

توسعه روش معادلات مجزا برای محاسبه فشار هیدرودینامیکی مخزن سدهای بتنی وزنی

رضا بابایی^۱، ناصر خاجی^{۲*}، محمدتقی احمدی^۳

۱- کارشناس ارشد سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استاد مهندسی زلزله، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۳- استاد سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

nkhaji@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۳/۱۲/۲۱]

تاریخ دریافت: [۹۳/۴/۲۴]

چکیده - معادله حاکم بر انتشار امواج هیدرودینامیکی در مخازن سدها به هنگام وقوع زلزله، معادله هلمهولتز است. در حل این معادله برای رسیدن به توزیع واقعی فشار هیدرودینامیکی روی بدنه سدها، لازم است شرایط مرزی مخزن منظور شود. این شرایط عبارت‌اند از: مرز مشترک مخزن و سد (به‌عنوان ناحیه‌ی آغاز تحریک مخزن)، جذب بخشی از انرژی امواج یاد شده به وسیله‌ی رسوبات کف، جذب بخش دیگری از انرژی امواج یاد شده به وسیله‌ی مرز دوردست، و تشکیل امواج سطحی در مخزن. هدف از این پژوهش، مدل‌سازی پدیده فیزیکی یاد شده با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی جدید به نام روش معادلات مجزا، در حوزه فرکانس است. در این روش فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان‌های مرتبه بالای غیرایزوپارامتریک ویژه گسسته‌سازی می‌شود. با استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالای چیبیشف به عنوان توابع نگاشت، توابع شکل ویژه، روش انتگرال‌گیری عددی کلنشا-کورتیس، و همچنین روند تولید فرم انتگرالی با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار، ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات حاکم، قطری می‌شود. به عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل حاکم برای هر درجه آزادی مستقل از سایر درجات آزادی در فضای مسئله به دست می‌آید که این امر باعث کاهش قابل توجه حجم محاسبات نسبت به سایر روش‌های عددی می‌شود. در این پژوهش برای اولین بار به‌کارگیری ابزارهای یاد شده، معادلات شرایط مرزی مخزن سد در فضای محلی روش حاضر استخراج شده و روند اعمال آنها در حل مسئله بیان می‌شود. همچنین به منظور صحت‌سنجی، توزیع فشار هیدرودینامیکی وارد بر بدنه یک سد وزنی صلب محاسبه شده که در مقایسه با حل تحلیلی موجود از دقت قابل قبولی برخوردار است.

واژگان کلیدی: روش معادلات مجزا، سد بتنی وزنی، فشار هیدرودینامیک، حوزه فرکانس، روش نیمه‌تحلیلی.

۱- مقدمه

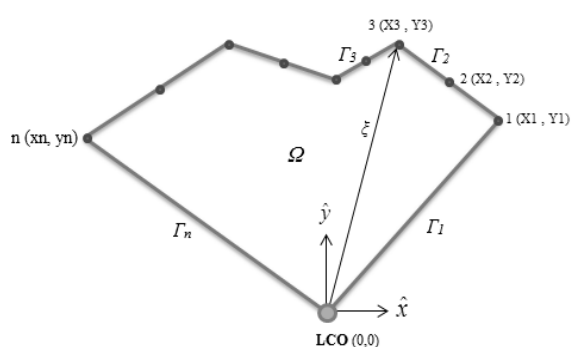
این زمینه وسترگارد برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ توزیع فشار هیدرودینامیکی روی سدهای صلب را محاسبه کرد [۱]. پس از او، چوپرا یک راه حل تحلیلی ارائه داد [۲]. هانگ با ترکیب معادله اویلر و مدل المان محدود سد، به آنالیز سد وزنی بتنی پرداخت و توزیع فشار هیدرودینامیکی وارد بر بدنه سد را تحت یک زلزله واقعی به دست آورد [۳]. احمدی و قره‌باغی روش جدیدی برای تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی تحت تاثیر مولفه‌ی افقی شتاب زمین‌لرزه ارائه کردند که اساس آن

تاکنون پژوهشگران روش‌های عددی زیادی را برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی به کار برده‌اند، که هدف بسیاری از آنها دست‌یابی به روش‌هایی بوده است که با کمترین هزینه محاسباتی، دقیق‌ترین پاسخ‌ها را در کوتاه‌ترین زمان به دست آورد. یکی از موضوعات مهمی که تاکنون با استفاده از روش‌های عددی مختلفی تحلیل شده، محاسبه توزیع فشار هیدرودینامیکی در مخازن سدها، به هنگام وقوع زلزله است. در

۲- مدل سازی دو بعدی هندسه و فیزیک مسائل

پتانسیل در روش معادلات مجزا

به منظور مدل سازی هندسه و فیزیک مسئله، ابتدا یک نقطه به عنوان مرجع مختصات محلی (Local Coordinates Origin) یا LCO انتخاب و تمام خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی می شود. لازم است در تعیین محل این نقطه در مسائل مختلف ضوابط خاصی منظور شود که در ادامه مورد بحث قرار می گیرد.



شکل (۱) مدل سازی هندسه فضای دلخواه Ω

در این روش، فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان هایی با یک بعد کم تر از بعد فضای مسئله گسسته سازی می شود. در شکل (۱) نحوه ی مدل سازی هندسه مسائل دو بعدی نشان داده شده است. با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله به دو دسته تقسیم می شود: مرزهایی که امتداد آن ها از LCO می گذرد و مرزهایی که امتداد آن ها نمی گذرد. در این روش فقط باید مرزهای نوع دوم را گسسته سازی کرد. مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله در مختصات کلی با (\hat{x}, \hat{y}) و هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با (x, y) تعیین می شود. همان طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، در دستگاه مختصات محلی از دو محور با نام های ξ و η استفاده می شود؛ محور ξ معرف محور شعاعی است که از محل LCO شروع می شود، و محور η نیز محوری مماسی است که فقط بر روی مرزها تعریف می شود.

مبتنی بر روش المان های محدود با فرمولاسیون اویلر-لاگرانژ است، و در آن شرایط مرزی مناسبی برای مدل کردن پدیده انتشار امواج از مرز بالادست مخزن و انکسار در کف مخزن در نظر گرفته شده است [۴]. بسکز روش المان مرزی را برای تحلیل مسائل الاستودینامیک مختلفی به کار برد که محاسبه فشار هیدرودینامیکی وارد بر بدنه سد، یکی از موارد مطالعه ی وی بود [۵]. لی و همکاران از روش المان مرزی-محدود مقیاس-شده برای آنالیز لرزه ای سیستم سد و مخزن استفاده کرده اند. ایشان اثر جذب امواج در کف مخزن را بررسی کرده و هندسه های مختلفی از سدهای وزنی را مورد مطالعه قرار داده اند [۶]. لین و همکاران با استفاده از چارچوب روش المان مرزی-محدود مقیاس شده به تحلیل اندرکنش سد و مخزن پرداختند [۷]. ظهیری یگانه معادله دوبعدی حاکم بر انتشار امواج هیدرودینامیک در مخزن سد (معادله هلمهولتز) را بر اساس مبانی روش معادلات مجزا حل نمود [۸]؛ ولی در حل ایشان شرایط مرزی مخزن سد به طور مستقیم لحاظ نشد.

در سال ۲۰۱۱، روش معادلات مجزا به وسیله ی خداکرمی و حاجی به عنوان یک روش نیمه تحلیلی توسعه داده شد [۹]. این روش از روش جدید المان مرزی-محدود مقیاس شده که به شکل هم زمان از ویژگی های مثبت روش های المان محدود و المان مرزی بهره می برد، گرفته شده و با ایجاد ویژگی های جدید توانسته است مسائل متنوعی از مکانیک محیط های پیوسته را با دقت بالا و صرف هزینه های کمتر نسبت به سایر روش ها حل نماید [۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳].

در این پژوهش، برای اولین بار، معادلات شرایط مرزی مخزن سد در دستگاه مختصات محلی روش معادلات مجزا استخراج و نحوه ی اعمال مستقیم آنها در حل معادله هلمهولتز ارائه می شود تا پدیده انتشار امواج از مرز دوردست مخزن، انکسار در کف مخزن، امواج سطحی، و شرط مرزی بین سد و مخزن به طور دقیق مدل سازی شود. در پایان هم توانایی و دقت روش حاضر با ارائه مثالی از توزیع فشار هیدرودینامیکی بر روی یک سد وزنی صلب در مقایسه با حل تحلیلی موجود سنجیده می شود.

$$d\Omega = d\bar{x} d\bar{y} = \xi |J(\eta)| d\xi d\eta \quad (6)$$

و در آن $J(\eta)$ ماتریس ژاکوبین انتقال روی مرزها است:

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

همچنین برای رابطه‌ی بین مشتق‌ها در دو دستگاه مختصات کلی و محلی، داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \end{Bmatrix} = \{b^1(\eta)\} \frac{\partial}{\partial \xi} + \{b^2(\eta)\} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (8)$$

در این رابطه:

$$\{b^1(\eta)\} = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{Bmatrix} y_{,\eta}(\eta) \\ -x_{,\eta}(\eta) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

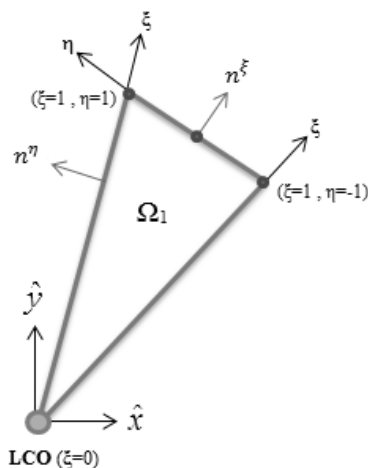
$$\{b^2(\eta)\} = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

بردار نرمال عمود بر سطح برای دو امتداد ξ و η (یعنی $\{n^\xi(\eta)\}$ و $\{n^\eta(\eta)\}$) را با استفاده از روابط (۲) و (۳) می‌توان به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) در نظر گرفت:

$$\{n^\xi(\eta)\} = \frac{1}{\left\| \begin{Bmatrix} y_{,\eta}(\eta) \\ -x_{,\eta}(\eta) \end{Bmatrix} \right\|} \begin{Bmatrix} y_{,\eta}(\eta) \\ -x_{,\eta}(\eta) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\{n^\eta(\eta)\} = \frac{1}{\left\| \begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix} \right\|} \begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

برای مدل‌سازی فیزیک مسئله از توابع شکل با ویژگی‌های خاصی استفاده می‌شود که در حالت کلی با $[N]$ نشان داده می‌شوند و یکی از عوامل مهم در قطری‌سازی ماتریس‌های ضرایب است. درونیابی خواص فیزیکی مسئله روی مرزها با استفاده از این توابع شکل انجام می‌گیرد که دارای دو ویژگی مهم است؛ یکی اینکه دارای خاصیت دلتای کرونیگر در نقاط گرهی المان‌ها، و دیگری این‌که مشتق اول آن‌ها نسبت به محورهای محلی مماسی در تمام گره‌ها برابر صفر است. این توابع برای یک المان $n_n + 1$ گرهی، یک چندجمله‌ای از مرتبه $2n_n + 1$ به صورت رابطه (۱۳) ماست که دارای $2n_n + 1$ پارامتر مجهول است، و این پارامترها با استفاده از ویژگی‌های بیان



شکل (۲) زیرحوزه دلخواه Ω_1 از فضای Ω

محدوده تغییرات محور مماسی بین -1 تا $+1$ است اما تغییرات محور شعاعی برای مسایل محدود بین صفر (در LCO) و یک (روی مرزها) است، و برای مسایل نیم‌نامحدود بین یک تا بینهایت در نظر گرفته می‌شود. برای انتقال هندسه از مختصات کلی به مختصات محلی، از توابع نگاشت که از نوع چندجمله‌ای‌های مرتبه بالای چبیشیف است، به شکل زیر استفاده می‌شود [۱۴].

$$\phi_i(\eta) = \frac{2}{n_\eta} \sum_{n=0}^{n_\eta} \frac{1}{c_{(i-1)} c_n} T_n(\eta_{(i-1)}) T_n(\eta) \quad (1)$$

که در آن، $T_n(\eta)$ چندجمله‌ای چبیشیف نوع اول از مرتبه n است. برای مقادیر $0 < n < n_\eta$ مقدار $c_n = 1$ و برای $n = 0, n_\eta$ مقدار $c_n = 2$ است؛ بنابراین، توابع نگاشت پیشنهادی دارای خاصیت دلتای کرونیگر در هر یک از نقاط کنترل (که همان نقاط گرهی هستند) است. مختصات هر نقطه از مسئله با استفاده از این توابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{x}(\xi, \eta) = \xi x(\eta) = \xi [\Phi(\eta)]\{x\} \quad (2)$$

$$\hat{y}(\xi, \eta) = \xi y(\eta) = \xi [\Phi(\eta)]\{y\} \quad (3)$$

با قرار دادن $\xi = 1$ در این روابط، مختصات هر نقطه روی مرز مسئله به دست می‌آید:

$$x(\eta) = [\Phi(\eta)]\{x\} \quad (4)$$

$$y(\eta) = [\Phi(\eta)]\{y\} \quad (5)$$

رابطه‌ی بین جزء سطح المان در مختصات کلی ($d\bar{x} d\bar{y}$) و مختصات محلی ($d\xi d\eta$) نیز به صورت زیر است:

شده، تعیین می‌شود.

(الف) شرط مرزی بالادست (دوردست) مخزن (S1): با ارتعاش سد امواج فشار هیدرودینامیک در مخزن ایجاد شده و به سمت بالادست منتشر می‌شوند و با انتشار خود، انرژی را از محیط دور می‌کنند. اگر فرض کنیم مخزن تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد در این صورت در مرز بالادست تنها موج پیشرو خواهیم داشت. به این منظور برای شرط مرزی بالا دست مخزن در حوزه‌ی فرکانس و بر حسب تابع پتانسیل رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{c} \varphi \quad (18)$$

که در آن، n بردار نرمال عمود بر مرز و $i = \sqrt{-1}$ است. تعبیر فیزیکی رابطه (18) این است که در مرز بالادست مخزن یک گروه مستهلک کننده‌ی امواج فشاری قرار دارد.

(ب) شرط مرزی کف مخزن (S2): فرض می‌شود که کف مخزن افقی و صلب باشد. وجود لایه‌هایی از مواد رسوبی که به مرور زمان در کف مخزن انباشته شده‌اند، می‌توانند نقش عمده‌ای در جذب انرژی سیستم از طریق انکسار امواج فشاری به داخل پی داشته باشد. اگر از مؤلفه‌ی قائم شتاب زمین چشم‌پوشی کنیم و تنها مؤلفه‌ی افقی زمین مدنظر باشد، رابطه‌ی زیر به عنوان شرط مرزی کف مخزن در حوزه‌ی فرکانس بر حسب تابع پتانسیل در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{\beta c} \varphi \quad (19)$$

در این رابطه β نسبت امپدانس اکوستیکی محیط پی به محیط سیال است.

(پ) شرط مرزی بین سد و مخزن (S3): شرط مرزی سینماتیکی در مرز بین سد و مخزن در حوزه‌ی فرکانس بر حسب تابع پتانسیل به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} \quad (20)$$

که در آن \hat{a}_{ns} دامنه‌ی شتاب عمود بر وجه بالادست سد در اثر تحریک هارمونیک پایه با فرکانس ω است. تعبیر فیزیکی رابطه (20) این است که سرعت نرمال سیال و سد در مرز مشترک

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_\eta+1} a_m \eta^m \quad (13)$$

در مسائل پتانسیل، تابع پتانسیل (φ) در هر نقطه (ξ, η) از فضای مسئله با درونیابی مقادیر گرهی آن و با استفاده از تابع شکل $N(\eta)$ به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\{\varphi(\xi, \eta)\} = [N(\eta)]\{\varphi(\xi)\} \quad (14)$$

با تعریف بردار شار بر حسب تابع پتانسیل (q) یعنی:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

و با توجه به رابطه (8)، و اینکه مشتق توابع شکل در نقاط گرهی صفر می‌باشد، خواهیم داشت:

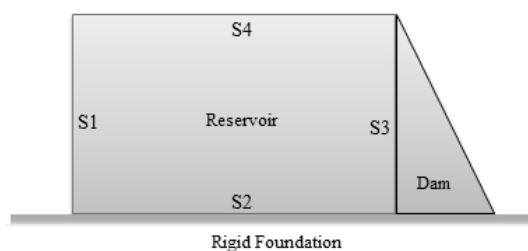
$$\{q(\xi, \eta)\} = \{b^1(\eta)\} [N(\eta)]\{\varphi(\xi)\} \quad (16)$$

۳- معادله حاکم و شرایط مرزی

معادله حاکم بر انتشار امواج هیدرودینامیک در مخازن سدها، معادله هلمهولتز است. این معادله برای یک حرکت هارمونیک سد در حوزه‌ی فرکانس و بر حسب تابع پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود [15].

$$\nabla^2 \varphi + K^2 \varphi = 0 \quad (17)$$

در این رابطه ∇^2 عملگر لاپلاس و K عدد موج است که به صورت نسبت فرکانس حرکت هارمونیک بر سرعت امواج صوتی در محیط سیال ($\kappa = \frac{\omega}{c}$) تعریف می‌شود. مطابق شکل (3) چهار شرط مرزی در مخزن سد وجود دارد که در ادامه به طور جداگانه بیان می‌شود [15].



شکل (3) شرایط مرزی مخزن سد با پی صلب

$$C_{ij}^1 = 2\delta_{ij} w_i [b^1(\eta)N(\eta)]^T \{b^1(\eta)\} [N(\eta)] |J(\eta_i)| \quad (24)$$

$$C_{ij}^2 = 2\delta_{ij} w_i [b^2(\eta)N(\eta)]^T \{b^1(\eta), \eta\} [N(\eta)] |J(\eta_i)| \quad (25)$$

$$C_{ij}^3 = 2\delta_{ij} w_i K^2 [N(\eta_i)]^T [N(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (26)$$

$$C_{ij}^4 = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T Q |J(\eta_i)| \quad (27)$$

در این روابط، δ_{ij} دلتای کرونیکر و Q تغییرات شار در واحد حجم است.

همانگونه که ملاحظه می‌شود معادله حاکم بر هر درجه آزادی در امتداد محورهای شعاعی که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از نوع بسل غیرهمگن است، به صورت مجزا از سایر درجات آزادی به دست می‌آید. پاسخ این معادله دیفرانسیل برای هر درجه آزادی با استفاده از رابطه تحلیلی زیر به دست می‌آید [۸ و ۱۰]:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi) = & (A_i \cdot \xi)^{\frac{C_{ii}^1 - C_{ii}^2}{2C_{ii}^1}} J\left(\frac{C_{ii}^1 - C_{ii}^2}{2C_{ii}^1}, \left(\frac{C_{ii}^3}{C_{ii}^1}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right) + \\ & (B_i \cdot \xi)^{\frac{C_{ii}^1 - C_{ii}^2}{2C_{ii}^1}} Y\left(\frac{C_{ii}^1 - C_{ii}^2}{2C_{ii}^1}, \left(\frac{C_{ii}^3}{C_{ii}^1}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right) - \frac{C_{ii}^4}{C_{ii}^3} \end{aligned} \quad (28)$$

که در این رابطه A و B ضرایب ثابتی هستند که با اعمال صحیح شرایط مرزی برای هر درجه آزادی در راستای محورهای شعاعی به دست می‌آیند.

۵- استخراج معادلات مرزی مخزن سد در روش معادلات مجزا

در این روش، انتخاب محل مبدأ مختصات محلی (LCO)، مبدأ مختصات کلی، و هندسه مخزن سد، در استخراج معادلات شرایط مرزی مخزن سد در فضای محلی، برای اعمال مستقیم آنها در حل مسئله تاثیرگذار هستند. در ادامه با در نظر گرفتن این موارد مطابق شکل (۴)، معادلات حاکم بر تغییرات فشار هیدرودینامیک در مرزهای مخزن سدها، به صورت دو بعدی، در فضای روش معادلات مجزا استخراج می‌شوند.

آنها یکسان است.

(ت) شرط مرزی سطح آزاد مخزن (S4): تحت ارتعاش سد در سطح مخزن امواجی به وجود می‌آید که سطح مخزن را متلاطم می‌سازد. با فرض جریان غیرچرخشی و فشار صفر در سطح مخزن و نیز با چشم‌پوشی کردن از مولفه‌ی افقی سرعت سیال در سطح مخزن و تأثیر فشار هیدرواستاتیک، شرط مرزی سطح آزاد مخزن در حوزه‌ی فرکانس بر حسب تابع پتانسیل سرعت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\omega^2}{g} \varphi \quad (21)$$

در این رابطه g شتاب کرانش زمین بر حسب متر بر مجذور ثانیه است.

۴- دستگاه معادلات حاکم در فضای روش معادلات مجزا

دستگاه معادلات حاکم با استفاده از فرم انتگرالی معادله حاکم (رابطه (۱۷)) بر اساس روش باقیمانده‌های وزن‌دار، توابع شکل و نگاشت بیان شده در بخش ۲ و بکارگیری روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس به صورت قطری شده‌ی زیر به دست آمده است [۸ و ۱۰].

$$\xi [C_{ii}^1] \varphi_{i,\xi\xi\xi} + [C_{ii}^2] \varphi_{i,\xi} + \xi [C_{ii}^3] \varphi_i + \xi [C_i^4] = 0 \quad (22)$$

یا

$$\begin{aligned} & \xi \begin{bmatrix} C_{11}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix}_{,\xi\xi\xi} + \begin{bmatrix} C_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix}_{,\xi} \\ & + \xi \begin{bmatrix} C_{11}^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22}^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{nn}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} C_1^4 \\ C_2^4 \\ \vdots \\ C_n^4 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

ماتریس‌ها و بردار ضرایب موجود در رابطه اخیر از روابط زیر قابل محاسبه هستند.

از آنجایی که

$$\{\varphi(\xi, \eta)\} = [N(\eta)]\{\varphi(\xi)\} \quad (34)$$

$$\{w(\xi, \eta)\} = \{w(\xi)\}^T [N(\eta)]^T \quad (35)$$

با توجه به رابطه (33) و اینکه مشتق تابع شکل نسبت به محور مماسی برابر صفر است، داریم:

$$\int_{\Omega_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega_1 = \quad (36)$$

$$\int_{\Omega_1} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_1$$

با توجه به روابط (34) و (35)، جمله‌ی دوم رابطه (31) برابر خواهد شد با:

$$\int_{\Omega_1} w \frac{i\omega}{c} \varphi d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) d\Omega_1 \quad (37)$$

از ترکیب روابط (31)، (36) و (37) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega_1} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_1 + \quad (38)$$

$$\int_{\Omega_1} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) d\Omega_1 = 0$$

با توجه به رابطه‌های (6)، (7) و (38) و محل LCO که در مرز دور دست $\xi = 1$ است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) |j(\eta)| d\eta + \\ & \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) |j(\eta)| d\eta = 0 \end{aligned} \right\}_{\xi=1} \quad (39)$$

با تعریف ماتریس ضرایب:

$$[E^1] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] |j(\eta)| d\eta \quad (40)$$

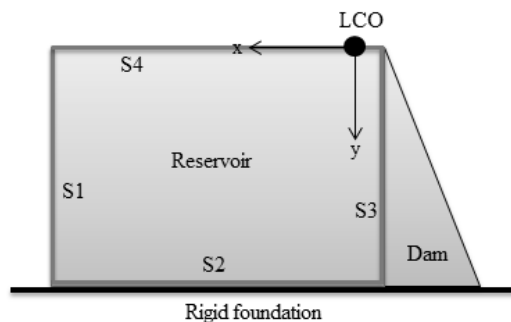
$$[E^2] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T \frac{i\omega}{c} [N(\eta)] |j(\eta)| d\eta \quad (41)$$

رابطه (39) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\{[E^1] \varphi(\xi), \xi + [E^2] \varphi(\xi) = 0\}_{\xi=1} \quad (42)$$

به کمک روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس [16] ضرایب رابطه (42) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$E_{ij}^1 = 2 \delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T b^{1x}(\eta_i) [N(\eta_i)] |j(\eta_i)| \quad (43)$$



شکل (4) هندسه مخزن، محل مبدا مختصات محلی و کلی

5-1- شرط مرزی دور دست مخزن (S1)

با انتخاب مبدا محوره‌های مختصات کلی و محلی (بر روی مرز بالادست مخزن و نه در گوشه‌ها) مطابق شکل (4) و قائم فرض کردن مرز دور دست مخزن، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (29)$$

از ترکیب روابط (18)، (29) و (30) برای شرط مرزی دور دست مخزن به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{i\omega}{c} \varphi = 0 \quad (30)$$

با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن دار (یعنی با ضرب نمودن طرفین این رابطه در بردار تغییرمکان دلخواه w و انتگرال‌گیری از آن)، فرم انتگرالی معادله مرز دور دست مخزن (رابطه (30)) به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{\Omega_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega_1 - \int_{\Omega_1} w \frac{i\omega}{c} \varphi d\Omega_1 = 0 \quad (31)$$

که در آن Ω_1 ناحیه واقع بر مرز دور دست است.

واضح است که شکل دیگر رابطه (8) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{aligned} \right\} = \begin{Bmatrix} b^{1x}(\eta) \\ b^{1y}(\eta) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{Bmatrix} b^{2x}(\eta) \\ b^{2y}(\eta) \end{Bmatrix} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (32)$$

جمله‌ی اول رابطه (31) با توجه به رابطه (32) به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{\Omega_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} w (b^{1x}(\eta) \varphi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} b^{2x}(\eta) (\varphi)_{,\eta} d\Omega_1 \quad (33)$$

با توجه به روابط (۳۴) و (۳۵) جمله‌ی دوم رابطه (۴۸) برابر خواهد شد با:

$$\int_{\Omega_2} w \frac{i\omega}{\beta c} \varphi d\Omega_2 = \quad (51)$$

$$\int_{\Omega_2} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{\beta c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) d\Omega_2$$

از ترکیب روابط (۴۸)، (۵۰) و (۵۱) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega_2} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1y}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_2 + \quad (52)$$

$$\int_{\Omega_2} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{\beta c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) d\Omega_2 = 0$$

با توجه به رابطه‌های (۶)، (۷) و (۵۲) و محل LCO که در مرز کف مخزن $\xi = 1$ است، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T b^{1y}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) |j(\eta)| d\eta + \\ \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T \frac{i\omega}{\beta c} [N(\eta)] \varphi(\xi)) |j(\eta)| d\eta = 0 \end{array} \right\}_{\xi=1} \quad (53)$$

با تعریف ماتریس ضرایب:

$$[E^3] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T b^{1y}(\eta) [N(\eta)] |j(\eta)| d\eta \quad (54)$$

$$[E^4] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T \frac{i\omega}{\beta c} [N(\eta)] |j(\eta)| d\eta \quad (55)$$

رابطه (۳۹) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\{[E^3] \varphi(\xi), \xi + [E^4] \varphi(\xi) = 0\}_{\xi=1} \quad (56)$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس ضرایب معادله (۵۶) مانند روابط (۵۷) و (۵۸) به دست می‌آیند.

$$E_{ij}^3 = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T b^{1y}(\eta_i) [N(\eta_i)] |j(\eta_i)| \quad (57)$$

$$E_{ij}^4 = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \frac{i\omega}{\beta c} [N(\eta_i)] |j(\eta_i)| \quad (58)$$

بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه‌ی (۵۶) را می‌توان به ازای هر درجه آزادی i بر روی مرز کف مخزن به صورت غیردرگیر زیر نوشت:

$$[E_{ii}^3 \varphi_i(\xi), \xi + E_{ii}^4 \varphi_i(\xi) = 0]_{\xi=1} \quad (59)$$

$$E_{ij}^2 = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \frac{i\omega}{c} [N(\eta_i)] |j(\eta_i)| \quad (44)$$

بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه‌ی (۴۲) را می‌توان به ازای هر درجه آزادی i بر روی مرز دور دست مخزن به صورت غیردرگیر زیر نوشت:

$$[E_{ii}^1 \varphi_i(\xi), \xi + E_{ii}^2 \varphi_i(\xi) = 0]_{\xi=1} \quad (45)$$

رابطه‌ی (۴۵) شرط مرزی برای هر درجه‌ی آزادی i واقع بر مرز دور دست مخزن سد به صورت مجزا از سایر درجات آزادی، در روش معادلات مجزا (با توجه به شکل (۴)) است.

۵-۲- شرط مرزی کف مخزن (S2)

با توجه به انتخاب محورهای مختصات کلی در شکل (۴) و افقی فرض کردن کف مخزن داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (46)$$

از روابط (۱۹) و (۴۶) رابطه زیر برای شرط مرزی کف مخزن به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{i\omega}{\beta c} \varphi = 0 \quad (47)$$

با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن دار، فرم انتگرالی معادله (۴۷) به صورت زیر خواهد بود که در آن ناحیه واقع بر مرز کف مخزن است.

$$\int_{\Omega_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} w \frac{i\omega}{\beta c} \varphi d\Omega_2 = 0 \quad (48)$$

جمله‌ی اول رابطه فوق با توجه به رابطه‌ی (۳۲) به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{\Omega_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} w (b^{1y}(\eta) \varphi), \xi + \frac{1}{\xi} b^{2y}(\eta) \varphi, \eta) d\Omega_2 \quad (49)$$

با توجه به روابط (۳۴)، (۳۵) و (۴۹)، و اینکه مشتق تابع شکل نسبت به محور مماسی برابر صفر است داریم:

$$\int_{\Omega_2} w \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega_2 = \quad (50)$$

$$\int_{\Omega_2} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1y}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_2$$

۳-۵- شرط مرزی بین سد و مخزن (S3)

با توجه به انتخاب محورهای مختصات کلی مطابق شکل

(۴) و قائم فرض کردن وجه بالادست سد، می توان گفت:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (60)$$

از روابط (۲۰) و (۶۰) رابطه زیر برای شرط مرزی مشترک سد و مخزن به دست می آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} = 0 \quad (61)$$

با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن دار، فرم انتگرالی معادله (۶۱) به صورت زیر خواهد بود که در آن Ω_3 ناحیه واقع بر مرز روی مرز سد و مخزن است.

$$\int_{\Omega_3} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega_3 - \int_{\Omega_3} w \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} d\Omega_3 = 0 \quad (62)$$

جمله اول این رابطه مانند جمله اول رابطه (۳۱) به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\int_{\Omega_3} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega_3 = \int_{\Omega_3} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_3 \quad (63)$$

با توجه به روابط (۳۴) و (۳۵)، جمله‌ی دوم رابطه (۶۲) برابر خواهد شد با:

$$\int_{\Omega_3} w \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} d\Omega_3 = \int_{\Omega_3} \{w(\xi)\}^T [N(\eta)]^T \frac{1}{i\omega} \hat{a}_{ns} d\Omega_3 \quad (64)$$

در این رابطه، \hat{a}_{ns} شتاب عمود بر سطح سد برای هر درجه آزادی واقع بر آن (در حوزه‌ی فرکانس) است؛ و اگر سد صلب باشد مقادیر شتاب عمود بر سطح سد قائم برابر با شتاب افقی زمین خواهد بود. از ترکیب روابط (۶۲) تا (۶۴) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega_3} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) d\Omega_3 \quad (65)$$

$$- \int_{\Omega_3} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{1}{i\omega} \hat{a}_{ns}) d\Omega_3 = 0$$

با توجه به رابطه‌های (۶)، (۷) و (۶۵) و محل LCO که در مرز مشترک سد و مخزن $\xi = 1$ است، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T b^{1x}(\eta) [N(\eta)] \varphi(\xi), \xi) |j(\eta)| d\eta - \\ [N(\eta)]^T \frac{1}{i\omega} \hat{a}_{ns} |j(\eta)| d\eta = 0 \end{array} \right\}_{\xi=1} \quad (66)$$

با تعریف ماتریس:

$$[E^5] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T \frac{1}{i\omega} \hat{a}_{ns} |j(\eta)| d\eta \quad (67)$$

و رابطه (۴۰)، رابطه (۶۶) به شکل زیر بازنویسی می شود.

$$\{[E^1] \varphi(\xi), \xi - [E^5] = 0\}_{\xi=1} \quad (68)$$

با روش انتگرال گیری کلنشا-کورتیس، ماتریس‌های ضرایب معادله (۶۸) به صورت روابط (۴۳) و (۶۹) ارائه شده‌اند.

$$E_{ij}^5 = 2 \delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \frac{1}{i\omega} \hat{a}_{ns} |j(\eta_i)| \quad (69)$$

بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه (۶۸) را می توان به ازای هر درجه آزادی i بر روی مرز بین سد و مخزن به صورت غیردرگیر زیر نوشت:

$$[E_{ii}^1 \varphi_i(\xi), \xi + E_{ii}^5 = 0]_{\xi=1} \quad (70)$$

۳-۵- شرط مرزی سطح آزاد مخزن (S4)

با توجه به انتخاب محورهای مختصات کلی در شکل (۴)

و افقی فرض کردن سطح آزاد مخزن داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (71)$$

از روابط (۲۱) و (۷۱) رابطه زیر برای شرط مرزی سطح مخزن به دست می آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (72)$$

با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن دار، فرم انتگرالی معادله (۷۲) به صورت زیر خواهد بود که در آن Ω_4 ناحیه واقع بر مرز سطح آزاد مخزن است.

$$\int_{\Omega_4} w \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega_4 + \int_{\Omega_4} w \frac{\omega^2}{g} \varphi d\Omega_4 = 0 \quad (73)$$

جمله‌ی اول این رابطه مانند جمله‌ی اول رابطه (۴۸) به رابطه زیر (در مختصات محلی) تبدیل می‌شود.

$$\int_{\Omega_4} w \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega_4 = \quad (74)$$

$$\int_{\Omega_4} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T b^{1y}(\eta)[N(\eta)]\varphi(\xi), \xi) d\Omega_4$$

با توجه به روابط (۳۴) و (۳۵) جمله‌ی دوم رابطه (۷۳) برابر خواهد شد با:

$$(75)$$

$$\int_{\Omega_4} w \frac{\omega^2}{g} \varphi d\Omega_4 =$$

$$\int_{\Omega_4} \{w(\xi)\}^T ([N(\eta)]^T \frac{\omega^2}{g} [N(\eta)]\varphi(\xi)) d\Omega_4$$

از ترکیب سه رابطه فوق و اینکه LCO روی سطح مخزن است ($\xi = 0$)، نتیجه می‌شود:

$$\left[\int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T b^{1y}(\eta)[N(\eta)]\varphi(\xi), \xi) |j(\eta)| d\eta + \int_{-1}^1 ([N(\eta)]^T \frac{\omega^2}{g} [N(\eta)]\varphi(\xi)) |j(\eta)| d\eta = 0 \right]_{\xi=0} \quad (76)$$

با تعریف ماتریس:

$$[E^6] = \int_{-1}^1 [N(\eta)]^T \frac{\omega^2}{g} [N(\eta)] |j(\eta)| d\eta \quad (77)$$

و رابطه (۵۴)، رابطه (۷۶) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\{[E^3]\varphi(\xi), \xi + [E^6]\varphi(\xi) = 0\}_{\xi=0} \quad (78)$$

با روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس، ماتریس‌های ضرایب در معادله فوق، به صورت روابط (۵۷) و (۷۹) ارائه شده‌اند.

$$E_{ij}^6 = 2 \delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \frac{\omega^2}{g} [N(\eta_i)] |j(\eta_i)| \quad (79)$$

بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه (۷۸) را می‌توان به ازای هر درجه آزادی i بر روی مرز سطح آزاد مخزن به صورت غیردرگیر زیر نوشت:

$$[E_{ii}^3 \varphi_i(\xi), \xi + E_{ii}^6 \varphi_i(\xi) = 0]_{\xi=0} \quad (80)$$

۶- اعمال مستقیم شرایط مرزی مخزن سد در

حل معادله هلمهولتز

اعمال مستقیم شرایط مرزی مخزن سد در حل معادله حاکم بر آن از طریق تعیین ضرایب ثابت A و B در رابطه (۲۸)، با استفاده از معادلات شرایط مرزی مستخرج در بخش قبل میسر می‌شود. دو شرط مرزی در ابتدا ($\xi = 0$) و انتهای ($\xi = 1$) محورهای ξ وجود دارد، که با توجه به انتخاب محل LCO معادله‌ی کمکی (۸۰) برای اعمال شرط $\xi = 0$ برای همه‌ی درجات آزادی و معادلات کمکی (۴۵)، (۵۹) و (۷۰) نیز به- ترتیب برای درجات آزادی واقع بر مرزهای دوردست، کف و مشترک با سد استفاده می‌شوند. به بیان دیگر، برای معادله حاکم بر هر درجه آزادی دو معادله کمکی مرزی نیز وجود دارد تا ضرایب ثابت آن معلوم شوند (یعنی شرایط مرزی در قالب این معادلات کمکی به طور مستقیم در حل مسئله وارد می‌شوند).

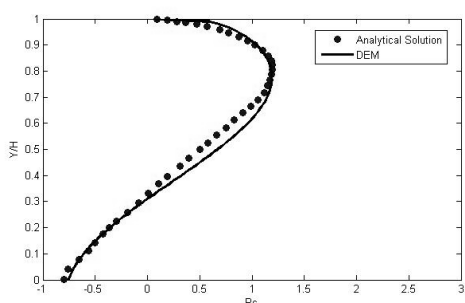
۷- مثال عددی

در این پژوهش، از مطالعات ناکاگوا [۱۷] به عنوان ملاکی برای سنجش دقت روش معادلات مجزا استفاده شده است. ناکاگوا به روش تحلیلی پاسخ فشار هیدرودینامیک مخزن با کف افقی صلب را تحت ارتعاشات هارمونیک سد صلب با وجه بالادست قائم به دست آورد، و منحنی‌های توزیع فشار هیدرودینامیک را بر وجه بالادست سد صلبی به ارتفاع ۱۰۰ متر، تحت ارتعاشات هارمونیک با پریودهای (T) مختلف، در دو حالت زیر محاسبه کرد:

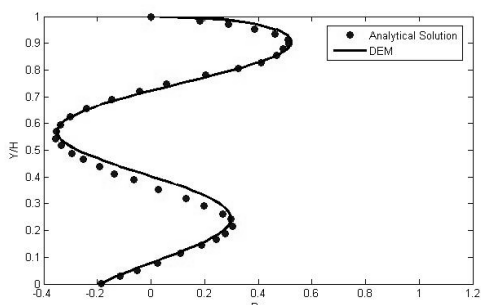
(الف) کف مخزن از سنگ یکپارچه و سالمی تشکیل شده باشد و نسبت امپدانس آکوستیکی سنگ کف به امپدانس آکوستیکی آب (β) مساوی ۵ باشد.

(ب) کف مخزن به مرور زمان از لایه‌های مواد رسوبی انباشته شده باشد و نسبت امپدانس آکوستیکی کف به امپدانس آکوستیکی آب (β) مساوی ۱ باشد.

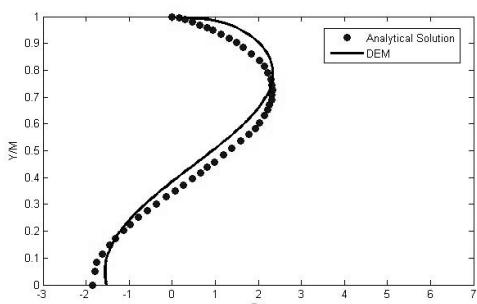
شکل (۵) هندسه سد را در مختصات کلی نشان می‌دهد. در این شکل ضریب طولی مخزن (f) برابر ۵ انتخاب شده است.



شکل (۸) حالت $T=0.1$ و $\beta=1$

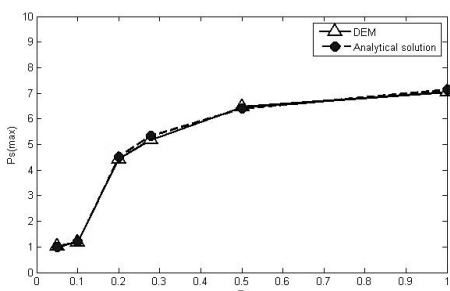


شکل (۹) حالت $T=0.05$ و $\beta=5$



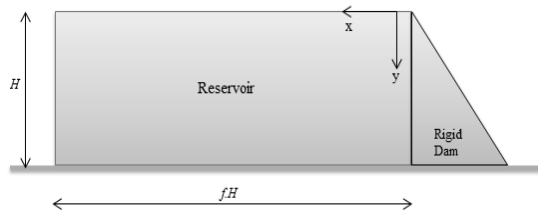
شکل (۱۰) حالت $T=0.1$ و $\beta=5$

در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نیز توزیع بیشینه قسمت حقیقی فشار هیدرودینامیک ($Ps(max)$) بر بدنه‌ی قائم سد صلب یکصد متری بر حسب پرپوذهای (T) مختلف بارگذاری آورده شده است.



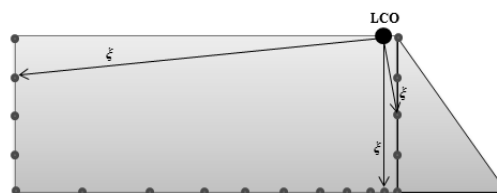
شکل (۱۱) بیشینه قسمت حقیقی فشار هیدرودینامیک

در حالت $\beta=1$ ($Ps(max)$)



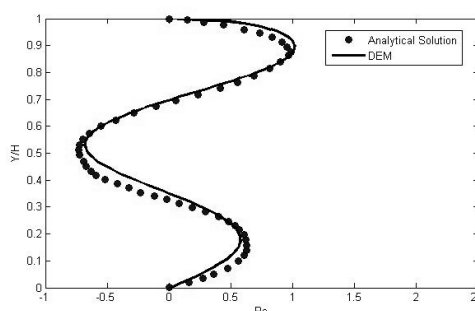
شکل (۵) هندسه مثال عددی سد و مخزن در مختصات کلی

برای گسسته‌سازی مخزن از ۱۰ المان سه‌گره‌ی ۱۰ متری یکنواخت در مرز دور دست، ۲۰ المان سه‌گره‌ی غیریکنواخت (با کمترین طول ۰/۸ و بزرگترین طول ۵۰ متر در کف مخزن) و ۱۰ المان سه‌گره‌ی ۱۰ متری یکنواخت بر مرز روی سد استفاده شده است، که آرایش شماتیک آنها و نیز محل LCO در شکل (۶) نشان داده شده است.



شکل (۶) گسسته‌سازی مرزهای مثال عددی و محل LCO

لازم به گفتن است که در نمونه‌های حل‌شده، دامنه‌ی شتاب افقی هارمونیک زمین، واحد در نظر گرفته شده است. خروجی‌های برنامه کامپیوتری تدوین شده از حل نمونه یاد شده در شکل‌های (۷) تا (۱۰) آورده شده است. در این شکل‌ها محور قائم و افقی ارتفاع نرمال شده‌ی سد بر حسب ارتفاع کل (یعنی $\frac{Y}{H}$) و توزیع قسمت حقیقی فشار هیدرودینامیک (P) نرمال شده مخزن بر روی بدنه‌ی سد را نشان می‌دهد که γ وزن مخصوص آب است.

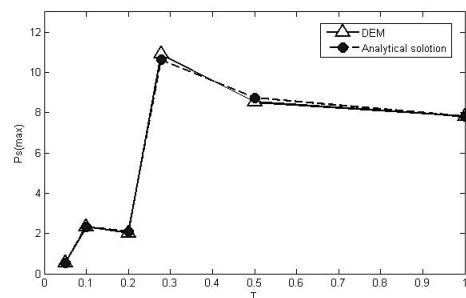


شکل (۷) حالت $T=0.05$ و $\beta=1$

مدل‌سازی موردنظر از توانایی و دقت قابل قبولی برخوردار است.

۹- مراجع

- [1] Westergaard; H.M. "Water pressures on dams during earthquakes"; ASCE; 98, 1933, 418-432.
- [2] Chopra; A.K. "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes"; Journal of Engineering Mechanics; 93, 1967, 205-223.
- [3] Hung; T.K; and Wang; M.H. "Nonlinear hydrodynamic pressure on rigid dam motion." Journal of Engineering Mechanics; 113, 1987, 482-499.
- [4] احمدی؛ محمدتقی؛ قره‌باغی؛ بهرام. "تحلیل اندرکنش دینامیکی سد و مخزن به روش اویلر-لاگرانژ؛" پروژه‌ی تحقیقاتی شماره ۱۱۴ موسسه‌ی بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ۱۹۹۳.
- [5] Beskos; D.E. "Boundary element methods in dynamic analysis"; Applied Mechanics Reviews; 40, 1987, 1-23.
- [6] Li; S.M; Liang; H; and Li; A.M. "A semi-analytical solution for characteristics of a dam-reservoir system with absorptive reservoir bottom"; Journal of Hydrodynamics; 20, 2008, 727-734.
- [7] Lin; G; Wang; Y; and Hu; Z. "An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam-reservoir systems"; Earthquake Engineering and Structural Dynamics; 41, 2012, 1725-1749.
- [8] ظهیری یگانه؛ سکینه؛ "توسعه‌ی یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل مسأله‌ی اندرکنش سد و مخزن؛" پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس؛ تهران، ۱۳۹۱.
- [9] خداکرمی؛ محمد ایمان. "یک روش المان مرزی- محدود مقیاس‌شده دارای ماتریس‌های ضرایب قطری برای حل مسایل الاستودینامیک؛" رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۹۰.
- [10] Khaji; N.; and Khodakarami; M.I. "A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems"; Engineering Analysis with Boundary Elements; 35, 2011, 845-854.
- [11] Khodakarami; M.I.; and Khaji; N. "Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices." Engineering Analysis with Boundary Elements; 35, 2011, 1288-1296.
- [12] Khodakarami; M.I.; and Khaji; N.; Ahmadi; M.T. "Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations"; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 213, 2012, 183-195.
- [13] Mirzajani; M.; and Khaji; N. "Frequency domain analysis of elastic bounded domains using a new semi-analytical method"; Acta Mechanica; 224,



شکل (۱۲) بیشینه قسمت حقیقی فشار هیدرودینامیک ($P_s(\max)$) در حالت $\beta=5$

۸- نتیجه گیری

در این پژوهش، یک روش نیمه‌تحلیلی به نام روش معادلات مجزا، به منظور اعمال مستقیم شرایط مرزی مخزن سد در حل معادله حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرودینامیکی (معادله هلمهولتز) در آن، توسعه داده شد. مهمترین ویژگی این روش دارا بودن ماتریس ضرایب قطری در دستگاه معادلات حاکم است. این امر و نیز حل مسئله در فضایی با یک بعد کمتر از فضای اصلی مسئله باعث کاهش چشمگیر حجم محاسبات نسبت به سایر روش‌ها می‌شود. در این راستا با استفاده از ابزارهای روش حاضر، معادلات شرایط مرزی مخزن سد در دستگاه مختصات محلی به صورت مجزا برای هر درجه آزادی استخراج شد و به عنوان روابط کمکی برای تعیین ضرایب ثابت ناشی از حل معادله دیفرانسیل حاکم، در حل مسئله وارد شد. لازم به گفتن است که انتخاب محل LCO، هندسه‌ی مخزن و مبدا مختصات کلی در انتقال معادلات به فضای محلی تاثیرگذار است، که در این پژوهش، تنها حالت خاصی از هندسه مخزن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین LCO نباید در گوشه‌ها و درون مخزن قرار گیرد، زیرا در گوشه‌ها امکان اعمال یکی از شرایط مرزی مخزن از بین می‌رود و در درون مخزن هم، تابع هدف برای ما مشخص نیست. به منظور ارزیابی توانایی و دقت روش معادلات مجزا در زمینه‌ی یاد شده، یک سد صلب ۱۰۰ متری با مخزن پر از آب و پی صلب در حوزه فرکانس تحت ارتعاش هارمونیک افقی پایه بررسی شد. محاسبه‌ی توزیع فشار هارمونیک وارد بر بدنه سد در مقایسه با حل تحلیلی مسئله نشان داد که این روش در

- [16] Clenshaw; C.W.; and Curtis; A.R. " A method for numerical integration on an automatic computer"; Numerische Mathematik; 2, 1960, 197-205.
- [17] Nakagawa; T. "An initial-boundary value problem of the wave equation, hydrodynamic pressure in reservoir water due to seismic motion of dam"; central research institute of electric power industries report, 1981.
- 2013, 1555-1570.
- [14] Lebedev; N.N. Special functions and their applications; Courier Dover Publications, 1972.
- [15] Karimi; I.; Khaji; N.; and Ahmadi; M.T. "System identification of concrete gravity dams using artificial neural networks based on a hybrid finite element–boundary element approach"; Engineering Structures; 32, 2010, 3583-3591.