مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره هجدهم، شماره ۶، سال ۱۳۹۷

# بازفرمول‌بندی روش اجزاء محدود مبتنی بر المان‌های مختلط فوریه در افزایش دقت حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس

**ساجده فرمانی[۱]، مهناز قائینی حصاروئیه[۲]*، صالح حمزهٔ جواران[۳]**

۱- دانشجوی دکتری سازه‌های هیدرولیکی، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲- دانشیار، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳- استادیار، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

**mghaeini@uk.ac.ir**

**تاریخ دریافت ۹۷/۰۳/۰۱** **تاریخ پذیرش ۹۷/۷/۲۷**

## چکیده

در این مقاله به حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس با روش اجزاء محدود مبتنی بر المان‌های مختلط فوریه پرداخته شده است. توابع انترپولاسیون پیشنهادی با استفاده از غنی‌سازی توابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه به شکل $\exp(i\omega r)$ حاصل شده‌اند. این توابع شامل ویژگی‌های توابع پایه‌ی شعاعی حقیقی فوریه و گوسی است. این ویژگی‌های مفید باعث توانایی بسیار بالای روش پیشنهاد شده می‌شود. از جمله مزیت توابع شکل پیشنهادی می‌توان به دارا بودن همزمان میدان توابع مثلثاتی، نمایی و چند جمله ای اشاره کرد؛ در حالیکه توابع کلاسیک لاگرانژ تنها میدان توابع چند جمله‌ای را اغنا می‌کنند. چند نمونه معیار عددی در رابطه با کاربرد توابع پیشنهادی در روش اجزاء محدود برای حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس مورد استفاده قرار گرفته است. برای نشان دادن کارایی و دقت روش حاضر، نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از توابع کلاسیک و همچنین حل تحلیلی مقایسه شده است. نتایج این مقایسه ها حاکی از دقت بسیار بالاتر روش پیشنهادی است.

**واژگان کلیدی:** معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس، روش اجزاء محدود، المان‌های مختلط فوریه، توابع شکل کلاسیک لاگرانژ

## ۱– مقدمه

حل معادلات ناویر–استوکس[۱] و لاپلاس[۲] از چالش‌های مهم در مسائل مکانیک سیالات است. بیشتر مسائل را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل نمود و یا حل تحلیلی مسائل پیچیده، بسیار سخت بدست می‌آید. به همین منظور در چند دهه اخیر روش‌های عددی توسعه پیدا کرده‌اند. در حالت کلی روش-

1 Navier-Stokes

2 Laplace

های عددی به دو دسته روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی و روش‌های بدون شبکه بندی تقسیم می‌شوند. در روش‌های دسته اول هندسه محاسباتی شبکه‌بندی می شود و معادلات حاکم روی این شبکه مورد حل قرار می‌گیرند. روش‌های اجزاء محدود[1]، تفاضل محدود [2]و حجم محدود[3] در این گروه قرار می‌گیرند. در روش‌های دسته دوم هندسه محاسباتی به ذرات متحرک تقسیم بندی می‌شود. در این روش به هیچ گونه شبکه‌ای نیازی نیست و معادلات روی این ذرات گسسته می‌شود. روش‌های هیدرودینامیک ذرات هموار شده[4]، حرکت ذرات نیمه ضمنی[5] و روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته[6] مثال‌هایی از روش‌های این دسته است. روش اجزاء محدود قابلیت خاصی در مسائل با هندسه پیچیده و به کارگیری شرایط مرزی نیومن دارد. به علاوه مزیت‌هایی همچون متقارن و نواری بودن ماتریس ضرائب، عدم وجود تکینگی در انتگرال‌گیری‌ها و ... سبب محبوبیت این روش در بین پژوهشگران شده است. چندین پژوهشگر روی حل معادلات ناویر–استوکس با روش اجزاء محدود مطالعه نمودند. [1-5]. همچنین معادله لاپلاس نیز با روش اجزاء محدود توسط برخی پژوهشگران مورد حل قرار گرفته است [6].

در مسائل جریان تراکم‌ناپذیر لزج، متغیرهای مجهول، مؤلفه-های افقی و عمودی سرعت ( $v_x$ و $v_y$ ) و همچنین متغیر فشار ( $p$ ) است. در این مطالعه از روش اجزاء محدود مرکب[7] برای مسائل جریان تراکم ناپذیر لزج استفاده شده که در آن المان‌های مورد استفاده دارای درجات آزادی متغیر است. برای نمونه برای یک المان نه گرهی، سه درجه آزادی ( $v_x$، $v_y$ و $p$ ) در گوشه‌ها و دو درجه آزادی ( $v_x, v_y$ ) در گره‌های داخلی وسط اضلاع المان وجود دارد. این مسئله باعث پیچیده شدن ماتریس‌های المان و همچنین اسمبل کردن معادلات می‌شود. بنابراین زمان CPU و فضای ذخیره افزایش پیدا می‌کند [1]. بعلاوه برای برخی مسائل لازم است که تعداد المان‌ها افزایش یابد و یا ابعاد المان خیلی کوچک شود که این اتفاق باعث ازدیاد تعداد درجات آزادی شده و به عنوان یک نتیجه هزینه‌های محاسباتی افزایش می‌یابند. به همین منظور در این پژوهش سعی شده است تا دقت مدل‌سازی در حل معادلات ناویر–استوکس حاکم بر جریان سیال تراکم ناپذیر و همچنین معادله لاپلاس حاکم بر مسئله انتقال حرارت، با استفاده از توابع شکل جدید بهبود داده شود. با به کارگیری این توابع، درجات آزادی کم شده و در نتیجه هزینه‌های محاسباتی کاهش می‌یابند. در این مدل، یک مجموعه جدیدی از توابع شکل بدست آمده از توابع شعاعی پایه‌ی مختلط فوریه ارائه شده و بازفرمول‌بندی شده است. در حالت کلی توابع پایه‌ی شعاعی به دو دسته کلی و محلی تقسیم می‌شود. از جمله توابع پایه‌ی شعاعی کلی می‌توان به توابع مخروطی، اسپلاین صفحه نازک[8]، گاوسین[9]، چند ربعی[10]، چند ربعی معکوس[11]، سینوسی[12]، فوریه[13]، بسل نوع اول و دوم[14] [7-17] و از دسته توابع پایه‌ی شعاعی محلی به توابع تکیه‌گاه فشرده[15] [18] اشاره کرد. حمزه جواران و همکاران [15] از توابع پایه ی شعاعی فوریه، دارای خاصیت نوسانی، در تقریب ترم اینرسی مسائل الاستودینامیک دو بعدی استفاده کردند و نشان دادند که در مقایسه با سایر توابع پایه‌ی شعاعی نوسانی، نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود.

در این پژوهش در ابتدا فرمول‌بندی روش اجزاء محدود در حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس بیان شده است. سپس توابع شکل پیشنهادی برای المان با نه گره بدست می‌آید. در استفاده از این توابع سعی شده که خطای عددی به کمترین مقدار خود نسبت به سایر روش‌های عددی کاهش یابد. در نهایت به منظور نشان دادن کارایی و دقت روش حاضر، چند

1 Finite Element Method
2 Finite Difference Method
3 Finite Volume Method
4 Smoothed Particles Hydrodynamic
5 Moving Particles Semi-implicit
6 Discrete Least Squares Meshless
7 Mixed Finite Element Method (MFEM)

8 Thin plate spline
9 Gaussian
10 Multiquadric
11 Inverse multiquadric
12 Sinusoidal
13 Fourier
14 First and second kind Bessel function (J-Bessel)
15 Compact support (CS)

نمونه معیار عددی با روش اجزاء محدود مبتنی بر المان‌های پیشنهادی برای حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس مورد استفاده قرار گرفته و سپس نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از توابع کلاسیک و همچنین حل تحلیلی مقایسه شده است.

## ۲- فرمول‌بندی FEM

### ۲-۱- فرمول‌بندی FEM در حل معادلات ناویر–استوکس

به منظور بکارگیری روش اجزاء محدود، معادلات ناویر–استوکس در دو بعد را می‌توان به صورت معادلات (۱، ۲ و ۳) نوشت [1]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \qquad (۱)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 f_x \qquad (۲)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_0 f_y \qquad (۳)$$

در روابط بالا $v_x$ و $v_y$ به ترتیب مولفه‌های سرعت در جهت‌های $x$ و $y$ است. همچنین، $p$ فشار، $\mu$ لزجت و $f_x$ و $f_y$ مؤلفه‌های بردار نیروی سطحی را نشان می‌دهند.

اگر $\psi$ و $\phi$ به ترتیب توابع درونیاب سرعت و فشار در نظر گرفته شوند، متغیرهای $v_x$، $v_y$ و $p$ را می‌توان به صورت ذیل تقریب زد:

$$v_x(x,y,t) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(x,y) v_x^m(t) \qquad (\text{٤–الف})$$

$$v_y(x,y,t) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m(x,y) v_y^m(t) \qquad (\text{٤–ب})$$

$$P(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(x,y) P_n(t) \qquad (\text{٤–پ})$$

که $v_x^m$، $v_y^m$ و $P_n$ به ترتیب مقادیر گرهی $v_x$، $v_y$ و $P$ است. در نهایت با اعمال روش اجزاء محدود رابطه (۵) حاصل می‌شود (برای مشاهده جزئیات بیشتر در چگونگی بدست آوردن معادله (۵) به منبع [1] مراجعه شود). رابطه مذکور، رویکرد اجزاء محدود مرکب نامیده می‌شود. ماتریس ضرائب را نیز می‌توان به شکل رابطه (٦) نوشت. باید توجه داشت که تابع درونیاب سرعت با تابع درونیاب فشار متفاوت است زیرا مشتقات اول سرعت در روابط شکل ضعیف وجود دارند اما هیچ مشتقی از فشار وجود ندارد. همچنین شرایط مرزی دریکله شامل فشار نیست و این متغیر در دسته شرایط مرزی نیومن قرار می‌گیرد. بنابراین توابع درونیاب مورد استفاده برای فشار یک مرتبه پایین‌تر از توابع مورد استفاده در سرعت هستند [1].

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] \\ [0] & [M] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2[S^{xx}] + [S^{yy}] & [S^{yx}] & -[S^{x0}] \\ [S^{xy}] & [S^{xx}] + 2[S^{yy}] & -[S^{y0}] \\ -[S^{x0}]^T & -[S^{y0}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C(\mathbf{v})] & [0] & [0] \\ [0] & [C(\mathbf{v})] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

$$M_{ij} = \int_\Omega \rho_0 \psi_i \psi_j \, dx\, dy$$

$$C_{ij}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \rho_0 \psi_i \left(v_x \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$S_{ij}^{\zeta\eta} = \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta}\right) dx\, dy \;;\; \zeta,\eta = x,y \qquad (٦)$$

$$S_{ij}^{\zeta 0} = \int_\Omega \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} \phi_j \, dx\, dy \;;\; \zeta = x,y$$

$$F^1 = \int_\Omega \rho_0 \psi_i f_x \, dx\, dy + \oint_\Gamma \psi_i t_x \, ds$$

$$F^2 = \int_\Omega \rho_0 \psi_i f_y \, dx\, dy + \oint_\Gamma \psi_i t_y \, ds$$

المان‌های مورد استفاده در جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزج باید شرط (Landyzhenkaya-Babuska-Brezzi) را ارضاء کنند [20, 19]. با در نظر گرفتن این شرط، المان چهارضلعی با نه گره برای سرعت و چهار گره برای فشار انتخاب می‌شود. این المان در شکل (١) نشان داده شده است.

**شکل ۱.** المان مورد استفاده برای جریان تراکم‌ناپذیر لزج در مدل حاضر

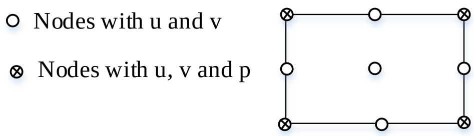


**Fig. 1**. The element used for incompressible viscous in the present model

### ۲-۲- فرمول‌بندی FEM در حل معادله لاپلاس

به منظور اعمال روش اجزاء محدود، معادله لاپلاس در دوبعد به صورت رابطه (۷) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{۷}$$

که $u$ نشان دهنده متغیر حالت می‌باشد. شکل ضعیف رابطه (۷) را می‌توان به صورت رابطه (۸) نوشت:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy\\&-\oint_{\Gamma^e} w\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)ds=0\end{aligned} \tag{۸}$$

در رابطه بالا، $w$، تابع وزن و $n_x$ و $n_y$ به ترتیب بردارهای نرمال واحد در جهت‌های $x$ و $y$ است.

مقادیر گرهی متغیر حالت با استفاده از تابع درونیاب $\psi$، به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$u_h^e(x,y)=\sum_{j=1}^{n}u_j^e\psi_j^e(x,y) \tag{۹}$$

با جایگذاری رابطه (۹) در شکل ضعیف، یعنی رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^e}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j^e\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial w}{\partial y}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j^e\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}\right)dx\,dy\right.\\&-\oint_{\Gamma^e} w\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)ds=0\end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین شکل اجزاء محدود رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) نوشته می‌شود.

$$[K^e]\{u^e\}=\{Q^e\} \tag{۱۱}$$

که $K^e$ ماتریس ضرائب و $Q^e$ جمله انتگرال مرزی را بیان می‌کنند. و طبق رابطه (۱۲) تعریف می‌شوند.

لازم به ذکر است که برای حل معادله (۱۲) با روش اجزاء محدود از المان چهارضلعی نه گرهی استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}&K_{ij}^e=\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\psi_i^e}{\partial x}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}\right)+\frac{\partial\psi_i^e}{\partial y}\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}\right)dx\,dy\\&Q^e=\oint_{\Gamma^e}\psi_i^e\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)ds\end{aligned} \tag{۱۲}$$

## ۳- پیشنهاد توابع شکل مختلط فوریه

با استفاده از مفهوم سری‌های فوریه، هر تابع متناوب قطعه قطعه پیوسته $R(r)$ را می‌توان به صورت ذیل بیان کرد [21]:

$$R(r)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}r\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}r\right)\right) \tag{۱۳}$$

و یا می‌توان به شکل فازی زیر نوشت:

$$R(r)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}r+\alpha_n\right)\right) \tag{۱۴}$$

که $a_0$، $a_n$، $b_n$، $c_n$، $\alpha_n$ و $L$ پارامترهای معمول سری‌های فوریه را نشان می‌دهند.

اگر فقط یک جمله از معادله (۱۴) در نظر گرفته شود:

$$R(r)=a_0+c_1\sin\left(\frac{\pi}{L}r+\alpha_1\right) \tag{۱۵}$$

یا

$$R(r)=\zeta+\kappa\sin(\omega r+\alpha) \tag{۱۶}$$

که $\zeta$، $\kappa$، $\omega$ و $\alpha$ ثابت‌هایی هستند که پارامترهای شکل در تابع پایه‌ی شعاعی مختلط حقیقی نامیده شده و برای افزایش دقت انتخاب می‌شوند [15].

### ۳-۱- غنی‌سازی تابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه

در این قسمت، مراحل غنی‌سازی تابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه برای یک المان یک بعدی سه گرهی مورد بحث قرار خواهد گرفت. نتایج بدست آمده به آسانی برای المان دو بعدی نه گرهی قابل تعمیم است.

ابتدا توابع چند جمله‌ای به عنوان توابع مکمل به بسط تابعی‌ای که فقط از توابع پایه‌ی شعاعی در روند تقریب استفاده می‌کند، اضافه می‌شود:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} R_i(r)a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(r)\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \qquad (۱۷)$$

که در آن $n$ و $m$ به ترتیب بیانگر تعداد گره‌ها و تعداد عبارات چند جمله‌ای‌های پایه می‌باشند. همچنین:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T, \\ \mathbf{b} &= [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]^T \\ \mathbf{R}(r) &= [R_1(r) \quad R_2(r) \quad \dots \quad R_n(r)]^T, \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= [P_1(\mathbf{x}) \quad P_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad P_m(\mathbf{x})]^T \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با ارضای معادله (۱۷) در نقاط گرهی، معادله ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_Q\mathbf{a} + \mathbf{P}_m\mathbf{b} \qquad (۱۹)$$

که در آن:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & . & . & . & R_n(r_1) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ R_1(r_n) & . & . & . & R_n(r_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & . & . & . & P_m(\mathbf{x}_1) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ P_1(\mathbf{x}_n) & . & . & . & P_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

در معادله ماتریسی (۱۹)، در مقابل $n$ معادله، $n+m$ مجهول وجود دارد. بنابراین باید شروط اضافی برای پایدار شدن مسئله در نظر گرفته شود. ثابت شده است که اگر شرط زیر برقرار باشد یکتایی جواب تضمین خواهد شد [22]:

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(\mathbf{x}_i)a_i = 0, \quad \mathbf{P}_m^T\mathbf{a} = 0 \qquad (۲۱)$$

در نتیجه دستگاه معادلات نهایی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

بعد از انجام یک سری عملیات جبری، نتایج ذیل می‌تواند حاصل شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{R}_Q^{-1}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{P}_m\mathbf{b} \\ \mathbf{b} &= [\mathbf{P}_m^T\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{P}_m]^{-1}\mathbf{P}_m^T\mathbf{R}_Q^{-1}\hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با تعریف دو ماتریس $\mathbf{S_a}$ و $\mathbf{S_b}$، بردارهای مجهول $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S_a}\hat{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{S_b}\hat{\mathbf{u}} \qquad (۲٤)$$

که

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_a &= \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{P}_m\mathbf{S}_b, \\ \mathbf{S}_b &= [\mathbf{P}_m^T\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{P}_m]^{-1}\mathbf{P}_m^T\mathbf{R}_Q^{-1} \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

با جایگزین کردن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در رابطه (۱۹)، عبارت ذیل بدست می‌آید:

$$u_h(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(r)\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b]\hat{\mathbf{u}} \qquad (۲٦)$$

با استفاده از رابطه (۲٤)، مقادیر گرهی $\hat{\mathbf{u}}$ را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین ماتریس توابع شکل به صورت ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(r)\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b \qquad (۲۷)$$

اکنون می‌توان رویکرد ذکر شده را برای المان سه گرهی یک بعدی نشان داده شده در شکل (۲) در دستگاه مختصات طبیعی $\xi$ به کار گرفت. شکل مختلط سری‌های فوریه معادله (۱۳) را می‌توان بصورت رابطه (۲۸) تعریف کرد:

**شکل ۲.** المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی

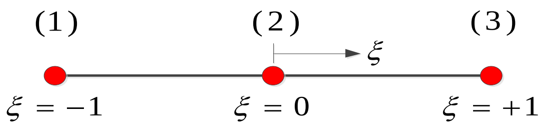


**Fig.2.** Three-node element in natural coordinate system

$$R(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(\pi x/L)r} \qquad (۲۸)$$

که $c_n$ و $L$ پارامترهای معمول سری‌های مختلط فوریه می‌باشند [21]. روند زیر مانند آنچه برای معادلات (۱۷-۲۰) انجام شد، به کار گرفته می‌شود. بنابراین تابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه به سادگی به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$R(r) = \alpha e^{i\omega r} \qquad (۲۹)$$

در رابطه (۲۹) $\alpha$ و $\omega$، پارامترهای شکل تابع پایه‌ی شعاعی مختلط فوریه را نشان می‌دهند [23] برای یک المان سه گرهی، بردار $\mathbf{R}(r)$ به صورت رابطه (۳۰) نوشته می‌شود:

$$\mathbf{R}(r)=\begin{bmatrix}R_1(r)\\R_2(r)\\R_3(r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha e^{i\omega|\xi+1|}\\\alpha e^{i\omega|\xi|}\\\alpha e^{i\omega|\xi-1|}\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}e^{i\omega(1+\xi)}\\e^{i\omega\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)}\\e^{i\omega(1-\xi)}\end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

که $\mathrm{sgn}(\xi)$ تابع معروف علامت را نشان می‌دهد. برای یک المان سه گرهی کافی است که یک میدان خطی برای غنی-سازی طبق رابطه (۳۱) در نظر گرفته شود. در روند غنی‌سازی تابع شعاعی مختلط فوریه در مختصات طبیعی، بعد از برخی عملیات جبری، بردارها و ماتریس‌های مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{P}(\xi)=\begin{bmatrix}1\\\xi\end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

$$\mathbf{R}_Q=\begin{bmatrix}R_1(r_1)&R_2(r_1)&R_3(r_1)\\R_1(r_2)&R_2(r_2)&R_3(r_2)\\R_1(r_3)&R_2(r_3)&R_3(r_3)\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1&e^{i\omega}&e^{2i\omega}\\&1&e^{i\omega}\\sym.&&1\end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

$$\mathbf{P}_m=\begin{bmatrix}P_1(\xi_1)&P_2(\xi_1)\\P_1(\xi_2)&P_2(\xi_2)\\P_1(\xi_3)&P_2(\xi_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$\mathbf{s}_b=\frac{1}{3-e^{i\omega}}\begin{bmatrix}1&1-e^{i\omega}&1\\-\dfrac{3-e^{i\omega}}{2}&0&\dfrac{3-e^{i\omega}}{2}\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

$$\mathbf{s}_a=\frac{1}{2\alpha(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})}\begin{bmatrix}1&-2&1\\&4&-2\\sym.&&1\end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

در نهایت توابع شکل المان سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی $\xi$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(\xi)&=[\phi_1(\xi)\quad\phi_2(\xi)\quad\phi_3(\xi)]\\\phi_1(\xi)&=\frac{1}{2}(-\xi+c+g(\xi))\\\phi_2(\xi)&=(1-c)-g(\xi)\\\phi_3(\xi)&=\frac{1}{2}(\xi+c+g(\xi))\end{aligned} \tag{۳۶}$$

که

$$\begin{aligned}g(\xi)&=\frac{e^{i\omega|\xi+1|}-2e^{i\omega|\xi|}+e^{i\omega|\xi-1|}}{(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})}\\&=\frac{e^{i\omega(1+\xi)}-2e^{i\omega\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)}+e^{i\omega(1-\xi)}}{(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})}\end{aligned} \tag{۳۷}$$

یکی از مزیت‌های توابع شکل مختلط فوریه، تابع الحاقی $g(\xi)$ است که عامل بهبود در دقت توابع شکل مختلط فوریه است. همچنین پارامتر شکل $\omega$ با مقادیر مختلط درگیر است و قسمت‌های حقیقی و موهومی آن به ترتیب مشارکت میدان توابع مثلثاتی و نمایی را شامل می‌شود.

اکنون می‌توان نتایج بدست آمده برای المان سه گرهی را به المان نه گرهی در دو بعد تعمیم داد. المان نه گرهی فوریه در شکل (۳) نشان داده شده و توابع شکل به آسانی طبق رابطه (۳۸) بدست می‌آیند.

**شکل ۳.** المان دو بعدی نه گرهی

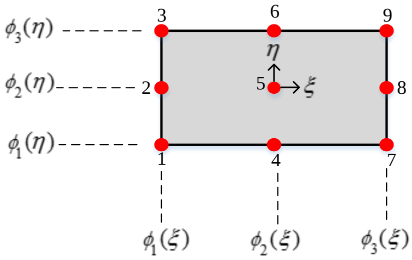


**Fig.3.** Nine-node element in two dimention

$$\begin{aligned}&N_1(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_1(\eta),\ \ N_2(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_2(\eta),\\&N_3(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_3(\eta),\ \ N_4(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_1(\eta),\\&N_5(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_2(\eta),\ \ N_6(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_3(\eta)\\&N_7(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_1(\eta),\ \ N_8(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_2(\eta),\\&N_9(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_3(\eta)\end{aligned} \tag{۳۸}$$

# ٤- خواص توابع شکل مختلط فوریه

## ۴-۱- خاصیت دلتای کرونیکر

خاصیت دلتای کرونیکر برای توابع شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_m(\xi_n)=\delta_{mn}(1+0i) \tag{۳۹}$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$ بیانگر پارامتر موهومی واحد و $\delta_{mn}$ نشان دهنده نماد کرونیکر است. در شکل‌های (٤ و ٥) توابع شکل مختلط فوریه برای دو حالت از پارامتر شکل $\omega$ رسم شده است که بیانگر این خاصیت است. در این شکل‌ها بخش‌های حقیقی و موهومی توابع شکل به طور مجزا نشان

داده شده است. بدیهی است که خصوصیت دلتای کرونیکر در همه شکل‌ها ارضاء می‌شود.

### ۴-۲- خاصیت افراز واحد

برای یک المان با توابع شکل مختلط فوریه رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j(\xi) = 1 + 0i \tag{۴۰}$$

که $n$ تعداد گره‌های المان را نشان می‌دهد.

### ۴-۳- قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت

برای یک المان سه گرهی مختلط فوریه روابط زیر برای محاسبه مشتقات متوالی توابع شکل، مورد استفاده قرار می-گیرد:

$$\begin{aligned}
&\phi_1'(\xi) = \frac{1}{2}(-1 + g'(\xi)),\\
&\phi_1^{n}(\xi) = \frac{1}{2} g^{(n)}(\xi), \quad n = 2,3,\ldots\\
&\phi_2^{(n)}(\xi) = -g^{(n)}(\xi), \quad n = 1,2,\ldots\\
&\phi_3'(\xi) = \frac{1}{2}(1 + g'(\xi)),\\
&\phi_3^{n}(\xi) = \frac{1}{2} g^{(n)}(\xi), \quad n = 2,3,\ldots
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

جالب آنکه می‌توان به خاطر خاصیت تابع نمایی حقیقی_مختلط، یک رابطه بازگشتی بین مشتقات تابع $g(\xi)$ برقرار کرد:

$$g^{(n)}(\xi) = -\omega^2 g^{(n-2)}(\xi) \tag{۴۲}$$

**شکل ۴.** قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 10$

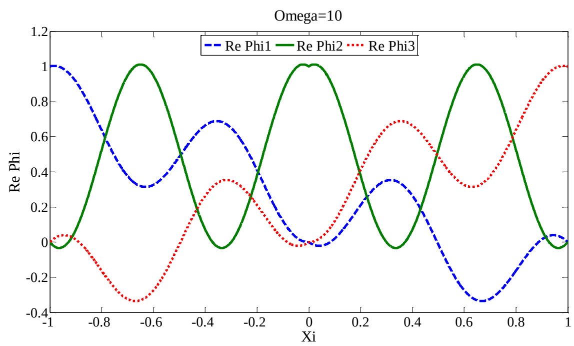


**Fig.4.** Real part of complex Fourier shape functions for three-node element with $\omega = 10$

**شکل ۵.** قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 10$

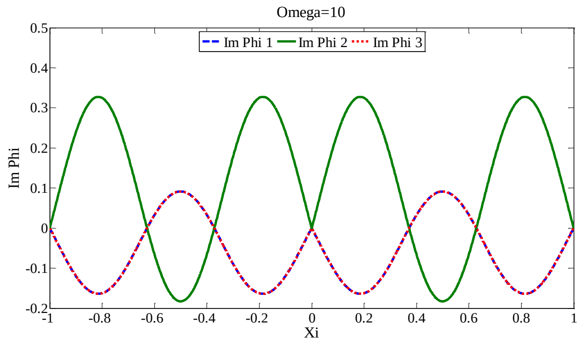


**Fig.5**. Imaginary part of complex Fourier shape functions for three-node element for $\omega = 10$

## ۵- نمونه‌های عددی

در این قسمت، برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی، سه مسئله معیار برای حل معادلات ناویر–استوکس و لاپلاس مورد مطالعه قرار گرفته است. در انتهای هر مسئله، نتایج روش پیشنهادی با روش اجزاء محدود کلاسیک و حل تحلیلی موجود در مرجع [24] مقایسه شده است.

### ۵-۱- جریان Couette

در این مسئله، یک کانال با دو جدار مسطح موازی حاوی سیال تراکم‌ناپذیر لزج، بررسی می‌شود.

اگر جدار بالایی دارای مؤلفه سرعت در جهت $x$ باشد، جریان اصطلاحاً "Couette" و اگر ثابت باشد جریان "Poiseuille" نامیده می‌شود [24]. در این تست جدار بالایی با سرعت $1\ \mathrm{m/s}$ در جهت $x$ حرکت می‌کند (جریان Couette). لزجت سیال نیز $1\ \mathrm{Pa.s}$ در نظر گرفته می‌شود. هندسه و شرایط مرزی مسئله در شکل (۶) نشان داده شده است. معادله حاکم بر این مسئله با استفاده از معادلات ناویر–استوکس بدست می‌آید که به صورت رابطه (۴۳) نوشته می‌شود:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \tag{۴۳}$$

در ابتدا هندسه محاسباتی به چهار المان و سپس دو المان تقسیم شده که به ترتیب در شکل‌های (۷ و ۸) نشان داده شده‌اند. میدان سرعت در $x = 0.5\,\mathrm{m}$ با استفاده از اجزاء محدود کلاسیک و روش جدید با توابع شکل پیشنهادی در

شکل‌های (۹ و ۱۰) رسم شده و با حل تحلیلی مقایسه شده است.

**شکل ٦.** هندسه و شرایط مرزی مثال اول

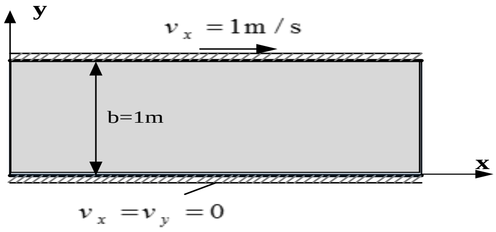


**Fig. 6.** Geometry and boundary conditions for the first example

**شکل ۷.** شبکه با چهار المان برای مثال اول

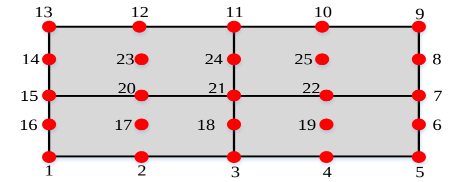


**Fig. 7**. Grid with four elements for the first example

**شکل ۸.** شبکه با دو المان برای مثال اول

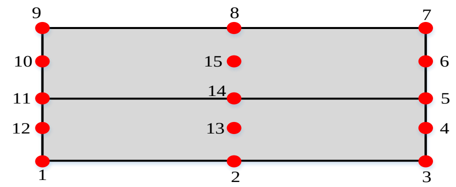


**Fig. 8.** Grid with two elements for the first example

**شکل ۹.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای مؤلفه افقی سرعت در مثال اول

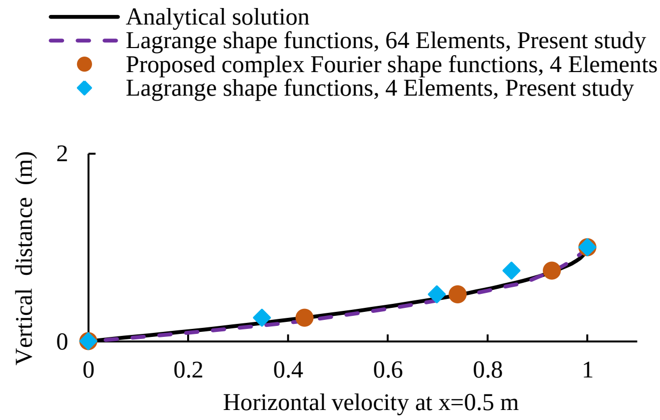


**Fig. 9.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and analytical solution for horizontal velocity in the first example

**شکل ۱۰.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای مؤلفه افقی سرعت در مثال اول

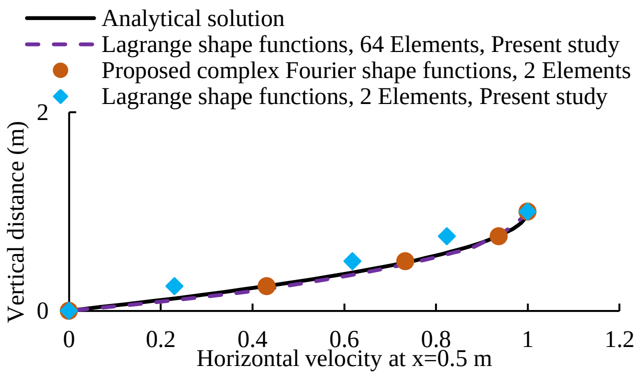


**Fig. 10**. Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and analytical solution for horizontal velocity in the first example

## ۵-۲- جریان لزج روغنی در یک تکیه‌گاه لغزنده

در این مسئله، یک تکیه‌گاه لغزنده که شامل دو پد است در نظر گرفته شده است. پد پایینی با سرعت $v_x = 9.15\ m/s$ نسبت به پد بالایی حرکت می‌کند. در این تست صفحه بالایی ثابت بوده و دارای زاویه کوچکی نسبت به محور افقی است. فضای بین دو پد با روغنی با لزجت $\mu = 0.0383\ N.s/m^2$ پر شده است. ابتدا و انتهای تکیه‌گاه باز بوده و بنابراین در این قسمت‌ها فشار اتمسفر $p_0$ برقرار است. هندسه و شرایط مرزی در شکل (۱۱) نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل، $h_1 = 2.44\times10^{-4}\ m$ ،$h_2 = 1.22\times10^{-4}\ m$ و همچنین $L = 0.1098\ m$ است. باید توجه داشت که فاصله بین دو پد کوچک بوده و بنابراین فرض می‌شود که $v_y = 0$ و جریان حالت دو بعدی دارد. همچنین معادله حاکم همان رابطه (۴۳) است.

**شکل ۱۱.** هندسه و شرایط مرزی مثال دوم

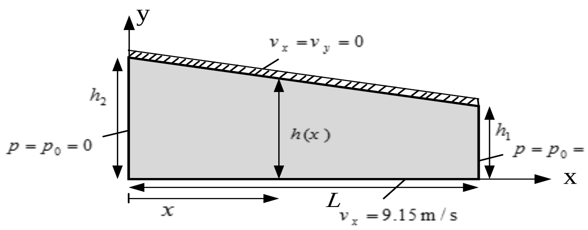


**Fig. 11.** Geometry and boundary conditions for the second example

**شکل ١٢.** شبکه با چهار المان برای مثال دوم

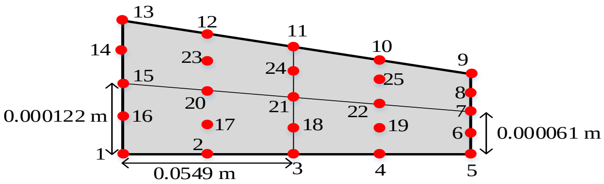


**Fig. 12.** Grid with four elements for the second example

**شکل ١٣.** شبکه با یک المان برای مثال دوم

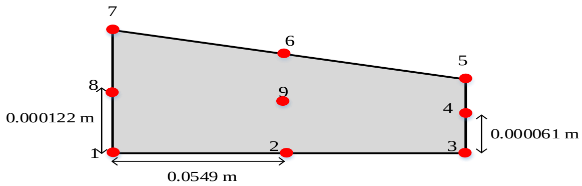


**Fig. 13.** Grid with one element for the second example

شکل‌های (١٢ و ١٣) به ترتیب شبکه با یک و چهار المان را نشان می‌دهند. در ادامه نتایج سرعت و فشار برای مدل حاضر با نتایج اجزاء محدود کلاسیک و حل تحلیلی مقایسه شده است. (شکل ١٤ و جداول ١، ٢) و(٣)).

**شکل ١٤.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای مؤلفه افقی سرعت در مثال دوم

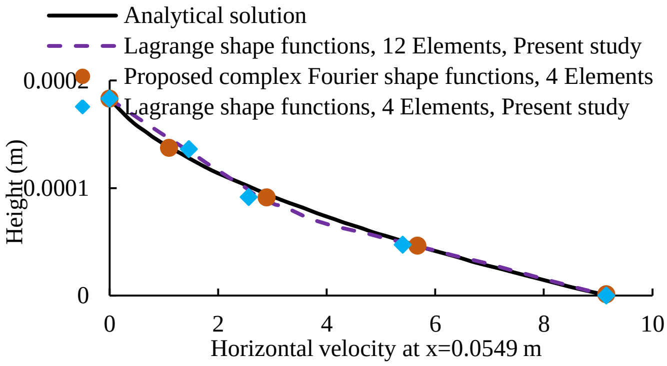


**Fig. 14.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and analytical solution for horizontal velocity in the second example

**جدول ١.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای متغیر فشار (پاسکال) با استفاده از چهار المان در مثال دوم

| Node | Lagrange shape functions (Relative errors %) | Complex Fourier shape functions (Relative error % ) | Analytical solution |
|---|---|---|---|
| 3 | $6081.014\times10^{2}$ (5.83) | $5983.5403\times10^{2}$ (4.14) | $5745.84\times10^{2}$ |
| 11 | $5999.6625\times10^{2}$ (4.42) | $5971.9712\times10^{2}$ (3.93) | $5745.84\times10^{2}$ |
| 21 | $5976.6791\times10^{2}$ (4) | $5960.1238\times10^{2}$ (3.73) | $5745.84\times10^{2}$ |
| | $L^2$ relative error norm=4.82% | $L^2$ relative error norm=3.94 % | |

**Table 1.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and Analytical solution for the pressure variable (Pa) using four elements in the second example

**جدول ٢.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای مؤلفه افقی سرعت (متر بر ثانیه) با استفاده از یک المان در مثال دوم

| Node | Lagrange shape functions (Relative errors %) | Complex Fourier shape functions (Relative error % ) | Analytical solution |
|---|---|---|---|
| 4 | 6.7923 (1.02) | 6.9141 (0.75) | 6.8625 |
| 8 | 2.138 (6.53) | 2.2530 (1.51) | 2.2875 |
| 9 | 2.3515 (17) | 3.1854 (4.14) | 3.05 |
| | $L^2$ relative error norm=6.93% | $L^2$ relative error norm=1.89 % | |

**Table 2.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and Analytical solution for the horizontal velocity (m/s) using four elements in the second example

**جدول ٣.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای متغیر فشار (پاسکال) با استفاده از یک المان در مثال دوم

| Node | Lagrange shape functions (Relative errors %) | Complex Fourier shape functions (Relative error % ) | Analytical solution |
|---|---|---|---|
| 2 | $6172.001\times10^{2}$ (7.42) | $5997.541\times10^{2}$ (4.38) | $5745.84\times10^{2}$ |
| 6 | $6004.6615\times10^{2}$ (4.5) | $5993.487\times10^{2}$ (4.31) | $5745.84\times10^{2}$ |
| 9 | $5996.9841\times10^{2}$ (4.38) | $5965.1037\times10^{2}$ (3.82) | $5745.84\times10^{2}$ |
| | $L^2$ relative error norm=5.61 % | $L^2$ relative error norm=4.18% | |

**Table 3.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and Analytical solution for the pressure variable (Pa) using one element in the second example

با توجه به شکل (۱٤) و جداول (۱، ۲ و ۳) و با مقایسه مدل حاضر با نتایج تحلیلی، می‌توان دریافت که روش جدید پیشنهادی نتایج بسیار مناسبی را برای سرعت و فشارنسبت به روش کلاسیک ارائه می‌کند. و این نشان‌دهنده توانایی بالای روش حاضر در مدلسازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزج است.

### ۵-۳- مسئله انتقال حرارت پایدار در یک صفحه مستطیل شکل

در حالت کلی معادله لاپلاس، معادله حاکم بر بسیاری از پدیده‌های فیزیکی همچون نشت آب در خاک همگن، جریان آب تراکم‌ناپذیر غیر چرخشی، انتقال حرارت و ... است. در این قسمت به منظور بررسی دقت روش مزبور در حل معادله لاپلاس، مسئله انتقال حرارت در یک صفحه مستطیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۱۵) هندسه و شرایط مرزی این مسئله را نشان می‌دهد.

**شکل ۱۵.** هندسه و شرایط مرزی مسئله سوم

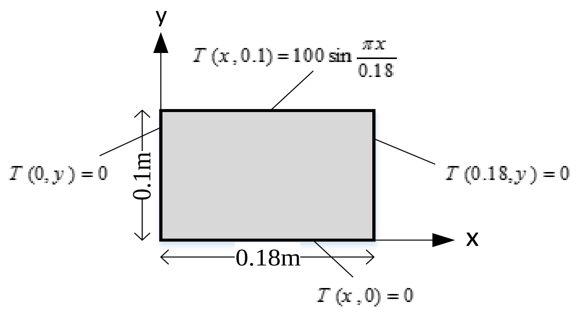


**Fig. 15.** Geometry and boundary conditions for the third example

معادله حاکم نیز طبق رابطه (٤٤) (معادله لاپلاس) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (۴۴)$$

در این تست، شبکه با ٤ المان در شکل (۱٦) رسم شده است. در نهایت توزیع دما در جهت $x$ و برای $y=0.075\text{m}$ با روش اجزاء محدود کلاسیک و روش حاضر محاسبه شده و با حل تحلیلی مقایسه شده است. شکل (۱۷) این نتایج را نشان می‌دهد. با توجه به شکل نتایج حاصل از توابع شکل فوریه نسبت به نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ به حل تحلیلی بسیار نزدیک است.

**شکل ۱٦.** شبکه با چهار المان برای مثال سوم

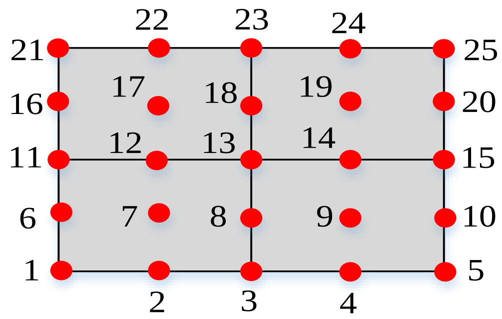


**Fig. 16**. Grid with four elements for the third example

**شکل ۱۷.** مقایسه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ، توابع مختلط فوریه و حل تحلیلی برای توزیع دما در مثال سوم

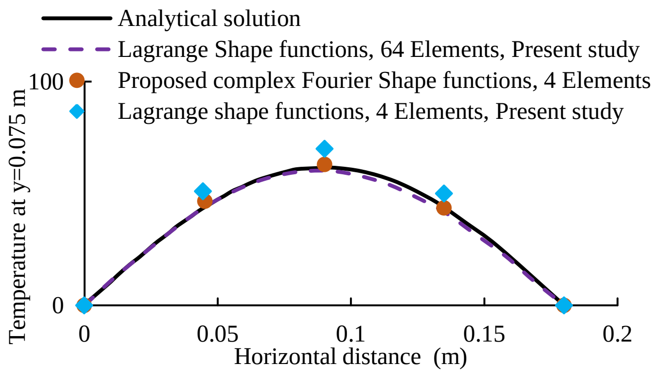


**Fig. 17.** Comparison of results obtained from Lagrange shape functions, complex Fourier functions and Analytical solution for distribution of temperature in the third example

## ٦- نتیجه گیری

در این پژوهش، توابع شکل جدید مختلط فوریه برای حل معادلات ناویر-استوکس و لاپلاس توسعه داده شد. به منظور محاسبه پارامترهای مجهول، روش اجزاء محدود با توابع شکل لاگرانژ کلاسیک و توابع مختلط فوریه مورد استفاده قرار گرفت. توابع پیشنهادی شامل خصوصیات توابع پایه‌ی شعاعی حقیقی فوریه و گوسی است. این ویژگی‌ها مفید باعث توانایی بسیار بالای روش پیشنهاد شده می‌شود. دقت و کارایی روش حاضر با سه مسئله معیار مورد بررسی قرار گرفت. با تحلیل نتایج می‌توان دریافت که توابع پیشنهادی مختلط فوریه و با تعداد درجات آزادی کم قابلیت بهبود دقت نتایج را در مقایسه با توابع کلاسیک لاگرانژ دارند.

## References منابع

[1] Reddy, J.N. 2004 An introduction to nonlinear finite element analysis, Oxford University Press Inc, New York.

[2] Zienkiewicz, O.C. 1971 The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, New York.

[3] Hood, P. 1970 A finite element solution of the Navier-Stokes equations for incompressible contained flow, M. SC. Thesis, University of Wales, Swansea.

[4] Oden, J.T. 1971 The finite element method in fluid mechanics. Lecture for NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon.

[5] Taylor, C. and Hood, P. 1973 A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. Computers & Fluids, **1**, 73-100.

[6] Reddy, J.N. 2010 The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. third edition, CRC Press.

[7] Nardini D, Brebbia CA. 1983 A new approach to free vibration analysis using boundary elements. Applied Mathematical Modelling. **7**(3), 157–62.

[8] Golberg MA, Chen CS. 1994 The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations". Boundary Elements Communications. **5**(2), 57–61.

[9] Chen CS. 1995 The method of fundamental solution for non-linear thermal explosions. Communications in Numerical Methods in Engineering. **11**, 675–81.

[10] Karur SR, Ramachandran PA. 1995 Augmented thin plate spline approximation in DRM. Boundary Elements Communications. **6**(2), 55–58.

[11] Agnantiaris JP, Polyzos D, Beskos DE. 1996 Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis. Computational Mechanics. **17**, 270–277.

[12] Rashed, YF. 2008 Free Vibration of Structures with Trigonometric SIN(R) Function in the Dual Reciprocity Boundary Element Analysis. Advances in Structural Engineering. **11**(4), 397–409.

[13] Samaan MF, Rashed YF. 2009 Free vibration multiquadric boundary elements applied to plane elasticity. Applied Mathematical Modelling. 33, 2421–32.

[14] Hamzehei Javaran S, Khaji, N. 2012 Inverse multiquadric (IMQ) function as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, Portugal.

[15] Hamzeh Javaran S, Khaji N, Moharrami H. 2011A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis. Engineering Analysis with Boundary Elements. **35**,85–95.

[16] Hamzeh Javaran S, Khaji N, Noorzad A. 2011 First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method. Acta Mech. **218**, 247–58.

[17] Hamzehei Javaran, S., Shojaee, S. 2017. The solution of elasto static and dynamic problems using the boundary element method based on spherical Hankel element framework. International Journal of Numerical Methods in Engineering, **112**(13), 2067-2086.

[18] Wendland H. 1995 Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. Advances in Computational Mathematics. **4**, 389–96.

[19] Reddy, J.N. 1986 Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, McGraw Hill, New York.

[20] Oden, J. T. and Carey, G. F. 1983 Finite Elements, Mathematical Aspects, Vol. IV,Prentice.Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[21] Kreyszig E. 2006 Advanced engineering mathematics. JohnWiley & Sons, Inc.

[22] Wang, J.G and Liu, G.R. 2002 On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.**191**, 2611-2630.

[23] Khaji, N, Hamzehei Javaran S. 2013 New complex Fourier shape functions for the analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements. **37**, 260-272.

[24] Reddy, J.N. 2013 An introduction to continuum mechanics, Cambridge University Press.

# Reformulating the Finite Element Method Based on Complex Fourier Elements in increasing the solution accuracy of the Navier-Stokes and Laplace Equations

**Sajedeh Farmani[1], Mahnaz Ghaeini-Hessaroeyeh[2*], Saleh Hamzehei Javaran[3]**

1- Ph.D Candidate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
2- Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran
3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

**mghaeini@uk.ac.ir**

## Abstract

In this paper, the Navier-Stokes and Laplace equations are solved using the Finite Element Method (FEM) based on complex Fourier elements. The FEM is considered by two types of shape functions: Lagrange shape functions and new complex Fourier functions. The proposed interpolation functions are derived using enrichment of complex Fourier radial basis functions in the form of $\exp(i\omega r)$ . The present functions have properties of Gaussian and real Fourier radial basis functions. These useful properties have provided the robustness of the proposed method. Also, these functions have the simultaneously functions field such as trigonometric, exponential, and polynomial; while the classic Lagrange functions satisfied only polynomial functions field. In other words, these features provide an improvement in the solution accuracy with number of elements which are equal or lower than the ones used by the classic finite element method.

Solving the Navier-Stokes and Laplace equations is the important challenge in the fluids mechanics problems. The most problems cannot be solved by the analytical methods. For this reason, the numerical methods are developed. Generally, the numerical methods are divided to two classes: the methods based on the mesh and meshless methods. In the first class, the computational domain are meshed and the governing equations are solved based them the finite element method, Finite Difference Method (FDM) and finite volume method (FVM) are placed in this category. While, in the second category methods, the computational domain is divided to moving particles. In these methods, there is no needed to any grid and the equations are solved on the particles. The smoothed particles hydrodynamic (SPH) method, Moving Particles Semi-implicit method and Discrete Least Squares Meshless method are in this class. The FEM is capable to solving the problems with complicated geometry. Also, the Neumann boundary conditions are applied properly.

Generally, the numerical methods such as finite element and finite difference methods are based on the mesh for solving the equations. For obtaining the results with high accuracy, it is needed to have enough elements. On the other side, when the number of elements (or number of degrees of freedom) is enhanced, the CPU time and storage space are also increased. For this reason, in this paper, the complex Fourier shape functions have been developed, which using them, both the number of elements can be reduced and also the suitable results can be obtained.

In the present paper, at first, the governing equations and boundary conditions are expressed. Then, the FEM formulation and solution procedure are stated. Next, the complex Fourier shape functions and their enrichment process are described. Finally, three benchmark numerical examples are used in solving the Navier-Stokes and Laplace equations for the application of the proposed functions in the finite element method. These tests include Couette flow, flow of a viscous lubricant in a slider bearing and steady state heat transfer in rectangular region. In order to show the efficiency and accuracy of the present method, the results of the proposed method are compared with the classic functions and also the analytical solutions. The results of this comparison indicate the high accuracy of the proposed method.

**Keywords:** Navier-Stokes and Laplace equations, Finite Element Method, Complex Fourier Elements, Classic Lagrange Functions