حالت تغییرشکل یافته است و L' طول عضو در حالت تغییرشکل یافته است. u تغییرشکل محوری عضو است که برحسب طول اولیه L و طول عضو تغییرشکل یافته L' تعریف می‌شود.

$$u = L - L' \\ = L - \sqrt{((X_2 - X_1) + (V_4 - V_1))^2 + ((Y_2 - Y_1) + (V_5 - V_2))^2 + ((Z_2 - Z_1) + (V_6 - V_3))^2} \quad (6)$$

نیروی محوری در عضو خرابایی $Q = A\sigma$ می‌باشد به طوری که A سطح مقطع و σ تنش است که در حالات زیر تعریف

۳- مرور رفتار غیرخطی هندسی و مصالح خراباها

اگر تغییر در سختی تنها ناشی از تغییر در شکل و هندسه سازه باشد، رفتار غیرخطی از نوع غیرخطی هندسی گفته می‌شود. که در این مورد برای سازه‌های در نظر گرفته شده در این مقاله که خرپاهای کم عمق هستند، جابه‌جایی‌ها بزرگ اما کرنش‌ها کوچک است. اگر تغییر در سختی ناشی از تغییر در رابطه تنش-کرنش باشد، رفتار غیرخطی از نوع غیرخطی مصالح گفته می‌شود. حالت کامل آن است که آثار هر دو نوع غیرخطی هندسی و مصالح باهم در تحلیل سازه لحاظ شوند.

در ادامه تحلیل غیرالاستیک با جابه‌جایی‌های بزرگ خرپاهای سه بعدی، شامل هر دو حالت غیرخطی مصالح و هندسی مورد بحث قرار گرفته و مدل‌هایی برای توصیف رفتار غیرخطی اعضای خرپا ارائه شده است. بسیار مهم است که رابطه تنش-کرنش در نظر گرفته شده برای عضو نزدیک به واقعیت باشد، چرا که به طور مستقیم روی پاسخ پس-کمانشی^۱ سازه خرابایی تاثیر می‌گذارد. در این مقاله، از یک رابطه ساده برای تغییرات تنش و کرنش که توسط هیل و همکاران آن [14] برای توصیف رفتار پس کمانشی اعضای خرابایی پیشنهاد شده، استفاده شده است. روش تحلیل به کار رفته نیز بر مبنای کار انجام شده توسط کاسیمالی در مرجع [13] است.

شکل ۱-الف نمونه یک عضو خرابایی در فضا را نشان می‌دهد. F_1 تا F_6 معرف نیروهای انتهایی اعضا در سیستم مختصات کلی و V_1 تا V_6 نیز جابه‌جایی‌های مربوطه در راستای همان نیروها هستند. برای این عضو خرابایی در حالت تغییرشکل نیافته، مختصات گره‌های ابتدا و انتها در دستگاه مختصات کلی به ترتیب (X_1, Y_1, Z_1) و (X_2, Y_2, Z_2) هستند. برای عضو خرابایی در حالت تغییر شکل یافته، مختصات گره‌ها در دستگاه کلی به ترتیب $(X_1 + V_1, Y_1 + V_2, Z_1 + V_3)$ و $(X_2 + V_4, Y_2 + V_5, Z_2 + V_6)$ برای گره ابتدا و انتها هستند.

شده است، بنابراین $\varepsilon = (L'/L) - 1$.

معادله تعادل برای یک المان خرابایی تحت بار خارجی $\{P\}$ به مانند معادله (۱) تعریف می‌شود. که در آن $\{f\}$ نیروهای داخلی به دست آمده و $\{u\}$ مختصات تعمیم یافته گره‌ها شامل انتقال گره‌های انتهایی است. روابط نیرو و تغییر شکل نشان می‌دهند که $\{f\}$ تابعی غیرخطی از $\{u\}$ است. فرم نموی این معادله نیز به صورت معادله (۲) نوشته می‌شود.

که در آن $[K]$ ماتریس سختی مماسی سیستم است که از اسمبل کردن ماتریس سختی مماسی اعضا به دست می‌آید. $\{\Delta u\}$ بردار جابه‌جایی نموی و $\{\Delta P\}$ نمو بار است. ماتریس سختی مماسی اعضا $[K]$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[K] = \left(\frac{AE}{L} \right) \{B\} \{B\}^T + Q[g] \quad (9)$$

که $[g]$ ماتریس هندسی است و در مرجع [15] آمده است و $\bar{E}$ مشابه E در حالت الاستیک و الاستو-پلاستیک پس از تنش تسلیم است. وقتی که عضو در حالت فشار است و $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_{cr}|$ ، برای حالت غیرالاستیک، مساوی مدول خطی است.

$$\bar{E} = -(\sigma_{cr} - \sigma_1) \exp \left[\left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \sqrt{\varepsilon'} \right) \varepsilon' \right]. \quad (10)$$

$$\left(\bar{X}_1 + \frac{3}{2} \bar{X}_2 \sqrt{\varepsilon'} \right)$$

به بیانی دیگر در برخی مراجع برای رفتار پس‌کمانشی عضو، مطابق رابطه (۱۱) تابع تنش را بر حسب کرنش مشخص کرده‌اند.

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_{cr} - \sigma_1) \exp \left[- \left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \sqrt{\varepsilon'} \right) \varepsilon' \right] \quad (11)$$

برخلاف مسیر بارگذاری در ناحیه فشاری که برای تمام اعضا با نسبت لاغری برابر یکسان است، مسیر باربرداری در ناحیه فشاری بستگی به مقدار تنش عضو در لحظه باربرداری دارد [16]. در مسیر باربرداری از ناحیه غیرالاستیک پس‌کمانشی $(|\varepsilon| \geq |\varepsilon_{cr}|)$ منحنی باربرداری پیچیده خواهد بود.

ساختن یک معادله سازگار و مناسب با مدلسازی رفتاری تنش-کرنش در مسیر بازگشت از نقطه کمانش کار دشواری است و رابطه آن پیچیده خواهد شد. یک فرض برای ساده سازی، همانطور که در شکل (۳) مشخص است، به این صورت است که مسیر باربرداری از عضو کمانش یافته در ناحیه غیرالاستیک

می‌شود. برای عضو کششی:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_y \quad (7-الف)$$

$$\sigma = \sigma_y, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_y \quad (7-ب)$$

و برای عضو فشاری:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| < |\varepsilon_{cr}| \quad (8-الف)$$

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_{cr} - \sigma_1) \exp \left[- \left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \sqrt{\varepsilon'} \right) \varepsilon' \right], \quad |\varepsilon| \geq |\varepsilon_{cr}| \quad (8-ب)$$

در روابط بالا ε_y و σ_y به ترتیب کرنش و تنش تسلیم است؛ $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ ثوابتی هستند که وابسته به ضریب لاغری عضو فشاری (L/r) هستند؛ $\sigma_1 = \alpha \sigma_{cr}$ به صورت تقریبی حد پایین تنش است و α به تناسب انتخاب می‌شود؛ $\varepsilon' = |\varepsilon| - \varepsilon_{cr}$ کرنش محوری است که از شروع محدوده غیرالاستیک پس‌کمانشی (همانگونه که در شکل ۲ مشخص است) اندازه‌گیری می‌شود. $\sigma_{cr} = \pi^2 EI / AL^2$ و $\varepsilon_{cr} = \sigma_{cr} / E$ به ترتیب تنش بحرانی کمانشی اولر^۱ و کرنش متناظر با آن است. که در این روابط E مدول الاستیک مواد، A ، I و L به ترتیب ممان اینرسی حول محور ضعیف، سطح مقطع و طول عضو خرابایی هستند.

شکل ۲. منحنی تنش-کرنش مفروض برای مسیر بارگذاری

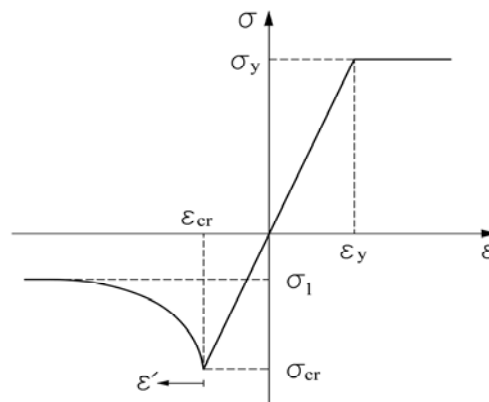


Fig. 2. Stress-Strain curve for loading path

پارامتر ε در فرمول‌های (۷ و ۸) کرنش است که می‌تواند به صورت‌های مختلف مهندسی، لگاریتمی، گرین^۲ و یا المانسی^۳ تعریف می‌شود [1]. در روند این مقاله از کرنش مهندسی استفاده

به دست می‌آید. در روش ارائه شده، فرض شده است که نسبت اندازه بردار نمو جابه‌جایی به اندازه بردار جابه‌جایی کل برابر پارامتر Ψ باشد، که در ابتدای هر نمو بار مقداری ثابت است. بنابراین:

$$\Psi_i^n = \frac{|\delta d_i^n|}{|d_i^n|} \quad (13)$$

در معادله بالا d_i^n و δd_i^n به ترتیب بردار جابه‌جایی کل و بردار نمو جابه‌جایی مربوط به i -امین تکرار از n -امین نمو بار است. بنابراین با یکبار محاسبه بردار نمو جابه‌جایی δd_i^n ، بردار جابه‌جایی کل سازه در انتهای i -امین تکرار با رابطه $d_i^n = d_{i-1}^n + \delta d_i^n$ محاسبه می‌شود. پارامتر Ψ_i^n یک پارامتر در محدوده $0 < \Psi_i^n \leq 1$ است که مقدار آن می‌تواند در طول بارگذاری سازه ثابت و یا متغیر باشد. در اینجا ما مقدار ثابتی برای آن در ابتدای هر نمو بار در نظر گرفته‌ایم، به طوری که این مقدار به طور تدریجی تا رسیدن به همگرایی در هر تکرار کاهش پیدا می‌کند. بردار نمو جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta d_i^n = -(K_i^n)^{-1} R_i^n = -(K_i^n)^{-1} ((F_{int})_i^n - \lambda_i^n F_{ext}) \quad (14)$$

در معادله بالا R_i^n و K_i^n به ترتیب ماتریس سختی مماسی و بردار بار نامتعادل در i -امین تکرار از n -امین نمو بار است. $(F_{int})_i^n$ و F_{ext} نیز به ترتیب بردار نیروهای داخلی در گام جاری و بردار الگوی بار خارجی ثابت است. λ_i^n هم ضریب بار است که مجهول است. معادله (۱۳) می‌تواند به معادله زیر تجزیه شود.

$$\delta d_i^n = \delta \bar{d}_i^n + \lambda_i^n \delta \hat{d}_i^n \quad (15)$$

که در آن

$$\delta \bar{d}_i^n = -(K_i^n)^{-1} (F_{int})_i^n \quad (16)$$

$$\delta \hat{d}_i^n = (K_i^n)^{-1} F_{ext} \quad (17)$$

با جایگزین کردن مخرج کسر در رابطه (۱۳) با $d_{i-1}^n + \delta d_i^n$ و استفاده از معادله (۱۵)، پس از انجام یک سری عملیات جبری و ساده سازی، یک معادله درجه دوم بر حسب λ_i^n به صورت زیر به دست آمده است.

$$a_1 (\lambda_i^n)^2 + a_2 \lambda_i^n + a_3 = 0 \quad (18)$$

که در آن

پس کمناشی، یک خط مستقیم از نقطه باربرداری با تنش σ_r و کرنش ϵ_r به نقطه‌ای با تنش برابر با نصف تنش تسلیم σ_y و کرنش متناظر با آن است. هنگامی که در مسیر باربرداری به نقطه A می‌رسد، رفتار عضو مسیر معادله (۷) را دنبال می‌کند.

شکل ۳. منحنی تنش-کرنش مفروض برای مسیر باربرداری

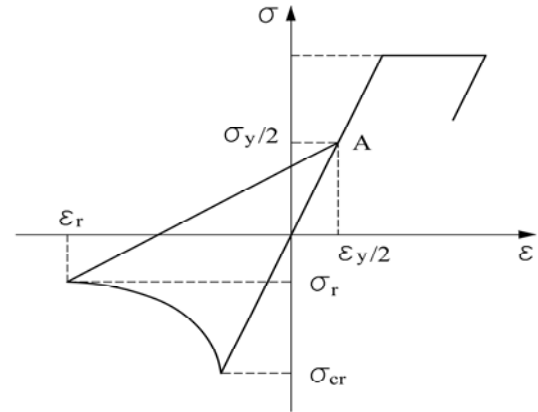


Fig. 3. Strain-Stress curve for unloading path

۴- روش پیشنهادی

روش‌های زیادی برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها در مراجع وجود دارد. در میان آنها تکنیک جستجوی خطی^۱ به طور وسیعی در برنامه‌نویسی ریاضی استفاده می‌شود و طیف گسترده‌ای از روش‌های توسعه یافته در این زمینه وجود. روند اصلی روش پیشنهاد شده در این بخش نیز بر اساس این تکنیک است. در ادامه روش پیشنهاد شده و ایده استخراج آن شرح داده شده است.

۴-۱- مفاهیم اصلی

معادله تعادل یک سیستم غیرخطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R(u, \lambda) = F_{int}(u) - \lambda F_{ext} \quad (19)$$

که در آن F_{int} نیروهای داخلی که تابعی از جابه‌جایی u است و F_{ext} بردار ثابت بار خارجی و پارامتر اسکالر λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) سطح بار یا ضریب بار است که در F_{ext} ضرب می‌شود.

روش پیشنهاد شده در این مقاله بر مبنای کنترل جابه‌جایی است به طوری که با تعیین یک جابه‌جایی مشخص، بار متناظر آن

به طوری که ضرائب ثابت آن در ذیل تعریف شده‌اند

$$b_1 = \left((\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) + (d_{i-1}^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \right)^2 - (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \left((\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) + (d_{i-1}^n \cdot d_{i-1}^n) + 2(d_{i-1}^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) \right) \quad (25-الف)$$

$$b_2 = 2(\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \cdot \left((\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) + (d_{i-1}^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) + 0.5(d_{i-1}^n \cdot d_{i-1}^n) \right) - 2(\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \left((\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) + (d_{i-1}^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \right) \quad (25-ب)$$

$$b_3 = (\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n)^2 - (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) (\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) \quad (25-ج)$$

نامساوی (۲۴) نشان می‌دهد که در نظر گرفتن هر مقدار دلخواهی برای پارامتر Ψ قابل قبول نیست. این پارامتر باید به گونه‌ای انتخاب شود که نامساوی ارضا شود. با قرار دادن رابطه (۲۴) برابر صفر، ریشه‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} (\Psi_i^n)_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{\Delta}}{2b_1}} \\ (\Psi_i^n)_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b_2 - \sqrt{\Delta}}{2b_1}}, \quad \Delta = \sqrt{b_2^2 - 4b_1b_3} \end{cases} \quad (26)$$

در هر تکرار از هر نمو بار، مقدار Ψ_i^n باید رابطه (۲۴) را ارضا نماید. در غیر اینصورت، با توجه به ریشه‌های معادله و تعیین علامت، باید مقدار مناسب برای Ψ_i^n تعیین شود.

۴-۴ معیار همگرایی

همانگونه که در قسمت‌های قبل گفته شد، Ψ_1^n می‌تواند در طول بارگذاری سازه ثابت و یا در هر نمو بار تغییر کند. اگر چه در این مقاله استراتژی اول به کار گرفته شد، اما برای حالت متغیر می‌توان بیان داشت که مقدار Ψ_1^n متناسب با تغییر سختی سازه تغییر کند که این موضوع تحقیقات آتی می‌تواند باشد. در واقع در مجاورت نقاط حدی، بهتر است از مقادیر کمتری برای Ψ_1^n استفاده شود. بنابراین در هر دو رویه برای اینکه به همگرایی رسید، مقدار Ψ_i^n در هر تکرار از هر نمو بار باید کوچکتر شود. در اینجا رابطه زیر برای کاهش مقدار این پارامتر در هر تکرار پیشنهاد می‌شود.

$$\Psi_i^n = \alpha^{(i-1)} \Psi_1^n \quad (27)$$

در رابطه فوق α ضریب ثابتی است که می‌تواند بین صفر و یک متغیر باشد ($0 < \alpha < 1$). با توجه به تجربه کسب شده از روش پیشنهادی در حل چندین نمونه، توصیه می‌شود که مقدار

$$a_1 = \left((\Psi_i^n)^2 - 1 \right) (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \quad (19-الف)$$

$$a_2 = 2 \left(\left((\Psi_i^n)^2 - 1 \right) (\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) + (\Psi_i^n)^2 (d_{i-1}^n \cdot \delta \hat{d}_i^n) \right) \quad (19-ب)$$

$$a_3 = \left((\Psi_i^n)^2 - 1 \right) (\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta \bar{d}_i^n) + (\Psi_i^n)^2 (2d_{i-1}^n \cdot \delta \bar{d}_i^n + d_{i-1}^n \cdot d_{i-1}^n) \quad (19-ج)$$

در معادلات (۱۹)، علامت “.” معرف ضرب داخلی دو بردار است. معادله (۱۸) دارای دو ریشه، λ_1 و λ_2 است. معیار پذیرش این دو جواب در قسمت بعد بررسی شده است.

۴-۲- معیار پذیرش λ

برای انتخاب λ ، اول باید به موضوع پیدا کردن ریشه مناسب معادله (۱۸) بپردازیم. از آنجایی که δd_{i-1}^n و δd_i^n نباید در جهات مخالف هم باشند، معادله (۲۰) باید ارضا شود.

$$(\delta d_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) > 0 \quad (20)$$

جایگزینی معادله (۱۵) در (۲۰) نتیجه می‌دهد

$$(\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) + \lambda_i^n (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) > 0 \quad (21)$$

بسته به اندازه $(\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n)$ ، نامساوی فوق به فرم زیر باز نویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda_i^n > \lambda_c, & (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) > 0 \\ \lambda_i^n < \lambda_c, & (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) < 0 \end{cases}, \quad \lambda_c = -\frac{(\delta \bar{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n)}{(\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n)} \quad (22)$$

از نتایج بدست آمده از معادله (۱۸)، آن ریشه که معادله (۲۲) را ارضا نماید مورد پذیرش است. مقدار λ_i^n مورد پذیرش از معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \lambda_i^n = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_c), & (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) > 0 \\ \lambda_i^n = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_c), & (\delta \hat{d}_i^n \cdot \delta d_{i-1}^n) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

۴-۳- معیار پذیرش پارامتر Ψ

همانطور که از معادلات (۱۹) مشخص است، ضرائب معادله (۱۸) بستگی به پارامتر Ψ_i^n دارند. برای اینکه λ_i^n عددی صحیح باشد، لازم است که معادله پایین ارضا شود.

$$a_2^2 - 4a_1a_3 \geq 0 \quad (23)$$

با جایگزینی روابط (۱۹) در معادله (۲۳) و سپس ساده سازی آن، خواهیم داشت

$$b_1 (\Psi_i^n)^4 + b_2 (\Psi_i^n)^2 + b_3 \geq 0 \quad (24)$$

۴-۶- تعیین ضریب بار مناسب λ_i^n با توجه به معادلات (۱۸ و ۲۳).

۴-۷- محاسبه δd_i^n بر طبق معادله (۱۵) و $d_i^n = d_{i-1}^n + \delta d_i^n$

۴-۸- در $i = 1$ مقدار رواداری با توجه به معادله (۲۸) تعیین شود.

۴-۹- بردار نیروی نامتعادل بر اساس معادله (۱۲) بدست آورید.

۴-۱۰- مقدار خطا از طریق معادله (۱۵) تعیین شود.

۴-۱۱- بازگشت به ابتدای گام ۴، تا ارضای معادله (۱۵).

گام ۵- کنترل خاتمه الگوریتم: بررسی شود که آیا تعداد گام‌ها (نمونه‌های بار، n) کمتر از بیشینه از پیش تعیین شده، n_{max} ، است

و یا اینکه ضریب بار λ_i^n در پایان نمو کمتر از مقدار تعیین شده مجاز λ_{max} باشد، در این صورت $n = n + 1$ و $i = 1$ و به گام ۴

بازگشت شود. در غیر اینصورت روند متوقف شود.

شکل ۴. فلوچارت الگوریتم پیشنهاد شده

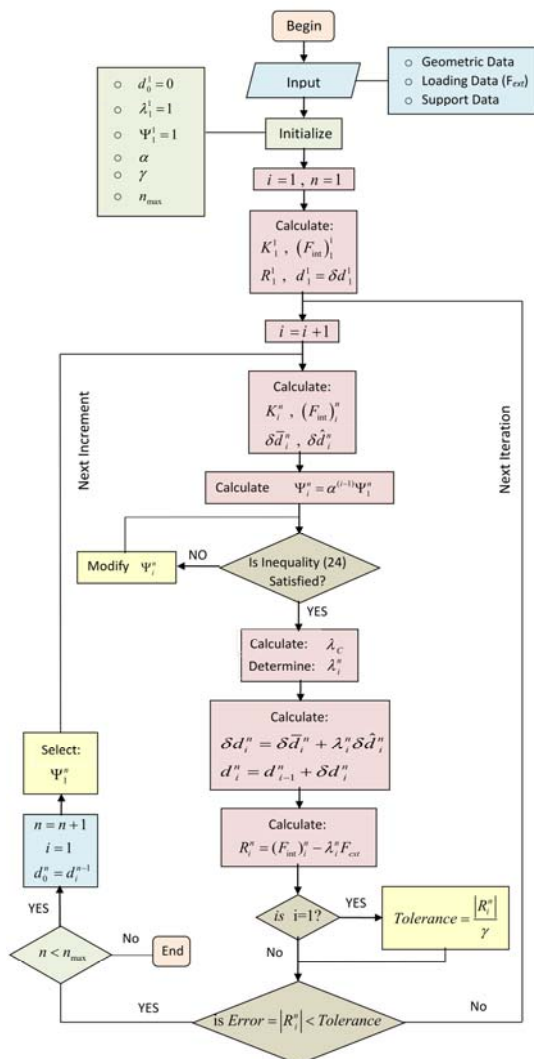


Fig. 4. Proposed method Algorithm

$\alpha = 0.9$ و یا نزدیک به آن در نظر گرفته شود. مقدار پارامتر Ψ_i^n

هر عددی می‌تواند انتخاب شود، پیشنهاد می‌شود که عددی

نزدیک به ۰/۰۱ انتخاب شود. البته باید گفت که جای کار روی

این روش وجود دارد، شاید بتوان ایده‌ای پیاده کرد که نرخ کاهش

پارامتر Ψ_i^n را به طور خودکار تعیین و اعمال نماید در روش

توسعه داده شده، رابطه زیر برای معیار همگرایی پیشنهاد می‌شود:

$$Error = |R_i^n| \leq Tolerance = \frac{|R_i^n|}{\gamma} \quad (28)$$

در واقع مقدار خطا، طول بردار نیروی نامتعادل است که در هر

تکرار از هر نمو بار تعیین می‌شود. رواداری همگرایی به عنوان

کسری از طول بردار نیروی نامتعادل در اولین تکرار از هر نمو

بار تعیین می‌شود و γ مقدار ثابت بزرگتر از واحد است. پیشنهاد

می‌شود $5 \leq \gamma \leq 10$ انتخاب شود. در مطالعه عددی انجام شده در

قسمت ۵ این مقاله، مقدار $\gamma = 5$ در نظر گرفته شده است.

۴-۵ الگوریتم روش پیشنهادی

یک برنامه کامپیوتری بر مبنای روش پیشنهاد شده در این بخش،

در محیط Matlab نوشته شده است. فلوچارت این روش نیز در

شکل (۴) نشان داده شده است. الگوریتم مورد نظر به صورت گام

به گام در ادامه شرح داده شده است:

گام ۱- تعریف متغیرها و پارامترها، شامل هندسه سازه، اتصالات،

شرایط مرزی و ویژگی‌های مصالح.

گام ۲- تعیین ضرائب مورد نیاز برای تکمیل الگوریتم، شامل λ_1^1 ،

λ_{max} ، α ، γ ، و Ψ_1^1 .

گام ۳- برای اولین تکرار از اولین نمو بار ($i=1, n=1$)، ماتریس

سختی مماسی سازه تشکیل و بردار نیروهای داخلی، نیروهای

نامتعادل و جابه‌جایی‌ها تعیین می‌شود.

گام ۴- برای نمو بار بعد از اولین گام $i = i + 1$ ؛

۴-۱- محاسبه ماتریس سختی مماسی و بردار نیروهای داخلی.

۴-۲- محاسبه بردار $\delta \bar{d}_i^n$ و $\delta \hat{d}_i^n$ با توجه به معادله (۱۸ و ۱۹).

۴-۳- محاسبه Ψ_i^n با توجه به معادله (۲۹).

۴-۴- کنترل نامساوی (۲۴) و در صورت نیاز اصلاح Ψ_i^n برای

ارضای معادله.

۴-۵- محاسب λ_c با توجه به معادله (۲۲)

۵- ارزیابی عددی

آمده از تحلیل این خرپا با روش پیشنهاد شده، به نتایج روش طول کمان که در اینجا به عنوان روش مرجع در نظر گرفته شده است، بسیار نزدیک است. مقدار بار بحرانی به دست آمده از طریق روش پیشنهادی و مرجع در هر دو حالت تحلیل الاستیک و IPB در جدول (۱) مشخص شده است. تفاوت بار بحرانی به دست آمده از طریق روش پیشنهاد شده با روش مرجع در حالت الاستیک و IPB به ترتیب ۰/۱۵۴ و ۰/۰۸۹ است.

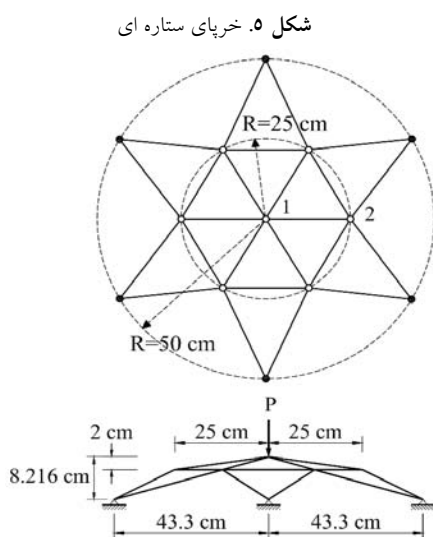


Fig. 5. Star truss

شکل ۶. منحنی نیرو-جابجایی گره ۱ برای خرپای ستاره‌ای

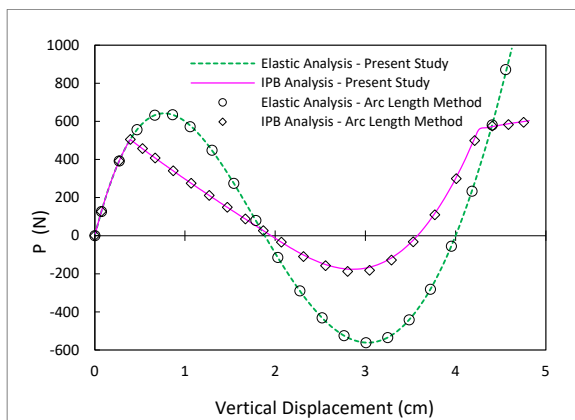


Fig. 6. Force-displacement curve for node 1 in star truss

در این قسمت درستی روش پیشنهاد شده با امتحان آن از طریق حل چند نمونه عددی مورد بررسی قرار گرفته است. سه نمونه از خرپاهای فضایی در نظر گرفته شده و دقت روش مذکور در تحلیل غیرالاستیک با رفتار پس کمانشی این سازه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. روند همگرایی جواب تا جایی که معیار همگرایی ارضا شود ادامه پیدا کرده است. دو حالت تحلیل الاستیک و غیرالاستیک با رفتار پس کمانشی (IPB) با در نظر گرفتن پارامترهای $\sigma_r = 0.4\sigma_{cr}$ ، $\bar{X}_2 = 100$ ، $\bar{X}_1 = 50$ قرار گرفته است. برای کنترل درستی، روش پیشنهاد شده با روش طول کمان اصلاح شده استوانه‌ای^۱ که توسط کریسفلد در مراجع [17 و 18] برای تحلیل غیرخطی انواع سازه‌ها توسعه داده شده، مقایسه شده است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل از روش طول کمان اصلاح شده که با نوشتن کد آن در محیط مطلب استخراج شده است با نتایج حاصل از مدلسازی خرپاها در نرم افزار ANSYS (با تنظیم پارامترهای تحلیل توسط روش ریکس) درستی‌آزمایی شده است که در اینجا به دلیل کاهش متن مقاله، خروجی‌های گرافیکی این نرم‌افزار آورده نشده است.

۵-۱- گنبد خرپایی ستاره‌ای

شکل (۵) یک گنبد خرپایی ستاره‌ای شکل با ۲۴ عضو را نشان می‌دهد که بار متمرکز P در راس آن وارد شده است. ابعاد سازه در شکل مشخص است. سطح مقطع همه اعضا 0.1 cm^2 و ممان اینرسی کمترین آنها 0.00417 cm^4 است. مدول الاستیک و تنش تسلیم مواد برای تمام اعضا به ترتیب، $E = 2.034 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ و $\sigma_y = 4 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$ است. این خرپا توسط هیل و همکاران با روش طول کمان [14]، رامش و کریشنامورتی با روش رهایی بویا [19] و نیز همچنین تای و کیم با روش GDC تحلیل شده است [20].

این خرپا با روش پیشنهاد شده و روش طول کمان برای دو حالت الاستیک و غیرالاستیک پس کمانشی (IPB) تحلیل شده است. مسیر تعادل برای گره‌های ۱ و ۲ به ترتیب در شکل (۶) و (۷) نشان داده شده است. شکل‌ها نشان می‌دهند که نتایج به دست

جدول ۱. نتایج تحلیل خربای ستاره‌ای در محاسبه بار بحرانی

Analysis type	Limit load (kg)		
	Arc-length	Present	Error (%)
Elastic	641.07	642.06	0.154
IPB	504.46	504.91	0.089

Table 1. Limit point calculations for star truss

۲-۵ گنبد خربایی ژئودزیک

هندس گنبد ژئودزیک خربایی نشان داده شده در شکل (۱۰) برگرفته از مرجع [19] است. این خرپا از ۱۵۶ عضو و ۶۱ گره تشکیل شده است و تحت یک بار متمرکز $P = 3.8 \text{ KN}$ با نمو بار $\Delta P = 0.1 \text{ KN}$ در راس قرار دارد. همه اعضا مدول الاستیسیته و سطح مقطع یکسان $E = 6895 \text{ KN/cm}^2$ و $A = 6.5 \text{ cm}^2$ دارند. تیکه‌گاه‌ها سازه مفصلی و در لبه خارجی آن قرار دارند. ارتفاع گنبد با رابطه $x^2 + y^2 + (z + 7.2)^2 = 60.84$ تعیین می‌شود. اینرسی حول محور ضعیف و تنش تسلیم مواد نیز برای تمام اعضا به ترتیب $1/0 \text{ cm}^4$ و $\sigma_y = 400 \text{ KN/cm}^2$ است.

شکل ۱۰. گنبد خربایی ژئودزیک

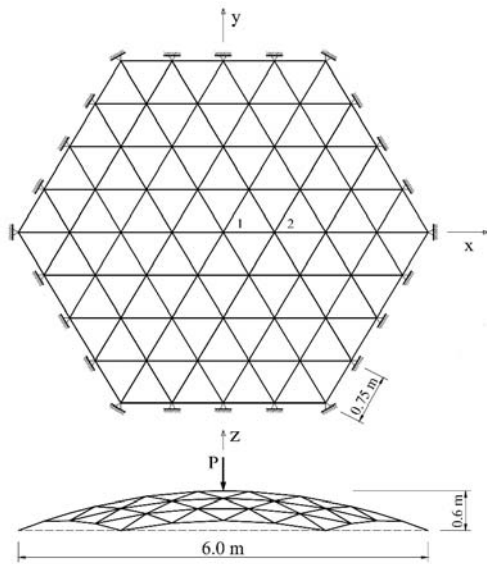


Fig. 10. Geodesic dome truss

منحنی تعادل حاصل از تحلیل این سازه برای گره‌های ۱ و ۲ به ترتیب در شکل‌های (۱۱ و ۱۲) نشان داده شده است. در این نمونه نیز شکل‌ها نشان می‌دهند که نتایج به دست آمده از تحلیل این خرپا با روش پیشنهاد شده بر روش مرجع هماهنگ

شکل ۷. منحنی نیرو- جابه‌جایی گره ۲ برای خربای ستاره‌ای

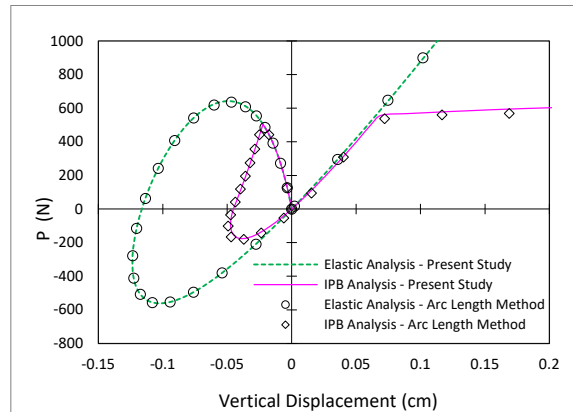


Fig. 7. Force-displacement curve for node 2 in star truss

شکل‌های (۸ و ۹) خروجی‌های گرافیکی برنامه نوشته شده برای روش پیشنهاد شده در محیط MATLAB هستند که به ترتیب شکل (۸) سازه مدل شده در حالت اولیه و پس از تغییر شکل را نشان می‌دهد و شکل (۹) روند تغییر شکل سازه با افزودن بار را نشان می‌دهد که سازه دچار فروجهش شده است.

شکل ۸. مدلسازی سازه توسط برنامه (حالت اولیه و تغییر شکل یافته)

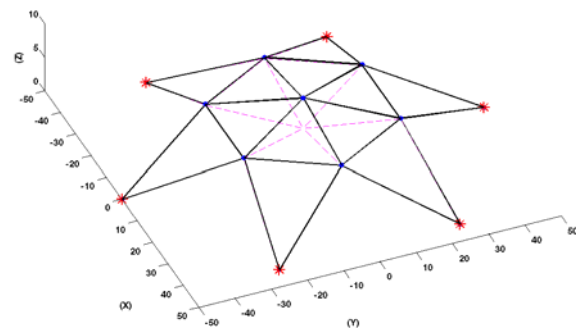


Fig. 8. Structural modeling by the program (initial and deformed shape)

شکل ۹. روند تغییر شکل سازه در حین افزودن بار (خروجی کد)

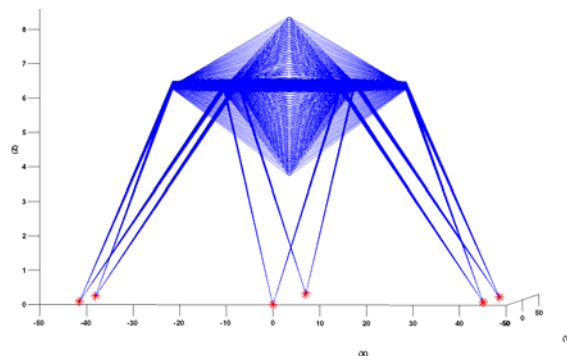


Fig. 9. The process of structure deformation while push over (code's output)

۳-۵ خرابای قوسی

شکل (۱۳)، خرابای دو بعدی قوسی شکل با ۱۰۱ عضو را نشان می‌دهد. این خرابا بوسیله هریندا با روش طول کمان [21] و تای و کیم با استفاده از روش GDC [20] تحلیل شده است. همه اعضای سازه از یک جنس و دارای ممان اینرسی واحد و سطح مقطع یکسان‌اند به طوری که $EA = 50 \text{ MN}$ است.

منحنی‌های مسیر تعادل این خرابا از تحلیل الاستیک آن با روش پیشنهاد شده و روش طول کمان در شکل (۱۴) ترسیم و باهم مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج روش پیشنهادی و روش طول کمان تقریباً بر هم منطبق هستند. با توجه به فرم هندسی، این خرابا رفتار فروجهشی و پس جهشی دارد. منحنی تعادل نشان می‌دهد که روش پیشنهاد شده به خوبی از نقاط فروجهش و پس جهش عبور می‌کند. این نمونه کارایی و توانایی روش پیشنهاد شده در ردیابی منحنی تعادل سازه‌های پیچیده، به ویژه خراباهای با رفتار غیرخطی شامل فروجهش و پس جهش را نشان داد.

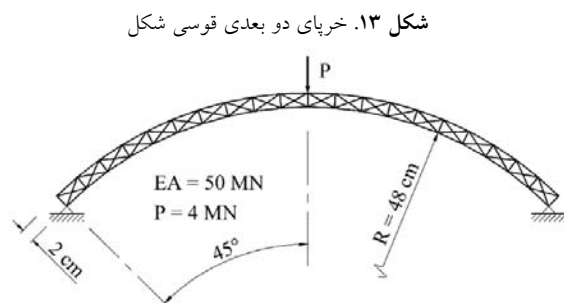


Figure 13. Two-dimensional arched truss

شکل ۱۴. منحنی نیرو-جابجایی خرابای قوسی

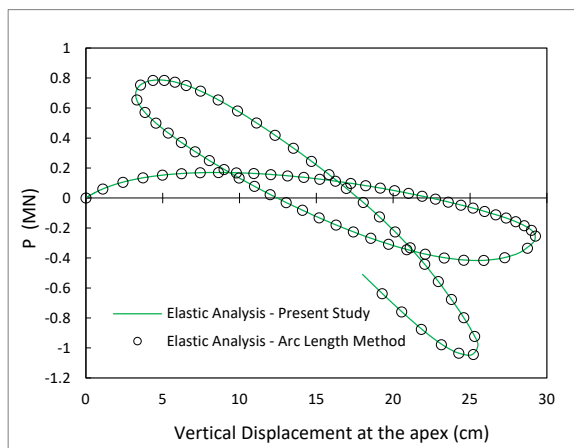


Fig. 14. Force-displacement curve for arched truss

است. مقدار بار بحرانی به دست آمده از طریق روش پیشنهادی و مرجع در هر دو حالت تحلیل الاستیک و IPB در جدول (۲) مشخص شده است. تفاوت بار بحرانی به دست آمده از طریق روش پیشنهاد شده با روش مرجع در حالت الاستیک و IPB به ترتیب ۰/۶۳۵ و ۰/۷۶۶ است.

جدول ۲. نتایج تحلیل خرابای ژئودزیک در محاسبه بار بحرانی

Analysis type	Limit load (KN)		Error (%)
	Arc-length	Present	
Elastic	3.15	3.17	0.635
IPB	2.61	2.63	0.766

Table 2. Limit point calculations for geodesic truss

شکل ۱۱. منحنی نیرو-جابجایی گره ۱ برای خرابای ژئودزیک

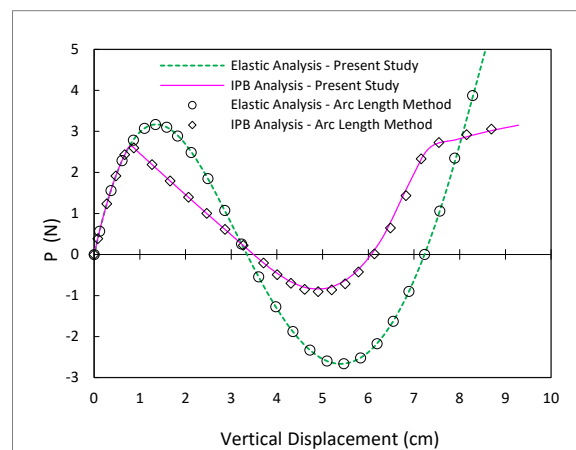


Fig. 11. Force-displacement curve for node 1 in geodesic truss

شکل ۱۲. منحنی نیرو-جابجایی گره ۲ برای خرابای ژئودزیک

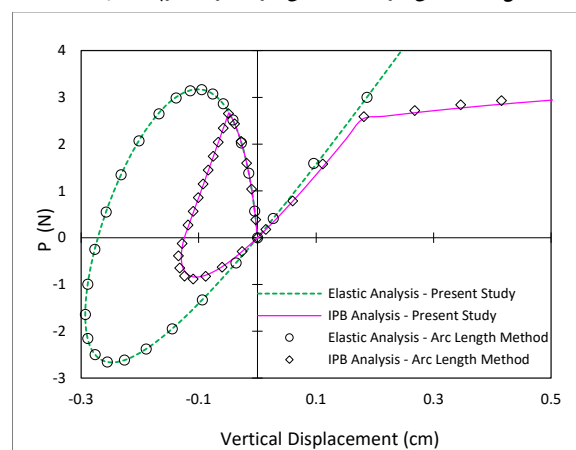


Fig. 12. Force-displacement curve for node 2 in geodesic truss

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش نموی- تکراری برای تحلیل استاتیکی غیرخطی سازه‌ها پیشنهاد شد. این روش که قادر است هر نوع سازه با هر رفتار غیرخطی را تحلیل کند، نسبت اندازه بردار نموی جابه‌جایی به اندازه بردار جابه‌جایی کل در شروع هر نموی ثابت فرض می‌شود. که در واقع این همان ایده‌ای است که روش بر مبنای آن شکل گرفته است. پس از نوشتن یک برنامه کامپیوتری بر مبنای الگوریتم روش پیشنهادی و حل مثال‌های عددی، نشان داده شد که این روش مناسب برای تقریب پاسخ غیرخطی سازه‌ها با انواع نقاط حدی است و منحنی تعادل را به خوبی ردیابی و ترسیم می‌کند. در کنار مزایای این روش، در مورد محدودیت روش پیشنهاد شده می‌توان حجم بالای محاسبات کامپیوتری و وجود پارامترهای قابل تغییر زیاد در ساختار روش را نام برد که البته این موضوع بیشتر در روش‌های نموی-تکراری وجود دارد. در این مقاله زمان تحلیل اندازه‌گیری نشد، زیرا که در اینگونه روش‌ها پارامترهای متغیر زیادی وجود دارد که با تغییر آنها می‌توان تعداد تکرارها و یا نمودهای بارگذاری را تغییر داد و باز هم منحنی تعادل را به دست آورد و به راحتی نمی‌توان سطحی از دقت را تعریف نمود. ایده پیاده شده در اینجا یک ایده جدید است و هدف توانایی آن برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها با رفتارهای پیچیده بوده است. بررسی موشکافانه‌تر این روش پیشنهاد شده از حوصله این مقاله خارج است و می‌تواند موضوع کارهای آتی باشد. لازم به ذکر است که گرچه مبنای ارزیابی روش پیشنهادی، سازه‌های با اعضای دو نیرویی دارای رفتار پس کمانشی و خرپا بودند، اما این روش‌ها می‌توانند برای تحلیل غیرخطی سایر سازه‌ها نیز به کار روند.

مراجع

- [1] P. Wriggers, "Non-linear finite element analysis of solids and structures, volume 1: Essentials, MA Crisfield, John Wiley. ISBN: 0-471-92956-5," ed: Wiley Online Library, 1994.
- [2] J. Oden, "Finite element applications in nonlinear structural analysis ",in *Proceedings of the ASCE Symposium on Application of Finite Element Methods in*
- [3] M. J. Turner, H. Martin, and R. Weikel, "Further development and applications of the stiffness method," *Matrix methods of structural analysis*, vol. 1, pp. 203-266, 1964.
- [4] J. H. Argyris, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis/progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 4. Pergamon Press, 1964.
- [5] G. A. Wempner, "Discrete approximations related to nonlinear theories of solids," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, no. 11, pp. 1581-1599, 1971.
- [6] E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *International journal of solids and structures*, vol. 15, no. 7, pp. 529-551, 1979.
- [7] M. A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"," in *Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics*: Elsevier, 1981, pp. 55-62.
- [8] E. Ramm, "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points," in *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*: Springer, 1981, pp. 63-89.
- [9] K.-J. Bathe and E. N. Dvorkin, "On the automatic solution of nonlinear finite element equations," *Computers & Structures*, vol. 17, no. 5-6, pp. 871-879, 1983.
- [10] Y.-B. Yang, *Linear and nonlinear analysis of space frames with nonuniform torsion using interactive computer graphics*. Cornell University, 1984.
- [11] S. L. Chan, "Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, no. 12, pp. 2657-2669, 1988.
- [12] H. Saffari, S. Shojaei, S. Rostami, and M. Malekinejad, "Application of cubic spline on large deformation analysis of structures," *International Journal of Steel Structures*, vol. 14, no. 1, pp. 165-172, 2014.
- [13] A. Kassimali and E. Bidhendi, "Stability of trusses under dynamic loads," *Computers &*

- Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures," 1997.
- [19] G. Ramesh and C. Krishnamoorthy, "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 37, no. 21, pp. 3633-3657, 1994.
- [20] H.-T. Thai and S.-E. Kim, "Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 65, no. 10-11, pp. 1987-1994, 2009.
- [21] G. A. Hrinda, "Geometrically nonlinear static analysis of 3D trusses using the arc-length method," *Computational Methods and Experimental Measurements XIII, Prague, Czech Republic*, pp. 243-252, 2007.
- structures*, vol. ۲۹ no. 3, pp. 381-392, 1988.
- [14] C. D. Hill, G. E. Blandford, and S. T. Wang, "Post-buckling analysis of steel space trusses," *Journal of Structural Engineering*, vol. 115, no. 4, pp. 900-919, 1989.
- [15] S. S. Tezcan and P. Krishna, "Discussion of "Numerical solution of nonlinear structures"," *Journal of the Structural Division*, vol. 94, no. 6, pp. 1613-1627, 1968.
- [16] M. Papadrakakis, "Inelastic post-buckling analysis of trusses," *Journal of Structural Engineering*, vol. 109, no. 9, pp. 2129-2147, 1983.
- [17] R. De Borst, M. A. Crisfield, J. J. Remmers, and C. V. Verhoosel, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012.
- [18] M. Crisfield, "Advanced Topics, Volume 2,

An incremental-iterative method of static nonlinear analysis to trace the equilibrium path of shallow space dome structures

Javad Mashhadi, Alireza Hajizadeh, Sobhan Rostami*

Department of Civil Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran

s-rostami@tvu.ac.ir

Abstract

Nowadays, non-linear analysis of structures has become an attractive matter and appears necessary for most structural engineering applications, whereas tendency for more accurate structural analysis has increased by many engineers. In general, nonlinear analysis is divided into two main parts: geometrical and material nonlinearity. In some cases, both nonlinear types are used simultaneously in the analysis process. In this paper, a new Incremental-iterative method for the analysis of truss structures, including both geometric and material nonlinearity behavior, is proposed. Nonlinear equilibrium equations are solved using an Incremental-iterative method based on the displacement control process. The basis of geometric nonlinear process is based on rotational formulation and material nonlinearity is based on tracing the stress-strain relationship for post-buckling behavior of the truss members. In this proposed method, it is assumed that the magnitude of the displacement increment vector to the size of the total displacement vector at the beginning of each load increment, is a fixed value. Based on this idea and thinking, the corresponding equations are written and a new formulation has been developed based on the displacement control scheme, as, by employing a specified displacement, the corresponding load will be obtained. Using fixed incremental displacement algorithm, this paper, proposed a novel method that has a possibility of passing the limit points in the case of highly nonlinear behavior state. The proposed method, is able to pass the limit points including snap-through and snap-back. Some examples are provided for the proposed method and by solving them, the efficiency of the proposed algorithm is examined. A limit point refers to the turning point for the equilibrium path of a structure, which can be further considered as the transition point from stable to unstable equilibrium states or vice versa. In analysis of such structures, the simple incremental iterative methods unable to pass this limit points. The simple incremental iterative methods couldn't trace the equilibrium path after the limit points. For resolving such disadvantages, advanced analysis methods have been developed numerical examples demonstrate the feasibility and accuracy of the proposed algorithm, to be highly suitable in predicting nonlinear response of structures with multiple limit points and snap-back points, and trace the equilibrium path accurately. The results show that the method developed in this paper, traces the equilibrium curve as well as the modified arc-length method with a small difference. In spite of the fact that the procedure herein explained is only implemented for truss structures, it is possible to generate the proposed method for other structures. This paper is organized as follows. In the first section, we will have a brief review of nonlinear analysis of trusses, including both geometric and material nonlinearity. A literature review is done and a number of available methods in this field is describe. In the second section we explained the basic concepts in nonlinear analysis. The third section geometric and material nonlinear behavior of trusses are reviewed. Section four is allocated to implementation of proposed method for nonlinear analysis. In section five, the validity of the proposed method is illustrated with some examples.

Key Words: Nonlinear analysis, incremental load, shallow space domes, equilibrium curve, displacement control, iteration method