

# تخمین میرایی در سازه‌ها بر مبنای فقط - خروجی با استفاده از روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته

مرتضی قالیشویان<sup>۱</sup>، احمد شوشتری<sup>۲\*</sup>، ماهر عبدالغنی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۳- دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سوس

\*ashoosht@um.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۶/۱۲/۲۵]

تاریخ دریافت: [۹۵/۱۲/۴]

## چکیده

شناسایی پارامترهای مدال سازه‌ها از اهمیت فراوانی در بسیاری از حوزه‌های مهندسی عمران و مکانیک برخوردار است. امروزه روش‌های شناسایی مبتنی بر فقط-پاسخ سازه محبوبیت روز افزونی یافته است. در این روش‌ها، که اصطلاحاً آنالیز مدال عملیاتی نام دارند، پارامترهای دینامیکی سازه (فرکانس‌های طبیعی، شکل‌های مدی و نسبت‌های میرایی) تنها با در دست داشتن پاسخ خروجی سازه قابل تخمین است. در این خصوص، با فرض آنکه نیروی ورودی به سازه دارای ماهیتی تصادفی و پهن‌بند باشد، نیازی به اندازه‌گیری نیروی ورودی وجود ندارد. یکی از محبوب‌ترین و پرکاربردترین روش‌های آنالیز مدال عملیاتی، روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته نام دارد. فرآیند شناسایی در این روش بر مبنای تجزیه‌ی مقادیر تکین ماتریس چگالی طیف توان پاسخ سازه قرار دارد. با وجود توانمندی بالا، این روش در تخمین میرایی سازه‌ها عملکرد چندان قابل قبولی ندارد. در این مقاله ابتدا روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته تشریح و قابلیت آن، به‌ویژه در حوزه‌ی تخمین میرایی، بررسی می‌شود. سپس، به منظور بهبود عملکرد آن در تخمین میرایی، استفاده از راه‌کار تخصیص مدال عملکردی پیشنهاد می‌شود. ایده-ی اصلی روش پیشنهادی بر آن اساس استوار است که تابع خودهمبستگی پاسخ خروجی یک سیستم ارتعاشی تحت اثر نویز سفید، با تابع پاسخ ضربه آن سیستم و البته با یک اختلاف فاز مشخص برابر می‌باشد. با استفاده از ۷۰ مرتبه شبیه‌سازی یک سازه‌ی چهارطبقه‌ی برشی تحت اثر بار تصادفی، توانمندی تخمین میرایی روش پیشنهادی در کنار راه‌کار تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته ارزیابی و نتایج به‌دست آمده با یکدیگر مقایسه می‌شود. نتایج حاصل شده، کاهش قابل توجه خطای نسبی و واریانس تخمین میرایی را نشان می‌دهد. همچنین، داده‌های ارتعاش طبیعی پل Z24 به عنوان یک نمونه‌ی سنگ‌نشانه‌ی عملیاتی جهت ارزیابی توانمندی روش پیشنهادی در تخمین میرایی استفاده، و نتایج قابل قبولی ارائه شد.

**واژگان کلیدی:** تخمین میرایی بر مبنای فقط-خروجی، روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته، روش تخصیص مدال عملکردی

## ۱- مقدمه

در شرایط آزمایشگاهی انجام پذیرفت. عملکرد این رویکرد، که با عنوان آنالیز مدال آزمایشگاهی (EMA) شناخته می‌شود، بر

شناسایی آزمایشگاهی پارامترهای مدال، ابتدا در مهندسی مکانیک و به‌منظور آگاهی از رفتار دینامیکی سازه‌های کوچک

حوزه‌ی فرکانسی ( $FDD^1$ ) و تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبود یافته ( $EFDD^6$ ) اشاره نمود. روش انتخاب قله از نخستین و ساده‌ترین راه‌کارهای استفاده شده در آنالیز مدال عملکردی به-شمار می‌آید [5]. روش‌های تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی و نسخه بهبودیافته‌ی آن در اوایل دهه‌ی ۲۰۰۰ میلادی به وسیله برینکر و همکاران پیشنهاد شد و به شدت مورد اقبال پژوهشگران قرار گرفت [6, 7]. راه‌کارهای توانمند و نوین‌تری مانند روش‌های شناسایی منبع کور [8] و روش‌های شناسایی مبتنی بر ماتریس توابع قابلیت انتقال [9] نیز در حوزه‌ی مورد مطالعه شایسته‌ی ذکر هستند. مرور و مطالعه‌ی روش‌های گوناگون آنالیز مدال عملیاتی و جنبه‌های مختلف آن در برخی از مقالات و کتاب‌ها انجام پذیرفته است [10-12].

## ۲- روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبود یافته

روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی در سال ۲۰۰۰ توسط برینکر و همکاران پیشنهاد شد [6]. از فن تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی می‌توان در شناسایی فرکانس‌های تشدید و شکل‌های مدی به صورت هم‌زمان بهره جست. لازم به ذکر است، این شیوه قادر به محاسبه‌ی مقدار میرایی در سازه نیست. به منظور رفع این نقص، روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبود یافته چندی بعد توسط برینکر و همکاران پیشنهاد شد [7]. با استفاده از این شیوه، علاوه بر محاسبه‌ی دقیق‌تر فرکانس‌های طبیعی سازه و شکل‌های مدی، نسبت‌های میرایی نیز قابل تخمین است.

### ۲-۱- مبانی تئوری روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی

پاسخ خروجی یک سیستم دینامیکی با استفاده از مختصات مدی به شکل زیر رابطه‌سازی می‌شود.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) \quad (1)$$

در این معادله  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]$  ماتریس شکل مدی و بردار مولفه‌های مدی  $\mathbf{q}(t) = \{\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \dots, \mathbf{q}_N(t)\}^T$  سیستم است.  $N$  نیز بیانگر تعداد مدهای سازه است. از طرفی، ماتریس تابع همبستگی بردار خروجی سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود.

مبنای اندازه‌گیری پاسخ (پاسخ‌های) خروجی سازه تحت اثر یک یا چند نیروی ورودی معلوم قرار دارد. نقص‌ها و محدودیت‌های موجود در این حوزه (به‌ویژه در رابطه‌ی با سازه‌های بزرگ و پیچیده‌ی مهندسی عمران) پژوهشگران را بر آن داشت تا مشخصه‌های سازه‌ها را تنها بر مبنای پاسخ خروجی سازه و بدون توجه به نیروی ورودی وارد بر آن تخمین بزنند. گفتنی است، باوجود مشکلات اشاره شده، آنالیز مدال آزمایشگاهی بر روی سدها و پل‌های عظیم نیز انجام گرفته است [1]. روش‌هایی که پارامترهای دینامیکی سازه‌ها را تنها بر اساس پاسخ خروجی آن‌ها محاسبه می‌کنند به نام‌های آنالیز مدال عملیاتی ( $OMA^1$ ) و آنالیز مدال فقط-خروجی (فقط-پاسخ) شناخته می‌شوند. مطالعات اولیه در زمینه‌ی آنالیز مدال عملیاتی از دهه‌ی ۱۹۸۰ آغاز شد.

روش‌های شناسایی سیستم در حوزه‌ی آنالیز مدال فقط-پاسخ، دارای شمار فراوانی است. روش‌های ارتعاش طبیعی ( $NEXT^2$ ) از نخستین راه‌کارهای به‌کار گرفته شده در این زمینه به‌شمار می‌آیند. در دهه‌ی ۱۹۹۰ تکنیک‌های ارتعاش طبیعی ابتدا به‌منظور انجام آزمایش مدال روی توربین‌های بادی عمود محور در حوزه‌ی زمانی استفاده شد [2]. روش‌های مبتنی بر مدل  $ARMA^3$  نیز از دیگر راهکارهای شناخته شده در حوزه‌ی زمان آنالیز مدال عملیاتی است. مدل  $ARMA$  یک مدل عمومی از سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان بوده که تحت تحریک نویز سفید قرار گرفته است. با وجود کاربردهای قابل توجه تکنیک‌های  $ARMA$  در گذشته، زمان محاسباتی بالا و قابلیت نه‌چندان مناسب در همگرایی، کاربرد این روش‌ها را محدودتر ساخته است [3]. روش‌های شناسایی زیرفضای تصادفی ( $SSI^4$ )، از شاخص‌ترین شیوه‌های حوزه‌ی زمانی آنالیز مدال عملیاتی محسوب می‌شود. مدل‌های شناسایی مبتنی بر زیرفضای تصادفی به دو دسته‌ی داده محور و کواریانس محور تقسیم می‌شوند [4]. از جمله‌ی روش‌های حوزه‌ی فرکانس آنالیز مدال فقط-پاسخ نیز می‌توان به شیوه‌های انتخاب قله ( $PP^5$ )، تجزیه‌ی

- 1 Operational Modal Analysis
- 2 Natural Excitation Techniques
- 3 Auto-Regressive Moving Average
- 4 Stochastic Subspace Identification
- 5 Peak Picking

6 Frequency Domain Decomposition  
7 Enhanced Frequency Domain Decomposition

زیر قابل بازنویسی است.

$$\mathbf{H}(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{R}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{R}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (7)$$

در اینجا،  $\lambda_n$  قطب و  $\mathbf{R}_n$  باقیمانده متناظر مد  $n$ ام بوده و باقیمانده سیستم نیز با معادله‌ی زیر قابل دسترسی است.

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{a}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T \quad (8)$$

باید دانست،  $\boldsymbol{\gamma}_n$  و  $\mathbf{a}_n$  به ترتیب بردار شکل مدی و بردار مشارکت مدی مد  $n$ ام است. حال اگر نیروی ورودی را یک نویز سفید پهن باند در نظر بگیریم، چگالی طیف توان آن به صورت یک ماتریس ثابت نوشته می‌شود ( $\mathbf{G}_x(i\omega) = \mathbf{C}$ ). اکنون، با انجام محاسبات ریاضی، رابطه‌ی (۷) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\mathbf{G}_y(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} + \frac{\mathbb{B}_n}{-i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbb{B}_n^*}{-i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (9)$$

ماتریس  $\mathbf{A}_n$ ،  $n$ مین باقیمانده‌ی ماتریس چگالی طیف توان خروجی سازه بوده و با معادله‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{C} \sum_{s=1}^N \left( \frac{\mathbf{R}_s^H}{-\lambda_n - \lambda_s^*} + \frac{\mathbf{R}_s^T}{-\lambda_n - \lambda_s} \right) \quad (10)$$

با بهره‌گیری از خاصیت تعامد مدها، ماتریس باقیمانده  $\mathbf{A}_n$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mathbf{R}_n \mathbf{C} \mathbf{R}_n^H}{2\alpha_n} \quad (11)$$

پارامتر  $\alpha_n$  برابر با منفی بخش حقیقی قطب  $n$ ام می‌باشد. آشکار است، در صورت کم بودن میرایی سازه، ترم باقیمانده با بردار شکل مدی متناسب خواهد شد.

$$\mathbf{A}_n \propto \mathbf{R}_n \mathbf{C} \mathbf{R}_n^* = \mathbf{a}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma}_n \mathbf{a}_n^T = \mathbf{b}_n \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T \quad (12)$$

در این رابطه، پارامتر  $\mathbf{b}_n$  یک ثابت اسکالر است. در یک فرکانس مشخص  $\omega$ ، تعداد محدودی از مدها در پاسخ کلی سازه مشارکت خواهند داشت. بنابراین، در سازه‌های با میرایی کم چگالی طیف توان پاسخ خروجی با معادله‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد.

$$\mathbf{G}_y(i\omega) = \sum_{n \in \text{sub}(\omega)} \left( \frac{\mathbf{b}_n \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{b}_n^* \mathbf{a}_n^* \mathbf{a}_n^H}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (13)$$

$\text{sub}(\omega)$  نیز بیانگر مدهای موثر در فرکانس مشخص  $\omega$  می‌باشد. بنابراین، با فرض اعمال نیروی ورودی نویز سفید که به

$$\mathbf{R}_y(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_q(\tau)\mathbf{A}^T \quad (2)$$

در رابطه‌ی فوق  $\mathbf{R}_q(\tau)$  ماتریس تابع همبستگی مختصات مدی سیستم است. لازم به ذکر است، توابع همبستگی تنها به متغیر فواصل زمانی  $\tau$  وابسته است. با انجام تبدیل فوریه از توابع همبستگی می‌توان به تابع چگالی طیفی به شکل زیر دست یافت.

$$\mathbf{G}_y(f) = \mathbf{A}\mathbf{G}_q(f)\mathbf{A}^T \quad (3)$$

در اینجا  $\mathbf{G}_y(f)$  و  $\mathbf{G}_q(f)$  به ترتیب ماتریس چگالی طیف پاسخ خروجی و ماتریس چگالی طیف مختصات مدی است. از آنجایی که ماتریس چگالی توان یک ماتریس هرمیتین بوده و امکان ایجاد مولفه‌های مختلط در شکل‌های مدی نیز وجود دارد، رابطه‌ی (۳) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\mathbf{G}_y(f) = \mathbf{A}[\mathbf{g}_n^2(f)]\mathbf{A}^H \quad (4)$$

بالا نویس  $H$  معرف ماتریس هرمیتین و پارامتر  $\mathbf{g}_n^2(f)$  نیز همان درایه‌های قطری ماتریس چگالی طیفی  $\mathbf{G}_q(f)$  است. اکنون تجزیه‌ی مقادیر تکین ( $\text{SVD}^1$ ) ماتریس چگالی طیفی به صورت زیر انجام می‌پذیرد.

$$\mathbf{G}_y(f) = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}[\mathbf{s}_n^2]\mathbf{U}^H \quad (5)$$

با توجه به روابط (۴) و (۵) مقادیر تکین  $\mathbf{s}_n^2$  (درایه‌های قطری ماتریس  $\mathbf{S}$ ) معادل مقادیر  $\mathbf{g}_n^2(f)$  و همچنین بردارهای تکین ماتریس  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]$  معادل شکل‌های مدی سیستم تلقی خواهد شد.

همانطور که پیش از این اشاره شد، عملکرد قابل قبول روش‌های شناسایی مبتنی بر فقط-پاسخ خروجی سازه در صورت اعمال نیروی ورودی تصادفی و پهن باند، که اصطلاحاً به آن نویز سفید هم گفته می‌شود، اتفاق می‌افتد. از سوی دیگر، رابطه‌ی بین ورودی و خروجی یک سیستم در حوزه‌ی فرکانسی به شکل زیر قابل نمایش است [13].

$$\mathbf{G}_y(i\omega) = \mathbf{H}^*(i\omega) \mathbf{G}_x(i\omega) \mathbf{H}^T(i\omega) \quad (6)$$

در این رابطه،  $\mathbf{G}_x(i\omega)$  ماتریس چگالی طیف توان ورودی و  $\mathbf{H}(i\omega)$  ماتریس تابع پاسخ فرکانسی سیستم است. بالا نویس-های \* و T نیز به ترتیب، نشانگر مفاهیم مزدوج مختلط و ترانزاده است. فرم قطب/باقیمانده تابع پاسخ فرکانسی به شکل

تمامی درجات آزادی وارد می‌شود، نتیجه‌ای مشابه با رابطه‌ی (۶) حاصل می‌شود.

خودهمبستگی سیستم یک درجه آزادی تحت اثر نیروی نوین سفید معادل تابع پاسخ ضربه‌ی آن سیستم است [2]. پاسخ ضربه نیز یک تابع سینوسی میراثونند به فرم زیر است [14].

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (16)$$

پارامتر  $\omega_n$  فرکانس طبیعی سازه است. در شیوه‌ی کاهش لگاریتمی، نقاط اکسترمم (مینیمم، ماکزیمم و یا هر دو) تابع خودهمبستگی یک درجه آزادی برای انجام برازش تابع نمایشی انتخاب می‌شوند. در این روش، ابتدا ضریب کاهش لگاریتمی  $\delta$  با رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$\delta = \frac{2}{k} \ln\left(\frac{r_0}{|r_k|}\right) \quad (17)$$

در این معادله،  $r_0$  و  $r_k$  به ترتیب، نخستین مقدار تابع خودهمبستگی و  $k$  امین نقطه‌ی اکسترمم است. ضریب کاهش لگاریتمی و مقدار اولیه‌ی تابع خودهمبستگی با استفاده از انجام برازش خطی بر  $k\delta$  و  $2\ln(r_k)$  قابل محاسبه است. در پایان نیز، نسبت میرایی ( $\xi$ ) با معادله‌ی زیر تخمین زده می‌شود.

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (18)$$

نکته‌ی مهم در تخمین میرایی، چگونگی انتخاب بازه‌ی تابع خودهمبستگی برای انجام برازش خطی و یا نمایشی است. توصیه می‌شود، بازه‌ی انتخابی خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ نباشد.

### ۳- روش تخصیص مدال عملکردی

روش تخصیص مدال عملکردی ( $INOPMA^3$ ) یکی از روش‌های مبتنی بر فقط-پاسخ بوده و به تازگی توسط یکی از مولفین پیشنهاد شده است [15]. ایده‌ی اصلی این روش بر آن مبنا استوار است که تابع خودهمبستگی پاسخ خروجی یک سیستم ارتعاشی تحت اثر نوین سفید، با تابع پاسخ ضربه آن سیستم و البته با یک اختلاف فاز مشخص برابر است [2]. می‌توان نشان داد با انجام کانولوشن بین تابع خودهمبستگی و تابع سینوسی با فرکانس معین، مدهای سازه تفکیک خواهند شد. اکنون، با استفاده از یک تابع سینوسی دیگر، که دارای اختلاف فاز ۹۰ درجه نسبت به تابع قبلی است، می‌توان میرایی و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم را تخمین زد. در سیستم یک

۲-۲- تخمین پارامترهای مدال با استفاده از روش تجزیه‌ی حوزه-ی فرکانسی بهبود یافته

پس از ثبت پاسخ خروجی یک سازه، نخستین گام در شناسایی پارامترهای مدال، محاسبه‌ی ماتریس چگالی طیف توان پاسخ آن سازه است. در این راستا ماتریس چگالی طیف توان پاسخ در هر فرکانس گسسته  $\omega = \omega_i$  تعیین و سپس تجزیه‌ی SVD روی آن انجام می‌پذیرد. اکنون با رسم مقادیر تکین به دست آمده بر حسب فرکانس، نقاط قله معرف مدهای ارتعاشی سازه است. در همسایگی هر یک از قله‌های نمودار مزبور یک مد (در صورت وجود مدهای مجزا در سازه) غالب خواهد بود. در این صورت معادله‌ی (۱۳) تنها دارای یک ترم است. بنابراین، نخستین بردار تکین در فرکانس  $\hat{a}$  نام نشانگر تخمینی از بردار شکل همان مد ( $\hat{a}$ ) خواهد بود.

$$\hat{a} = u_{i1} \quad (14)$$

از سوی دیگر، مقدار تکین منناظر، معرف تابع چگالی طیف توان تنها یک درجه‌ی آزادی است. این تابع چگالی طیف توان یک درجه آزادی با مقایسه‌ی شکل مدی تخمین زده شده در قله و سایر بردارهای تکین که در مجاورت قله قرار دارند به-دست می‌آید. به این ترتیب که، مقادیر تکینی به عنوان تابع چگالی طیف توان سیستم یک درجه‌ی آزادی انتخاب می‌شوند که بردارهای تکینشان دارای معیار اطمینان مدال ( $MAC^1$ ) بالایی با بردار  $\hat{a}$  باشد ( $MAC \geq \Omega$ ). لازم به ذکر است، معیار اطمینان مدال با رابطه‌ی زیر در دسترس قرار می‌گیرد.

$$MAC_{ij} = \frac{(a_i^T \hat{a}_j)^2}{a_i^T a_i \hat{a}_j^T \hat{a}_j} \quad (15)$$

پس از آن، با اعمال تبدیل فوریه‌ی معکوس بر روی تابع چگالی طیف توان یک درجه‌ی آزادی، تابع خودهمبستگی مرتبط با همان درجه‌ی آزادی به دست می‌آید. برینکر و همکاران برای محاسبه ضریب میرایی از روش کاهش لگاریتمی ( $LDM^2$ ) بهره برده‌اند. مبنای روش مذکور بر آن است که تابع

1 Modal Assurance Criterion

2 Logarithmic Decrement Method

$$\xi\beta(\xi) = \frac{1}{\omega^{*2}} \frac{\partial \tilde{\omega}^{*2}}{\partial \alpha} \quad (25)$$

معادله‌ی فوق مقدار  $\xi$  را با دقت بالایی تخمین می‌زند. پس از محاسبه‌ی نسبت میرایی، فرکانس طبیعی سیستم با رابطه (۲۲) تعیین می‌شود. شایان ذکر است، مولفین در پژوهشی دیگر توانمندی بالای روش پیشنهادی را، حتی در صورت وجود بارهای غیر ایستا، در تخمین فرکانس‌های طبیعی، شکل‌های مدی و نسبت‌های میرایی در سازه نشان داده‌اند [17].

#### ۴- نمونه عددی: قاب برشی چهار طبقه

در این بخش یک سازه‌ی قاب برشی چهار طبقه برای انجام فرآیند ارزیابی و مقایسه، شبیه سازی می‌شود (شکل ۱). جرم و سختی متناظر با هر طبقه به ترتیب برابر با ۱ و ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. سازوکار میرایی سازه از نوع رایلی متناسب در نظر گرفته شده است. ضرایب ماتریس‌های جرم و سختی به گونه‌ای در نظر گرفته شده‌اند که نسبت میرایی مدهای ارتعاشی اول تا چهارم به ترتیب برابر با ۱/۵، ۱/۳۶، ۱/۷۲ و ۲ درصد باشند.

شکل ۱. سازه‌ی چهار طبقه‌ی شبیه سازی شده

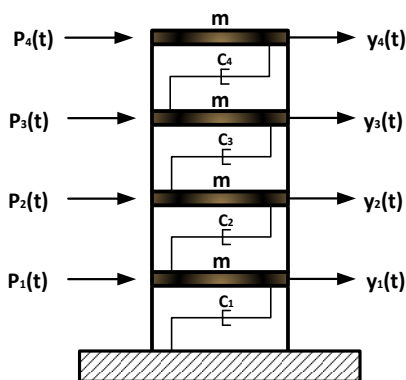


Fig. 1. The simulated four-story shear frame

هر طبقه تحت تاثیر نیروی نویز سفید با توزیع گوسی قرار دارد ( $P(t)$ ). این نیروها نسبت به یکدیگر ناهمبسته می‌باشند. تابع  $y_i(t)$  نیز نمایشگر تاریخچه‌ی زمانی پاسخ تغییر مکان سازه در طبقه‌ی  $i$ ام است. پاسخ سازه با استفاده از روش نیومارک-بتا (شتاب ثابت) و نرخ نمونه برداری ۱۰۰ نمونه در هر ثانیه محاسبه شده است. مدت زمان ارتعاش و ثبت پاسخ سازه نیز

درجه‌ی آزادی با فرکانس طبیعی  $\omega_n$  و نسبت میرایی  $\xi$ ، که تحت اثر نیروی ورودی نویز سفید با دامنه طیف  $S_0$  قرار دارد، تابع خودهمبستگی خروجی به شکل زیر رابطه‌سازی می‌شود.

$$R(\tau) = \frac{S_0 \omega_n}{4\xi} e^{-\xi \omega_n \tau} \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \tau) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \tau) \right] \quad (19)$$

این تابع در حقیقت یک تابع سینوسی میرا شونده با یک اختلاف فاز است که باید در محاسبات وارد شود. اکنون، با انجام کانولوشن بین معادله‌ی (۱۹) و یک تابع سینوسی با فرکانس متغیر  $\omega$  ( $f_1(t) = \sin(\omega t)$ ) تابع سینوسی دیگری با همان فرکانس تولید خواهد شد ( $x(t)$ ). تابع تبدیل متناظر  $G(s) = x(s)/f_1(s)$  با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [14].

$$G(s) = \frac{S_0}{4\xi} \frac{s + 2\xi \omega_n}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (20)$$

با انجام عملیات ریاضی، تانژانت زاویه‌ی فاز تابع تبدیل فوق به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tan(\phi) = -\frac{\omega}{2\xi \omega_n^3} [\omega^2 - \omega_n^2(1 - 4\xi^2)] \quad (21)$$

آشکار است، زاویه‌ی فاز دقیقاً در فرکانس زیر ( $\omega^*$ ) صفر می‌گردد.

$$\omega^* = \omega_n \sqrt{1 - 4\xi^2} \quad (22)$$

این پدیده را تشدید فاز می‌نامیم [16]. لازم به ذکر است، مادامی که نسبت میرایی تعیین نشود، رابطه‌ی (۲۲) فرکانس طبیعی سیستم را مشخص نمی‌کند. بنابراین، پس از تخمین نسبت میرایی، فرکانس طبیعی سیستم بر اساس معادله‌ی (۲۲) حساب می‌شود. پس از محاسبه‌ی  $\omega^*$ ، این بار کانولوشن بین تابع خودهمبستگی و تابع سینوسی به فرم  $f_2(t) = (1 + i\alpha)f_1(t)$  برقرار می‌شود ( $i$  عدد موهومی است).  $\alpha$  نیز فاکتور تغییر دامنه است. در این حالت، تشدید فاز در فرکانس  $\tilde{\omega}^*$  با رابطه‌ی زیر رخ می‌دهد.

$$\tilde{\omega}^* = \omega^* \sqrt{1 + \alpha \xi \beta(\xi)} \quad (23)$$

تابع  $\beta(\xi)$  نیز با معادله‌ی زیر نشان داده می‌شود.

$$\beta(\xi) = (1 - 4\xi^2)^{-3/2} \quad (24)$$

اکنون، با تغییر دامنه‌ی  $\alpha$  و محاسبه‌ی فرکانس تشدید فاز جدید، نسبت میرایی با حل معادله‌ی زیر تخمین زده خواهد شد.

طبقه در شکل (۳) به نمایش درآمده است. این نمودار هماهنگی بسیار خوبی را بین شکل‌های مدی تخمین زده و دقیق نشان داده و حاکی از عملکرد مناسب روش تجزیه‌ی حوزی فرکانسی در شناسایی شکل‌های مدی نمونه کنونی است.

جدول ۱. پارامترهای مدال سازه‌ی چهار درجه آزادی

Vibration mode	first	Second	Third	Fourth
Exact natural frequency [Hz]	0.55	1.59	2.44	2.99
Estimated natural frequency [Hz]	0.56	1.60	2.44	2.98
Exact mode shapes	1 0.8794 0.6527 0.3473	1 0 -1 -1	1 -1.3473 -0.5321 1.5321	1 -2.5321 2.8794 -1.8794
Estimated mode shapes	1 0.8781 0.6499 0.3457	1 0 -1.008 -1.0007	1 -1.3126 -0.5059 1.4835	1 -2.5528 2.8571 -1.8114

Table 1. Modal parameters of the 4 DoF frame

باید دانست، ماتریس  $S$  در رابطه‌ی (۵)، مقادیر تکین را در هر فرکانس مشخص به صورت نزولی مرتب می‌کند. بنابراین، نخستین مقدار تکین بیشترین سهم را در مشارکت مدهای سازه در فرکانس‌های مختلف دارد. لازم به ذکر است، تعداد درایه-های غیر صفر ماتریس مقادیر تکین، مرتبه‌ی ماتریس طیف پاسخ را در یک فرکانس مشخص بیان می‌کند. در صورتی که مدهای ارتعاشی یک سازه کاملاً از یکدیگر مجزا باشند، نمودار مقدار تکین نخست در امتداد دامنه‌ی فرکانسی، قله‌هایی را در تمامی فرکانس‌های طبیعی سازه نشان می‌دهد. این درحالی است که سایر مقادیر ویژه دارای دامنه‌ی کوچکی است.

شکل ۳. نمودار MAC برای مثال سازه چهار درجه آزادی

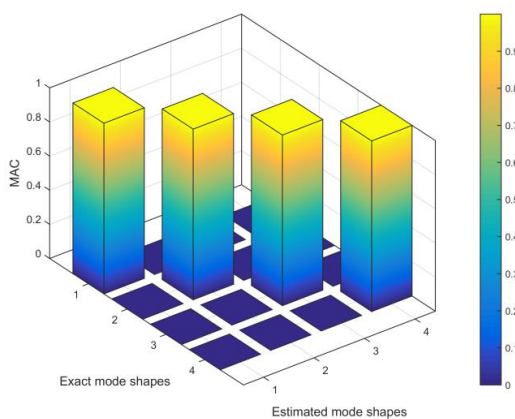


Fig. 3. The MAC diagram of the 4 DoF frame

۶۰۰۰ ثانیه می‌باشد. تاریخچه‌ی پاسخ هر یک از طبقات ۶۰۰۰ نقطه را شامل می‌شود.

۴-۱- تحلیل سازه‌ی چهار طبقه با روش تجزیه‌ی حوزی فرکانسی

جهت محاسبه‌ی ماتریس چگالی طیف توان خروجی از شیوه‌ی ولج و به‌کارگیری تابع پنجره‌ای همینگ با ۶۰۰۰ نقطه و همپوشانی ۶۰٪ استفاده شده است. پس از تعیین ماتریس چگالی طیف توان خروجی، تجزیه‌ی مقادیر تکین انجام شده و نمودار مقادیر تکین رسم می‌گردد. همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، نمودار مقادیر تکین دارای ۴ قله بوده که هر یک از آن‌ها نشانگر یکی از مدهای ارتعاشی چهارگانه‌ی سازه است.

بردارهای تکین تخمین زده شده در قله‌ها نیز نماینده‌ی شکل‌های مدی سازه می‌باشد. با توجه به شکل (۲)، فرکانس‌ها و شکل‌های مدی تخمین زده شده توسط این روش در جدول (۱) نشان داده شده است.

شکل ۲. نمودار تجزیه‌ی مقادیر تکین ماتریس چگالی طیف توان

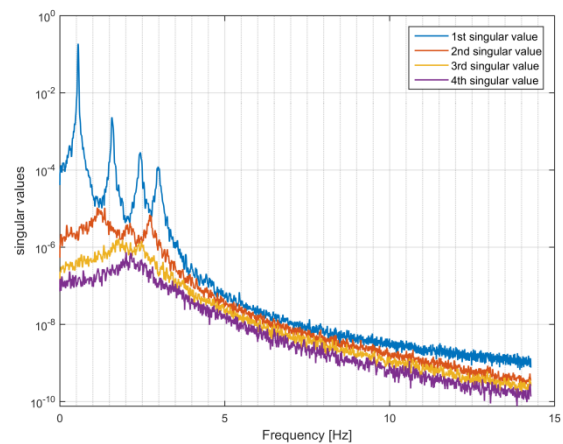


Fig. 2. Singular value decomposition of PSD matrix

برای سنجش دقت تخمین شکل‌های مدی، از معیار MAC استفاده می‌شود. با توجه به رابطه‌ی (۱۵) و خاصیت تعامد مدها، معیار  $MAC_{ij}$  بایستی برای مقادیر  $i = j$  نزدیک به یک و برای مقادیر  $i \neq j$  نزدیک به صفر به‌دست آید. نمودار MAC بین شکل‌های مدی تخمین زده شده و دقیق برای سازه‌ی چهار

انجام هر مرتبه شبیه سازی نیروها تغییر کرده و تفاوت اندکی در نتایج نیز حاصل خواهد شد. بنابراین، فرآیند شبیه سازی ۷۰ بار تکرار و نتایج حاصله با یکدیگر مقایسه می شود. در هر بار انجام آزمایش نیروی تصادفی ناهمبسته و جدیدی تولید و به سازه اعمال شده است. برای سنجش دقت روش ها در تخمین میرایی، از خطای نسبی ( $RE^2$ ) تخمین میرایی بر اساس رابطه زیر استفاده می شود.

$$RE = \frac{|\xi_n - \hat{\xi}_n|}{\xi_n} \quad (24)$$

در این معادله،  $\xi_n$  و  $\hat{\xi}_n$  به ترتیب، نسبت میرایی تخمین زده شده و دقیق برای مد  $m$  است. شکل (۵) نتایج مقدار خطای نسبی تخمین میرایی مربوط به روش پیشنهادی (EFDD-INOPMA) و روش برینکر و همکاران (EFDD-LDM) را برای مدهای اول تا چهارم سازهی چهارطبقه و در ۷۰ مرتبه آزمایش نشان می دهد. خطهای افقی در این نمودارها بیانگر میانگین خطای نسبی تخمین ها در مجموع ۷۰ آزمایش شبیه سازی است. میانگین خطای ۷۰ آزمایش مربوط به روش پیشنهادی در تمامی مدهای ارتعاشی سازه نسبت به روش تجزیهی حوزهی فرکانسی بهبودیافته کاهش قابل توجهی را نشان می دهد. بر اساس این نتایج، روش پیشنهادی در مقایسهی با راه کار تجزیهی حوزهی فرکانسی بهبودیافته قادر به تخمین میرایی سازه با خطای نسبی و عدم قطعیت بسیار کوچکتر بوده است.

یادآوری می کند، فرآیند روش های شناسایی پارامترهای مدال فقط-خروجی، در بستر تصادفی اتفاق می افتد. به سخن دیگر، پاسخ های به دست آمده منحصر بفرد نیستند و در هر بار انجام فرآیند شناسایی، نتایج متفاوتی حاصل خواهد شد. بنابراین، شاخص واریانس تخمین نیز حائز اهمیت بسیاری است. از این رو، به منظور سنجش دقیق تر قابلیت تخمین روش ها، واریانس مقادیر تخمین میرایی نیز در ادامه محاسبه و بررسی می شود. شکل (۶) واریانس تخمین میرایی را برای مدهای اول تا چهارم سازه نشان می دهند. توضیح آن که، پس از هر بار انجام فرآیند شبیه سازی، واریانس مقادیر نسبت های میرایی تخمین زده شده در همان آزمایش و آزمایش های قبل از آن محاسبه و در نمودارهای مربوطه به نمایش درآمده است.

در مرحلهی بعد، توابع چگالی طیف توان یک درجهی آزادی با استفاده از معیار MAC ( $\Omega = 0.8$ ) محاسبه می شوند. سپس با اعمال تبدیل فوریهی معکوس روی تابع چگالی طیف توان یک درجهی آزادی، تابع خود همبستگی مرتبط با همان درجهی آزادی به دست می آید.

#### ۴-۲- تخمین میرایی

همان گونه که پیشتر اشاره شد، با وجود توانمندی بالای روش تجزیهی حوزهی فرکانسی بهبودیافته در محاسبهی فرکانس های طبیعی و شکل های مدی در سازه ها، تخمین میرایی با چالش ها و عدم قطعیت های بیشتری صورت می گیرد. در این بخش، تخمین میرایی در سازهی چهار طبقه به وسیلهی الگوریتم های تجزیهی حوزهی فرکانسی بهبودیافته و تخصیص مدال عملکردی انجام و نتایج کسب شده با یکدیگر مقایسه می شود. تخمین نسبت های میرایی در هر دو روش بر مبنای تابع خودهمبستگی خروجی قرار دارد. بازه های انتخابی توابع خودهمبستگی خروجی برای مدهای اول تا چهارم به ترتیب، ۲۰۰۰، ۱۲۰۰، ۸۰۰ و ۶۰۰ گام تاخیر زمانی در نظر گرفته شده است. شکل (۴) توابع خودهمبستگی نرمال شده ( $NCF^1$ ) را برای مدهای چهارگانهی نمونه عددی مقاله نشان می دهد.

شکل ۴. توابع خودهمبستگی خروجی نرمال شده

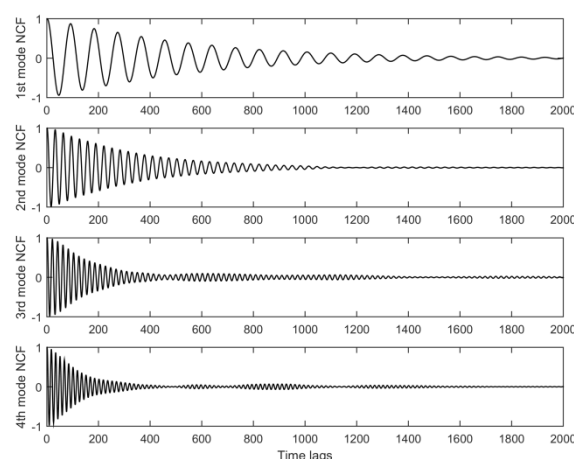


Fig. 4. Normalized auto-correlation functions

از آنجایی که نیروهای وارد بر سازه از نوع تصادفی هستند، با

بر اساس نتایج مزبور نسبت‌های میرایی تخمین زده شده توسط روش پیشنهادی در مقایسه با روش برینکر و همکاران دارای واریانس کوچکتری است. نتایج ارزیابی معرف آن است که در هریک از چهار مد ارتعاشی سازه، پراکندگی نتایج تخمینی در ۷۰ فرآیند شبیه‌سازی با استفاده از روش پیشنهادی به میزان قابل توجهی کاهش یافته است. برتری الگوی پیشنهادی نسبت به راهکار تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبود یافته از دو جنبه‌ی میزان خطا و واریانس تخمین نسبت‌های میرایی مشهود است. جدول (۲) نتایج کلی حاصل از ۷۰ مرتبه آزمایش شبیه‌سازی را برای هر دو روش نشان می‌دهد. این نتایج شامل میانگین، واریانس و خطای نسبی مقادیر نسبت‌های میرایی تمامی آزمایش‌ها است.

بر اساس نتایج جدول مزبور، میانگین خطای نسبی و همچنین واریانس تخمین نسبت میرایی تمامی آزمایش‌ها با استفاده از روش پیشنهادی (EFDD-INOPMA) کاهش چشمگیری داشته است. این بهبود در تمامی مدهای چهارگانه سازه‌ی مطالعه شده قابل مشاهده است.

جدول ۲. نتایج کلی در تخمین نسبت‌های میرایی سازه‌ی چهارطبقه

Vibration mode	first	Second	Third	Fourth
$\xi$ %	1.5	1.36	1.72	2
Mean of $\xi$ % (EFDD-LDM)	3.21	1.41	1.25	1.37
Relative error	1.41	0.17	0.29	0.32
Mean of $\xi$ % (EFDD-INOPMA)	1.53	1.38	1.69	1.99
Relative error	0.22	0.09	0.07	0.06
Variance of $\xi$ % (EFDD-LDM)	2.85e-5	8.97e-6	8.3e-6	1.14e-5
Variance of $\xi$ % (EFDD-INOPMA)	1.99e-5	2.70e-6	2.2e-6	2.60e-6

Table 2. Final results of estimated modal damping ratios

### ۵- نمونه عملیاتی: پل بتنی Z24

در این بخش توانایی روش پیشنهادی در تخمین نسبت‌های میرایی برای یک نمونه آزمایش ارتعاش طبیعی سازه‌ی ساخته شده مورد سنجش واقع می‌شود. در این راستا، پل پیش‌تینده بتنی Z24 واقع در کشور سوئیس به عنوان یک سازه‌ی سنگ

شکل ۵. خطای نسبی تخمین نسبت‌های میرایی

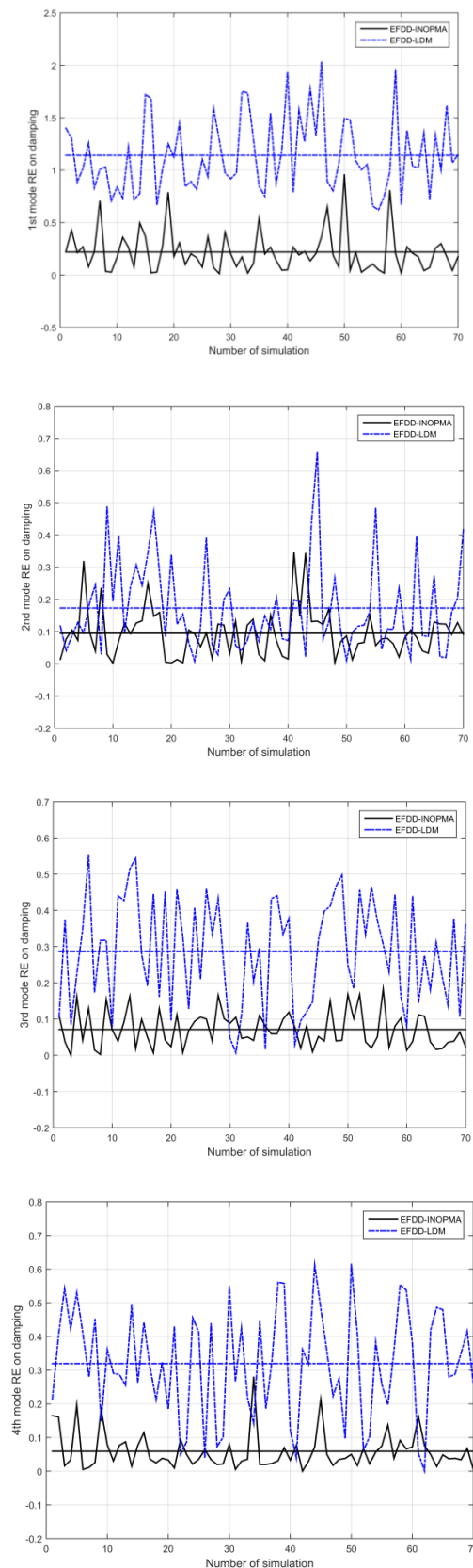


Fig. 5. RE of estimated damping ratios



پل Z24 دارای سه دهانه بوده و با طول کلی ۶۰ متر اتصال بین زوریخ و برن را مقدور می‌سازد (شکل ۷).

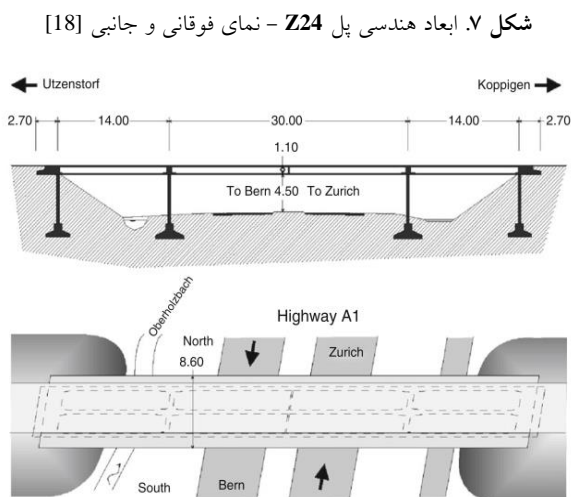


Fig. 7. Schematic of the z24 bridge [18]

این پل در سال ۱۹۹۸ با اعمال چندین سناریوی تخریب توسط یک تیم تحقیقاتی از دانشگاه کی یولوون بلژیک تحت آزمایش ارتعاش طبیعی قرار گرفته و تا به امروز به عنوان یک نمونه‌ی سنگ نشانه برای ارزیابی متدهای عیب‌یابی و شناسایی مدال مبتنی بر خروجی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله داده‌های تست ارتعاش طبیعی پل با استفاده از ۲۶ سنسور شتاب سنج و با فاصله‌ی گام زمانی سه صدم ثانیه و مدت زمان اندازه‌گیری حدود ۱۱ دقیقه برای تخمین نسبت‌های میرایی مدال ۴ مد ارتعاشی نخست به کار گرفته می‌شود. برای شناسایی فرکانس‌های طبیعی، ابتدا دیاگرام پایداری مبتنی بر تکنیک SSI ترسیم و تفسیر می‌شود. شکل (۸) نمودار مقادیر ویژه تجزیه‌ی ماتریس طیف توان خروجی (به روش EFDD) به همراه دیاگرام پایداری مبتنی بر میرایی (به روش SSI) را برای تخمین ۴ مد نخست ارتعاشی پل Z24 نشان می‌دهد. نشان‌های آبی و قرمز به ترتیب نشانگر مدهای پایدار و ناپایدار است. شکل‌های مدی و فرکانس‌های طبیعی مربوط به ۴ مد نخست پل Z24 نیز در شکل (۹) به نمایش درآمده است.

نشانه شناخته شده استفاده می‌شود [18].

شکل ۶. واریانس تخمین نسبت‌های میرایی

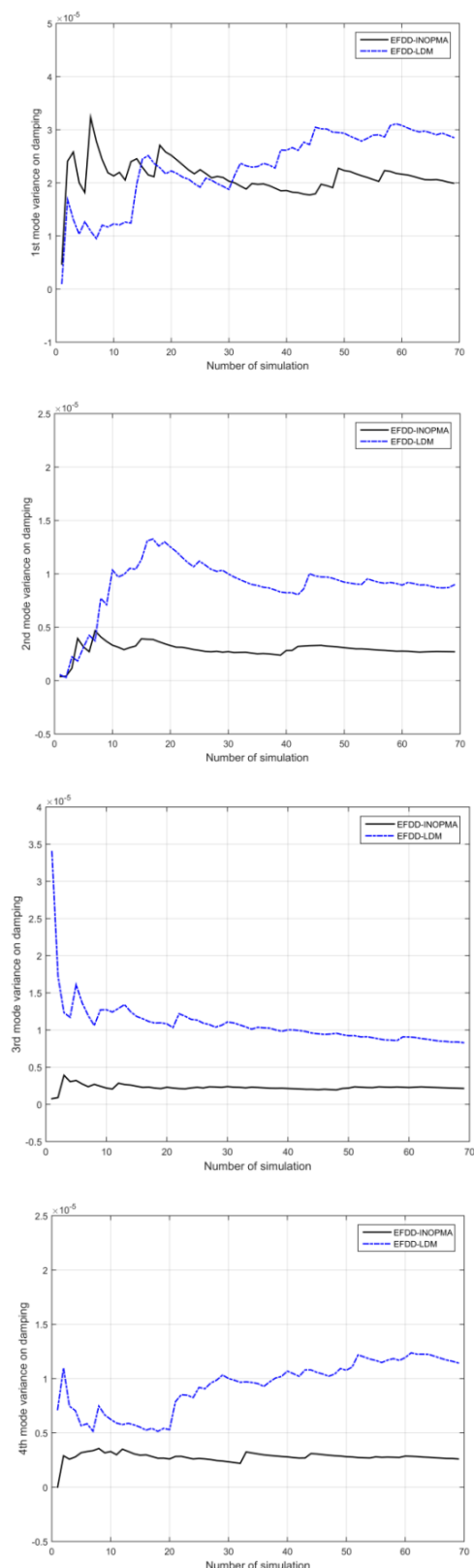


Fig. 6. variance on estimated damping ratios

نسبت‌های میرایی مدهای اول و دوم مناسب است. حال آنکه، به دلیل مشارکت ضعیفتر مدهای سوم و چهارم تخمین میرایی با آنچه توسط روش‌های توانمند حوزه‌ی زمانی محاسبه شد فاصله‌ی قابل توجهی دارد.

جدول ۳. تخمین نسبت‌های میرایی ۴ مد ارتعاشی نخست پل Z24

Vibration mode	first	Second	Third	Fourth
Estimation method	$\xi$ %			
EFDD-LD	0.897	1.756	0.878	0.191
EFDD-INOPMA	0.745	1.689	1.393	2.018
SSI-UPC	0.769	1.313	1.603	2.523
SSI-PC	0.733	1.545	1.787	1.963
SSI-CVA	0.792	1.502	1.377	NA

Table 3. First four estimated damping ratios of Z24 bridge

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از معرفی شیوه‌ی تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی بهبودیافته به عنوان یکی از محبوبترین روش‌های حل حوزه‌ی آنالیز مدال فقط پاسخ، عملکرد این روش در تخمین میرایی با تحلیل یک قاب برشی چهار طبقه شبیه سازی شده ارزیابی می‌شود. همچنین، مولفان راه‌کار تخصیص مدال عملکردی را به منظور تخمین نسبت‌های میرایی سیستم، پیشنهاد و عملکرد آن را بر مبنای روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی ارزیابی می‌کنند. ایده‌ی اصلی این روش بر آن اساس استوار است که تابع خودهمبستگی پاسخ خروجی یک سیستم ارتعاشی تحت اثر نویز سفید، با تابع پاسخ ضربه آن سیستم و البته با یک اختلاف فاز مشخص برابر است. نتایج ارزیابی، توانمندی بالاتر روش پیشنهادی را در تخمین میرایی نسبت به الگوریتم EFDD نشان می‌دهد. به منظور انجام دقیق‌تر فرآیند مقایسه، علاوه بر خطای نسبی تخمین میرایی، واریانس تخمین نیز به عنوان شاخص کیفیت عملکرد روش‌های مذکور ارزیابی شده است. در تمامی مدهای ارتعاشی سازه، روش پیشنهادی خطای نسبی و همچنین واریانس کمتری را در تخمین میرایی بر اساس روش تجزیه‌ی حوزه‌ی فرکانسی نشان می‌دهد. برای انجام فرآیند ارزیابی و مقایسه، سازه‌ی قاب برشی چهار طبقه ۷۰ بار شبیه‌سازی شده است. همچنین، داده‌های ارتعاش طبیعی پل Z24 به عنوان یک نمونه‌ی سنگ نشانه‌ی عملیاتی برای ارزیابی توانمندی روش پیشنهادی در تخمین میرایی استفاده، و با نتایج حاصل از

شکل ۸. دیاگرام پایداری و مقادیر ویژه ماتریس طیف توان خروجی

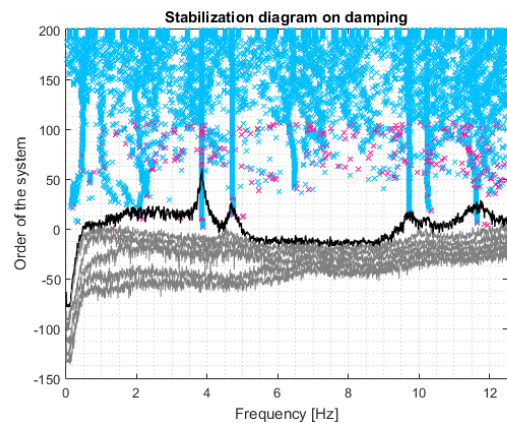


Fig. 8. Stabilization diagram and singular values of the PSD matrix of Z24 bridge

با تعیین فرکانس‌های طبیعی، عملیات تخمین نسبت‌های میرایی برای هر دو روش EFDD و روش پیشنهادی آغاز می‌شود. برای ارزیابی درستی نتایج دست آمده، نسبت‌های میرایی با استفاده از روش توانمند حوزه‌ی زمانی SSI نیز محاسبه می‌شود. از سوی دیگر، به منظور تجزیه‌ی ماتریس هنکل کواریانس نیز سه روش مختلف  $PC^1$ ،  $CVA^2$ ،  $UPC^3$  به کار گرفته می‌شود

شکل (۹) شکل‌های مدهای طبیعی ۴ مد نخست [19]

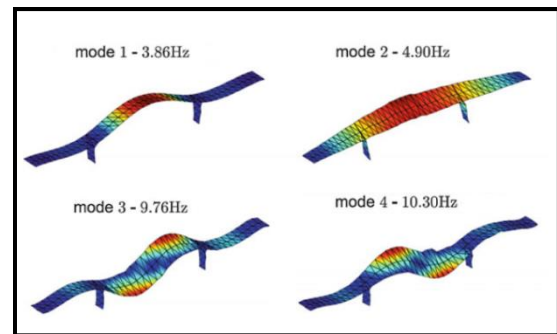


Fig. 9. First four Mode shapes and natural frequencies [19]

نتایج تخمین میرایی در جدول (۳) آمده است. بر اساس این نتایج، روش پیشنهادی بر خلاف راه‌کار EFDD-LD عملکرد مناسبی در تخمین نسبت‌های میرایی حتی برای مدهایی که مشارکت ضعیفتری در پاسخ اندازه‌گیری شده از سازه دارند را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده از روش EFDD برای تخمین

- 1 Principal Component
- 2 Canonical Variant Analysis
- 3 Unweighted Principal Component

10. Ghalishooyan, M., & Shooshtari, A. 2015. Operational modal analysis techniques and their theoretical and practical aspects: A comprehensive review and introduction. In *Proceedings of the 6th IOMAC*. Gijón, Spain.
11. Rainieri, C., & Fabbrocino, G. (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Springer.
12. Magalhães, F., & Cunha, Á. 2011. Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(5), 1431–1450.
13. Bendat, J. S., & Piersol, A. G. 2010. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures* (4th edition.). Hoboken, New Jersey: Wiley.
14. Meirovitch, L. 1986. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill.
15. Abdelghani, M., & Inman, D. J. 2015. Modal Appropriation for Use with In-Operation Modal Analysis. *Shock and Vibration*, 2015(ID 537030).
16. Balmes, E., Chapelier, C., Lubrina, P., & Fargette, P. 1996. An Evaluation of Modal Testing Results Based on the Force Appropriation Method. In *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference*. Orlando, Florida.
17. Abdelghani, M., Ghalishooyan, M., & Shooshtari, A. 2017. A Comparative Assessment of In-Operation Modal Analysis and Frequency Domain Decomposition Algorithm Using Simulated Data. In *Advances in Acoustics and Vibration* (pp. 215–221). Springer.
18. Peeters, B., & De Roeck, G. 2001. One-year monitoring of the Z24-Bridge: environmental effects versus damage events. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(2), 149–171.
19. Reynders, E., & Roeck, G. D. 2014. Vibration-Based Damage Identification: The Z24 Bridge Benchmark. *Encyclopedia of Earthquake Engineering* (pp. 1–8).

روش‌های EFDD و SSI مقایسه شد. روش پیشنهادی عملکرد مناسبی در تخمین نسبت‌های میرایی حتی برای مدهایی که مشارکت ضعیفتری در پاسخ اندازه‌گیری شده از سازه دارند را نشان می‌دهد.

## References

## ۷- مراجع

1. Cunha, Á., & Caetano, E. 2006. Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures. *Sound and Vibration*, 6(40), 12–20.
2. James, G. H., Crane, T. G., & Laufer, J. 1995. The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 10, 260–277.
3. Andersen, P. 1997. *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*. Ph.D. Thesis, Aalborg University, Denmark.
4. Peeters, B., & De Roeck, G. 2001. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4), 659–667.
5. Allemang, R. J. 1999. *Vibrations: Experimental Modal Analysis*. Structural Dynamics Research Laboratory, Department of Mechanical, Industrial and Nuclear Engineering, University of Cincinnati.
6. Brincker, R., Zhang, L., & Andersen, P. 2000. Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. In *Proceedings of the 18th IMAC*. San Antonio, Texas.
7. Brincker, R., Ventura, C., & Andersen, P. 2001. Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition. In *Proceedings of the 19th IMAC*. Orlando, Florida.
8. Poncelet, F., Kerschen, G., Golinval, J. C., & Verhelst, D. 2007. Output-only modal analysis using blind source separation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6), 2335–2358.
9. Devriendt, C., & Guillaume, P. 2008. Identification of modal parameters from transmissibility measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 314(1–2), 343–356.

# Output-only damping estimation of structures using enhanced frequency domain decomposition method

M. Ghalishooyan<sup>1</sup>, A. Shooshtari<sup>2\*</sup>, M. Abdelghani<sup>3</sup>

1- Ph.D. Candidate of Structural Engineering, Faculty of Civil Eng., Ferdowsi University

2- Assistant Prof., Structural Eng. Dept., Faculty of Civil Eng., Ferdowsi University

3- Associate Prof., Mechanical Eng. Dept., Faculty of Mechanical Eng., ISSAT Sousse University

\*ashoosht@um.ac.ir

## Abstract:

Modal parameter identification of structures is of significant importance in many fields of civil and mechanical engineering. Output-only modal identification methods have gained great attention of civil engineers community in recent years. The algorithms estimating the dynamic parameters (natural frequencies, mode shape vectors and modal damping ratios) of structures just based on the output responses, became popular as operational modal analysis (OMA) or output-only modal analysis or ambient vibration analysis. In the context of OMA, the force acting on the structure should be stochastic, smooth and broadband and there is no need to measure it. Therefore, these methods are appropriate for identification of huge and complex civil structures. One of the most well-established and popular methods of OMA is frequency domain decomposition (FDD) proposed by Brincker et al. Estimation procedure of FDD is based on singular value decomposition of power spectral density matrix of structure responses. Then, the single degree of freedom spectral bell is obtained using modal assurance criteria (MAC) and transformed to correlation function of corresponded degree of freedom by inverse Fourier transform. Later, Brincker et al. presented the enhanced frequency domain decomposition (EFDD) method to estimate not only modal frequencies (with higher accuracy in the comparison with FDD) and mode shapes, but also modal damping ratios. Despite the high capability of EFDD in frequency and mode shape estimation, it still suffers from some limitations in identifying modal damping ratio. This paper first aims to investigate the modal parameters identification by EFDD and explains its merits and demerits and then proposes in-operation modal appropriation (INOPMA) algorithm for use with EFDD to improve the modal damping estimation. The key idea of INOPMA is to realize that the correlation sequence of the system output (subjected to random input) is the sum of decaying sinusoids with a certain phase shift and therefore it may be considered as an impulse response. The convolution of this correlation sequence with a pure sine wave allows the isolation of the mode at a characteristic frequency which depends on the modal damping ratio. By using a force in quadrature of phase with a sine wave, it is possible to estimate the damping ratio which in turn allows the estimation of the undamped natural frequency. In fact, modal damping ratios are first estimated by INOPMA and natural frequencies are then identified based on damping ratio values. By 70 times simulation of a four-story shear frame, capability of proposed method is validated for damping estimation through EFDD analysis. The results are then compared with the ones derived from the typical EFDD method. Regarding randomness of input force, different results are obtained by each new simulation run. So, the comparison process should be performed based on several numbers of simulations. The number of simulation was adopted in a way that the mean or variance of estimated modal damping ratios converges to a constant value. The relative error (the exact value minus the estimated value over the exact value) and variance of the set of the estimated modal dampings are regarded as comparison indexes. Finally, it is shown that by proposed method, the damping ratios are estimated with much less variance and error. Moreover, the ambient vibration test data of Z24 bridge was utilized as a benchmark application case in order to evaluate the capability of the proposed method for modal damping estimation and favorable results were obtained.

**Keywords:** Output-only modal damping estimation, Enhanced frequency domain decomposition method, In-operation modal appropriation algorithm.