

## مدل سازی هندسی

### بتن بر اساس اجزای ساختاری آن

ایرج رسولان<sup>۱\*</sup>، سید امیرالدین صدر نژاد<sup>۲</sup>، علیرضا باقری<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری سازه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- استاد بخش مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۳- استادیار بخش مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Rasoolan82@yahoo.com

تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۰۵/۰۵

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۰۷/۲۳

**چکیده** - مطالعات تحلیلی و تجربی نشان می‌دهد که رفتار بتن به شدت از ریز ساختار آن تأثیر می‌پذیرد، لذا در پیش‌بینی خواص و رفتار بتن باید آن را به صورت یک ماده‌ای سه فازه مشتمل بر سنگدانه‌ها، ماتریس و ناحیه انتقالی در نظر گرفت. انتخاب نوع سنگدانه‌ها، اندازه و توزیع آن‌ها خواص بتن را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با توجه به توزیع تصادفی سنگدانه‌ها و تنوع اندازه آن‌ها در بتن، مدل‌سازی رفتار بتن بر اساس اجزای ساختاری آن در مقیاس ریزبینی مشکل است. برای این منظور باید فرضیات ساده‌کننده‌ای را به کار ببریم. در این مقاله، با داشتن طرح اختلاطی مشخص توأم با منحنی دانه‌بندی با توزیع و تنوع اندازه سنگدانه‌های معین، روش ساده‌ای برای جایگزینی سنگدانه‌های واقعی با سنگدانه کروی معادل با قطر مؤثر، به همراه ضرایب مربوطه بیان می‌شود. یعنی می‌توان در نمونه بتنی، به جای روش‌های پیچیده هندسی و مبتنی بر احتمالات یا روش‌های تصویربرداری با استفاده از روشی ساده، قطر مؤثر را تعیین و سپس با آن قطر، دو نوع چینش مرزی با حداکثر و حداقل حجم سنگدانه‌ها را به عنوان المان پایه قابل تکرار استخراج کرد. در نتیجه المانی ساده شده خواهیم داشت که می‌توان از آن در مدل‌سازی رفتاری نمونه‌های بتنی در حالت ریزمقیاس و سه‌فازی استفاده نمود.

**کلیدواژه‌گان:** سنگدانه، شکل معادل، بتن، ناحیه انتقالی، دانه بندی، قطر مؤثر، سطح مخصوص

#### ۱- مقدمه:

مقیاس ریز بینی<sup>۲</sup> نیاز است. در مدل‌های اولیه، بتن به صورت دو فاز شامل سنگدانه و خمیر سیمان در نظر گرفته می‌شد اما تحقیقات نشان می‌دهد که با نادیده گرفتن ناحیه انتقالی در بتن (ناحیه بین خمیر سیمان و سنگدانه)، باند پایینی ناحیه هاشین و اشتریکمن<sup>۳</sup> برای مدول الاستیک بتن بیش‌تر از

در بحث بررسی سازه‌های بتنی فرض می‌شود که بتن ماده‌ای همگن است در صورتی که در اصل بتن شامل اجزای مختلفی مانند خمیر سیمان، سنگدانه شن، ماسه و هوا دارد وجود این اجزا در تعیین رفتار بتن حائز اهمیت است؛ لذا برای توصیف اثر ساختار بتن بر رفتار درشت‌بینی<sup>۱</sup> آن، به استفاده از مدل در

2- Mesoscopy  
3- Hashin and Shtrikman

1- Macroscopy

را توسعه دادند؛ سپس در سال ۲۰۰۲ ون مایر مدل را کاملتر کرد [۱۱]. بازانت در سال ۱۹۹۹ نوع خرپای آنرا و در سال ۲۰۰۳ بازانت مدل آرایش شده شبکه‌ای را به کار برد [۱۲]. در سال ۲۰۰۴ لی لیو مدلی سه بعدی را به صورت محدود استفاده کرد [۱۳]. در مدل شبکه‌ای سنگدانه‌ها به صورت نقطه در نظر گرفته می‌شود که به وسیله المان تیر به یکدیگر وصل می‌شوند و هر بخش از المانی که در هر جزء تیر قرار می‌گیرد با خواص آن در نظر گرفته می‌شود. مدل‌ها معمولاً دوبعدی بوده و هم‌چنین در حالت سه‌بعدی اثر شکل سنگدانه‌ها در آن بررسی نمی‌شود. در این مدل‌ها فاز سوم دیده نشده یا بصورت میانگینی از خواص سایر فازها در نظر گرفته می‌شود. استفان اسکات و همکاران نیز سنگدانه‌ها را به صورت بیضی در نظر گرفته و در حالتی محدود مدلسازی کردند؛ آن‌ها ناحیه انتقالی را در نظر نگرفته و سنگدانه‌ها را صلب فرض کردند و مدل آن‌ها دوبعدی بوده که حالت خاصی از یک نمونه را در نظر می‌گرفت [۱۴]. در سال ۲۰۰۴ زیو و تانگ مدل دوبعدی دو فازه را مطرح کردند. در مدل آن‌ها بعد از شبکه بندی، نمونه‌ای مکعبی براساس توزیعی تصادفی اجزا بتن انتخاب می‌شود [۱۵]. گربوسزی و بنتز نیز تجاربی در زمینه تعیین مشخصات اجزای بتن دارند. [۱۶].

آنچه از بررسی مراجع فوق مشخص می‌شود این است که بیش‌تر مدل‌های هندسی دو بعدی، دو فازه و به صورت محدود بوده و اثرات دانه بندی در آن‌ها دیده نشده است. در این مقاله با توجه به کاستی‌ها و یا پیچیدگی‌های مدل‌های فوق، روشی ارائه می‌شود که بر اساس منحنی دانه‌بندی سنگدانه برای نمونه بتنی، بتوان با مشخص کردن تمامی اجزای آن، مدلی را ارائه کرد که در عین سادگی، سه‌بعدی و سه‌فازه بوده و از آن بتوان به عنوان المان پایه در بررسی رفتار نمونه بتنی استفاده کرد.

مدول الاستیک اندازه گرفته شده در بتن است [۱]. لذا باید بتن را به صورت ماده مرکب سه‌فازه‌ای در مقیاس ریزینی در نظر گرفت؛ یعنی فاز سوم یا ناحیه انتقالی بین سنگدانه و خمیر سیمان نیز مد نظر قرار گیرد. بدیهی است که این ناحیه اثر قابل توجهی بر نفوذپذیری و مدول ارتجاعی و مقاومت و رفتار بتن دارد که باید مورد توجه قرار گیرد [۲ و ۳]. ریز ساختار بتن نخست در سال ۱۹۸۵ توسط روئلف استرا مطالعه شد. پس او ویتمن در سال ۱۹۹۸ مدلی به نام عددی سازی بتن را ارائه و در آن ملات و دانه‌ها و فضای بین آن‌ها را به وسیله چند المان کوچکتر از سایز دانه‌ها مدلسازی کردند [۴]. بیوکازتراک بتن را به صورت دو فازه مدلسازی کرد اما عاملی مهم در بررسی و رشد ریزترکها یعنی نحوه قرارگیری دانه‌ها را مد نظر قرار نداد [۵]. چن در سال ۱۹۹۱ دو نمونه ساده را با ملحوظ کردن نحوه قرارگیری دانه‌ها در نظر گرفت که در آن مدل دوبعدی و دوفازی بود [۶]. در سال ۱۹۹۷ اشرف راغب محامد یک مدل دوبعدی و محدود را ارائه کرد [۷]. در سال ۲۰۰۴ لویز ریزساختار بتن را به وسیله المان‌های الاستیک پیوسته مدلسازی کرد که قطعات دانه‌ها و ماتریس را با شکل‌هایی چند وجهی مدلسازی و برای ناحیه اتصال، المان با ضخامت صفر را استفاده نمود. مدل وی مدلی سه بعدی اما دوفازه و محدود بود [۸]. بعدها روش المان مجزا و مدل فنر جسم صلب<sup>۱</sup> به کار رفت. این روش در سال ۱۹۹۱ توسط کاوائی ارائه شد. سپس ناگائی ماده را به المان‌هایی صلب و چندوجهی (توصیف کننده سنگدانه‌ها و ماتریس) که صفحات آن‌ها به وسیله فنر وصل می‌شوند تقسیم کرد؛ در سال ۲۰۰۴ وی مدلسازی سه‌بعدی پیچیده‌ای را به کار برد [۹].

در سال ۱۹۹۵ چلانگن و ون مایر [۱۰] مدلی شبکه‌ای<sup>۲</sup>

1- RBSM  
2- Lattice

## ۲- ساختار اجزای بتن

فازهای اصلی در مصالح بتنی سنگدانه‌ها و خمیر سیمان است. همان‌طوری که گفته شد مطالعات مصالح بتنی، حضور فاز دیگری به نام ناحیه انتقالی را مطرح می‌کند که اطراف سنگدانه‌ها را احاطه می‌کند.

مقاومت ناحیه انتقال حدود ۲۰ تا ۳۰ درصد مقاومت ماتریس است. انیل وهمکاران [۱۹] مدل سه‌فازه و چهارفازه را با در نظر گرفتن خصوصیات و اثر ناحیه انتقالی مانند مدول ارتجاعی، ضخامت و اندازه دانه‌ها برای پیش‌بینی مدول ارتجاعی مؤثر بتن ارائه کردند.

### ۱-۲- ناحیه انتقالی

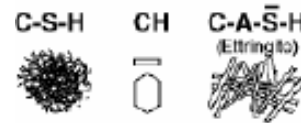
درباره این ناحیه یعنی ضعیف‌ترین پیوند زنجیره، به‌عنوان فاز محدود کننده مقاومت در بتن، اطلاعات تجربی اندکی وجود دارد. بر اساس آزمایشها، اندازه این ناحیه از ۳۰ تا ۵۰ میکرون مانند شکل (۱) متغیر است؛ اما در عین حال اثر قابل توجهی بر رفتار مکانیکی بتن دارد و غیرخطی بودن منحنی تنش و کرنش قبل از اوج را می‌توان ناشی از حضور ترک‌های لایه‌ای در این ناحیه دانست.

### ۲-۲- سنگدانه‌ها

با توجه به این‌که حدود ۶۰ تا ۹۰ درصد حجم بتن را سنگدانه‌ها تشکیل می‌دهد. بنابراین سنگدانه‌ها مهم‌ترین و بیش‌ترین جزء تشکیل‌دهنده بتن بوده و مهم‌ترین مسأله در مدل‌سازی، شکل سنگدانه‌ها است. سنگدانه‌ها به شکل بیضوی، کروی، شکسته و مانند آن مطابق با (شکل ۲) بوده و لذا در مدل‌سازی نوع شکل و چینش و ملاحظات مربوط به هر شکل باید مد نظر قرار گیرد.



شکل (۲) انواع سنگدانه‌ها



شکل (۱) ساختار ناحیه انتقالی بین سنگدانه و خمیر سیمان [۳]

تعیین مشخصات ریاضی و شکل دانه‌ها از آن رو اهمیت دارد که بتوانیم دانه‌های مختلف را دسته‌بندی کرده و هم‌چنین بتوانیم ارتباط خصوصیات شکل سه‌بعدی دانه‌ها را به خواص به‌طور کمی توصیف کنیم.

خواص کمپوزیت‌های متشکل از ذراتی که در یک ماتریس قرار دارند بیش‌تر به‌وسیله شکل و اندازه ذرات آن تعیین می‌شود. از نظر ریاضی، تعیین ویژگی‌های شکلی ذره در حالت سه‌بعدی، به‌ویژه وقتی ذره بنا به دلایلی قابل نباشد، کار ساده‌ای نیست. حتی در صورتی که بتوان آن را مانند ذرات استفاده شده در بتن تشخیص داد، با توجه به تصادفی بودن سه‌بعدی ذرات، تعیین ریاضی شکل آن دشوار است.

وجود ناحیه انتقالی موجب رشد ترک پی در پی در بتن و در نتیجه غیرخطی شدن رفتار بتن می‌شود. مطابق با مطالعات گربوسزی [۱۶]، مدول یانگ این ناحیه، یک سوم تا یک دوم مدول یانگ مربوط به توده خمیر سیمان است. مطابق روش گنجایش دوپل و تئوری موری تاناکو، مدول یانگ این ناحیه ضخامت ۲۰ میکرون حدود ۲۰ تا ۴۰ درصد مدول ماتریس و ضخامت ۴۰ میکرون، حدود ۵۰ تا ۷۰ درصد مدول ماتریس است [۱۶]. مطابق تحقیقات یانگ [۱۷]، این تغییرات وابسته به توزیع سنگدانه‌ها است. لویی و موری تاناکو [۱۸] رابطه‌ای را برای پیش‌بینی بخش حجم ناحیه انتقالی ارائه کردند. نتایج تجربی نشان می‌دهد که

### ۲-۲-۲- شکل معادل

برای تعریف مناسب شکل، نیاز به چند پارامتر و برای برخی از شکلهای، به دست آوردن رابطه‌ای بین ابعاد، خواص هندسی مانند سطح و حجم نیاز است. برای اجسام منظم تعداد زیادی پارامتر برای بیان این روابط نیاز است.

در این زمینه شکل معادل مطرح می‌شود. برای ساختن شکل معادل، نخست یک یا چند خواص هندسی انتخاب و آن خواص برای ذرات نامنظم اندازه‌گیری شده و سپس شکل منظم انتخاب می‌شود.

خواص هندسی انتخاب شده باید برای شکل منظم به صورت تحلیلی شناخته شده باشد. گام آخر، تعیین ابعاد شکل منظم با معادل قرار دادن خواص هندسی شکل نامنظم با خواص هندسی مشخص شکل منظم و حل آن برای به دست آوردن ابعاد شکل منظم است. این شکل منظم به عنوان شکل منظم معادل با ذره با خواص هندسی شکل نامنظم است.

مثالی از شکل معادل یک پارامتری، حجم کره معادل است که قطر آن با فشرده سازی کره برای یکسان شدن حجم آن با سنگدانه نامنظم به دست می‌آید. اگر اندازه‌گیری مساحت سطحی و حجم میسر باشد، می‌توان مساحت سطحی ویژه یعنی نسبت مساحت سطح بر حجم را برای تعریف کره یا مکعب به کار برد. با توجه به محدودیت‌های مدل‌های یک پارامتری می‌توان از مدل یک و یا سه پارامتری استفاده کرد.

همچنین می‌توان با استفاده از روابط فناوری بتن و منحنی دانه‌بندی، سنگدانه‌ها را دسته‌بندی و تعداد سنگدانه‌های متناسب با هر اندازه از قطر را به دست آورد. در این مقاله به جای استفاده از تصاویر دیجیتالی و توابع ریاضی هارمونیک پیچیده، از روش ساده‌ای استفاده شده که در بخش بعدی توضیح داده شده است.

با ورود فن پردازش دیجیتالی تصویر و به کمک اشعه  $x$  پرتو نگاری، برش لیزری و فتوگرامتری محققین در تلاش برای تعیین شکل سنگدانه‌ها به طور خودکار هستند. با کاربرد این روش‌ها، مشخصات بیش‌تری از سنگدانه‌ها شامل مساحت، مقطع عرضی، جهت، محیط، توزیع اندازه و پارامترهای حجمی مخلوط را می‌توان اندازه‌گیری کرد. اوتاس و گربوسزی تجاربی را در این زمینه گزارش کرده‌اند [۲۰].

### ۲-۲-۱- شکل سنگدانه‌ها

تصادفی بودن ساختار بتن با توجه به وجود ناحیه انتقالی و همچنین دامنه وسیع اندازه سنگدانه‌ها، مدل سازی آن را پیچیده می‌سازد. لذا برای مدل‌سازی باید فرض‌های ساده‌کننده‌ای را در نظر گرفت.

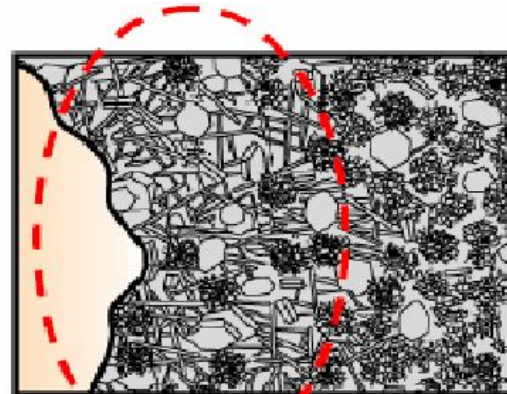
فرض اول در مسأله دسته بندی سنگدانه‌ها و در نظر گرفتن محدوده‌ای معین برای سنگدانه‌ها است. برای این منظور می‌توان ذرات ریزتر از اندازه‌ای خاص را به عنوان نمونه ۵ میلی‌متر را در محدوده خمیر سیمان در نظر گرفت. فرض دوم در نظر گرفتن شکل هندسی مناسبی برای سنگدانه‌ها است. در مدل‌سازی سنگدانه‌ها را معمولاً کروی یا بیضوی در نظر می‌گیرند. البته بیش‌تر دانه‌ها شکل کروی ندارند لذا باید غیر کروی بودن سنگدانه‌های واقعی و اختلاف در بین دانه‌ها در غیر کروی را توصیف کنیم. برای این منظور می‌توان از رابطه بین مساحت و حجم ذرات به کره معادل مانند مطالعات گربوسزی استفاده کرد.

در حالت سه‌بعدی می‌توان با استفاده از تابع هارمونیک کروی و سری فوریه، برخی از مشخصات سنگدانه‌ها را به دست آورد. یا مانند استفان [۲۱] فرمول‌بندی عمومی توابع پایه بیضیگون با تغییر نما را برای شکل‌های مختلف به کمک فرمول دانه‌بندی فولر به کار برد، یا مانند کونسلاو شکل‌های گوشه‌دار را مانند راسل و پتیژن تحلیل کرد [۲۲].

## ۲-۲-۳- معیار چینش و شکل سنگدانه‌ها

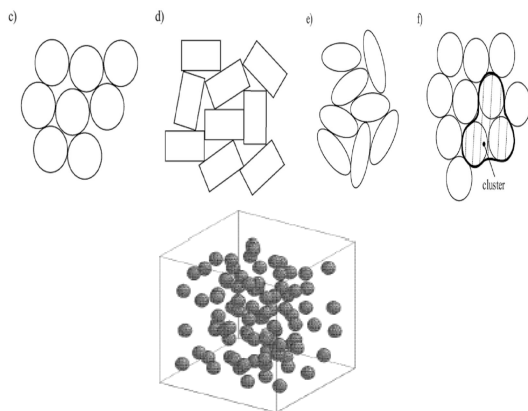
در مورد چینش دانه‌ها چند گزینه وجود دارد: (۱) توزیع منظم سنگدانه‌ها (۲) استفاده از توزیع نامنظم (۳) استفاده از توابع توزیع احتمالی (۴) روش پرتو نگاری که پس از تحلیل و بررسی نمونه‌های رایج، از توزیعی با بیش‌ترین امکان نزدیکی به واقعیت را دارد استفاده می‌شود. در این مقاله از روش گزینه استفاده می‌شود.

می‌توان توزیع احتمالی یکنواخت را برای موقعیت هر دانه در نمونه فرض کرد. پس از انتخاب نمونه‌ای با تعداد و اندازه مشخص سنگدانه، تولید عددهای تصادفی، مختصات موقعیت مرکز هر سنگدانه مشخص شده و برای هر موقعیت جدید بررسی می‌شود که با موقعیت قبلی و با مرز نمونه همپوشانی نداشته باشد. اگر همپوشانی به وجود آمد، برگشت داده شده و موقعیت جدیدی تعریف می‌شود. قرار گرفتن دانه‌ها به ترتیب اندازه بزرگ بوده و این روند تا آخرین سنگدانه ادامه می‌یابد. به این ترتیب تمامی دانه‌ها به‌طور تصادفی قرار می‌گیرند و نمونه شامل المان مرکب پایه مملو از سنگدانه‌ها، مانند شکل (۳) کامل می‌شود. در این روش مسأله همپوشانی نیز بررسی می‌شود. پس از تعیین موقعیت سنگدانه‌ها بقیه حجم نمونه، خمیر سیمان است.



شکل (۳) چینش سنگدانه‌ها با توزیع احتمالی

اگر از سنگدانه‌های بیضیگون شود، به نُه پارامتر ورودی (قطرها، مختصات نقطه مرکزی و زوایای اوپلری) نیاز خواهیم داشت و معادله به شکل  $X^TAX=0$  است  $X=(x,y,z,1)^T$  مختصات همگن است. برای کنترل همپوشانی بیضی‌ها می‌توان مطابق الگوریتم وانگ با نوشتن مشخصه چند جمله‌ای دوبیضی، ریشه را بدست آوریم. اگر دو ریشه مثبت داشته باشد آنگاه آن دو از هم جدایند. تاینگ [۲۳] نیز دلیل استفاده از شکل بیضوی را داشتن بردار عمود یکتا و هم‌چنین قابلیت توصیف سطح آن با یک تابع و سادگی الگوریتم تماس بیان کرد. جانسن شکل خوشه‌ای را استفاده کرد. نیمه‌صلب بودن خوشه‌ها از طریق فرض گرفتن رفتار الاستیک خطی تماس بین ذرات متعلق به آن گروه توصیف می‌شود. نلسون نیز شکل چندوجهی را استفاده کرد که پیچیدگی سطوح و عملکرد در رئوس دارد (شکل ۴).



شکل (۴) شکل سنگدانه‌ها در مدل‌های تاینگ، جانسن و نلسون [۲۳].

## ۳- مدل سازی هندسی

## ۳-۱- منحنی دانه‌بندی

دانه‌بندی سنگدانه‌ها به صورت رابطه‌ای بین اندازه الک استاندارد  $X_i$  و مقدار کل عبوری از الک  $Y_i(x_i)$  تعریف می‌شود. این رابطه را می‌توان به وسیله رابطه، جدول یا

هم‌چنین می‌توان رابطه تساوی بین حاصل ضرب درصد و حجم هر یک از سنگدانه‌ها را با درصد و حجم  $D_{50}$  به صورت زیر نوشت:

$$\rho_1 \pi D_1^3 / 6 + \rho_2 \pi D_2^3 / 6 + \dots + \rho_N \pi D_N^3 / 6 = \rho_{D_{50}} \pi D_{50}^3 / 6 \quad (2)$$

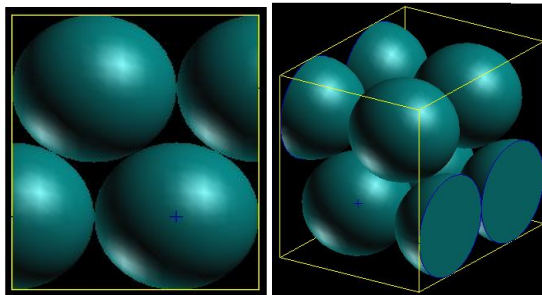
اگر رابطه (۱) را برای مختصات قطر معادل بنویسیم، داریم:

$$\rho = f(D_{50}, D_{max}, D_{min}, \rho_{min}, \rho_{max}) \quad (3)$$

به کمک دو رابطه بالا قطر معادل بدست می‌آید. برای تکمیل مدل‌سازی باید تعداد سنگدانه‌های با قطر معادل نیز محاسبه شود و مدل المان پایه برای مدل‌سازی بکار رود. برای این منظور به چند ضریب تبدیل نیاز است که روش به دست آوردن آن‌ها در بخش بعدی آورده خواهد شد.

### ۳-۲- انتخاب شکل المان پایه

برای آرایش سنگدانه‌ها می‌توان یک المان مکعبی مملو از کره‌های هم‌اندازه را در دو نوع چینش (۱): منظم بر در هم (با حداکثر حجم) و (۲): منظم روی هم (با حداقل حجم) را در نظر بگیریم. مهم‌ترین سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه تعدادی کره و چه اندازه‌ای را برای مکعب در نظر بگیریم. اگر از کره‌های با شعاع مختلف استفاده کنیم، نتایج چینش کره‌های با شعاع‌های ۱، ۰.۷۵، ۰.۵ و ۰.۲۵ سانتی‌متر در حالت اول بصورت شکل (۶) و جدول (۱) است.

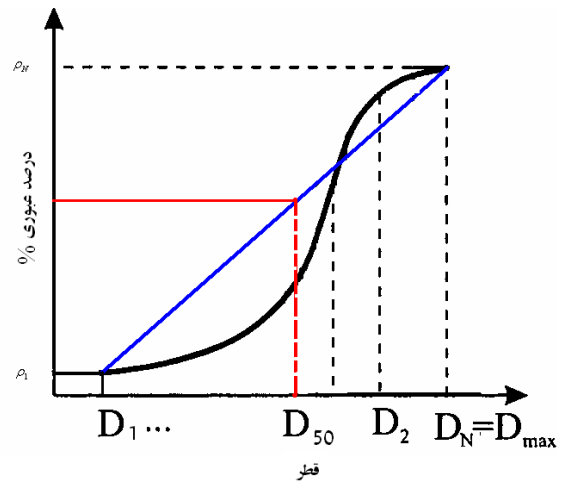


شکل (۶) چینش ذرات در حالت اول - منظم درهم

منحنی بیان کرد نمونه‌های مختلفی از منحنی‌های ایده‌ال وجود دارد که از میان آن‌ها می‌توان به منحنی فولر<sup>۱</sup>، گریفس<sup>۲</sup>، ریسل<sup>۳</sup> بولومی<sup>۴</sup> اشاره کرد.

اگر در منحنی دانه‌بندی مفروض، بزرگ‌ترین اندازه سنگدانه‌ها  $D_{max}$ ، درصد عبوری یا مانده آن  $\rho_N$ ، کوچک‌ترین اندازه سنگدانه‌ها با  $D_{min}$  و درصد عبوری یا مانده آن با  $\rho_1$  نشان داده شود می‌توان منحنی دانه‌بندی را مطابق شکل (۳) به‌طور تقریبی با رابطه خطی زیر توصیف کرد:

$$\rho_1 = f(D, D_{max}, D_{min}, \rho_{min}, \rho_{max}) \quad (1)$$



شکل (۵) منحنی دانه‌بندی سنگدانه‌ها و تقریب آن با خط مستقیم

با توجه به مشکلات و پیچیدگی‌های مدل‌سازی و تنوع اندازه سنگدانه‌ها، برای در نظر گرفتن تمامی سنگدانه‌ها در حالت سه بعدی می‌توان روش ساده زیر را به کار برد: به جای استفاده از تمامی سنگدانه‌های با تعداد و اندازه‌های مختلف، از یک قطر معادل  $D_{50}$  استفاده کرده و نمونه مورد نظر را با سنگدانه‌هایی با این قطر معادل در نظر می‌گیریم.

- 1- Fuller
- 2- grafs
- 3- rissel
- 4- bolomeys

حالت نیز کوچک‌ترین المان پایه قابل تکرار را در نظر گرفته‌ایم هم‌چنین اگر در این حالت به‌جای شش کره مطابق شکل ۶-الف از هشت کره مطابق شکل ۶-ب نیز استفاده کنیم، در نتیجه بی‌تأثیر است. در این حالت نیز درصد حجمی سنگدانه‌ها ثابت و برابر  $52/3\%$  است. با توجه به نتایج فوق حجم سنگدانه‌ها در دو حالت به‌ترتیب برابر  $D^3/6$  و  $6D^3$  است.

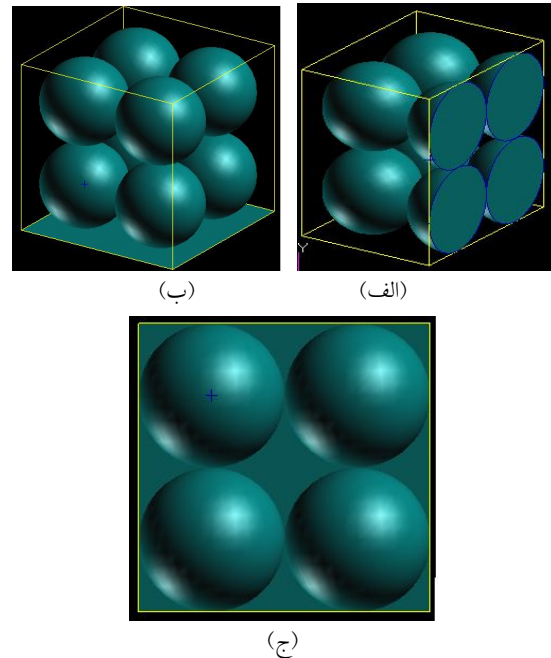
### ۳-۳- روابط ریاضی

با توجه به تعداد و تنوع اندازه سنگدانه‌ها، برای مدل‌سازی هندسی بتن و آماده‌سازی نمونه برای مدل‌سازی رفتاری، می‌توان به‌کمک چندین ضریب، منحنی سنگدانه‌ها را به نمونه‌ای متشکل از سنگدانه‌های کروی با یک اندازه معین تبدیل کرد. برای این منظور می‌توان از نسبت‌های بین حجم کلی و سطح مخصوص سنگدانه‌ها به حجم و سطح مخصوص سنگدانه‌های کروی معادل استفاده کرد. اگر مقدار سنگدانه‌ها مطابق طرح اختلاط مورد نظر در واحد حجم برابر  $a \text{ Kg/m}^3$  و وزن سیمان برابر  $c \text{ Kg/m}^3$  باشد، برای نمونه‌ای مشخص با حجم معین  $V_m$ ، وزن کلی سنگدانه‌ها برابر  $M = a \cdot V_m$  بوده و حجم سنگدانه برابر  $V_v$  مطابق با:  $V_v = V_m \cdot f$  (f درصد حجمی سنگدانه‌ها) و  $V_p$  حجم خمیر سیمان است.

تعداد سنگدانه با هر اندازه مشخص  $D_i$  برابر با  $N_i = \frac{\Psi_i M}{\rho_a V_i}$  است که  $V_i$  حجم تقریبی سنگدانه کروی،  $\Psi_i$  نسبت بین جرم سنگدانه‌های با قطر  $D_i$  به کل دانه‌ها،  $\rho_a$  چگالی جرمی دانه‌ها و  $N$  تعداد مشخصه اندازه برای توصیف توزیع سنگدانه‌ها است.

آنچه مهم است آن است که کوچک‌ترین المان پایه قابل تکرار را در نظر گرفته‌ایم. در نظر گرفتن تعداد کرات در جهت z (عمود به صفحه) بر یک کره یا بیش‌تر، تأثیری در نتیجه نخواهد داشت. مطابق جدول بالا درصد حجمی سنگدانه‌ها در تمامی حالت‌ها ثابت و برابر  $56\%$  خواهد بود.

اگر برای چینش سنگدانه‌ها حالت (۲) مطابق شکل ۷ را در نظر بگیریم نتایج به‌دست آمده مطابق با جدول (۲) است.



شکل (۷) چینش حالت دوم و کوچک‌ترین المان پایه با (۱):- شش کره (۲): هشت کره (۳) حالت دوبعدی

در این حالت نیز کوچک‌ترین المان پایه قابل تکرار را در نظر گرفته‌ایم. هم‌چنین اگر در این حالت به‌جای ۶ کره مطابق شکل ۶-الف از هشت کره مطابق شکل ۶-ب نیز استفاده کنیم، در نتیجه بی‌تأثیر است. در این حالت نیز درصد حجمی سنگدانه‌ها ثابت و برابر  $52/3\%$  است. در این

جدول (۱) نتایج چینش ۱

درصد سنگدانه‌ها	حجم ماتریس $\text{cm}^3$	حجم کره‌ها $\text{cm}^3$	حجم نمونه ( $\text{cm}^3$ )	ابعاد نمونه مکعبی (cm)	شعاع کره (r) (cm)
٪۵۶	۱۹/۶۶۴۶	۲۵/۱۲	۴۴/۷۸۴۶	۳*۴*۳/۷۳۲۰۵	۱
٪۵۶	۸/۳	۱۰/۵۹	۱۸/۸۹	۲/۲۵*۳*۲/۷۹۹	۰/۷۵
٪۵۶	۲/۴۵۸	۳/۱۴	۵/۵۹۸	۱/۲*۲*۱/۸۶۶۰۲۵	۰/۵
٪۵۶	۰/۳۰۷۷۵	۰/۳۹۲	۰/۶۹۹۷۵	۰/۷۵*۱*۰/۹۳۳	۰/۲۵

جدول (۲) نتایج چینش ۲

درصد سنگدانه‌ها	حجم ماتریس $\text{cm}^3$	حجم کره $\text{cm}^3$	حجم نمونه ( $\text{cm}^3$ )	ابعاد نمونه مکعبی (cm)	شعاع کره (r) (cm)
٪۵۲/۳	۲۲/۸۸	۲۵/۱۲	۴۸	۳*۴*۴	۱
٪۵۲/۳	۹/۶۵۲۵	۱۰/۵۹۷۵	۲۰/۲۵	۲/۲۵*۳*۳	۰/۷۵
٪۵۲/۳	۲/۸۶	۳/۱۴	۶	۱/۵*۲*۲	۰/۵
٪۵۲/۳	۰/۳۵۷۵	۰/۳۹۲۵	۰/۷۵	۰/۷۵*۱*۱	۰/۲۵

خمیر سیمان برابر  $V_p$  است. آنگاه برای سنگدانه‌های کروی، سطح مخصوص سنگدانه‌ها یعنی نسبت بین مساحت سطحی به حجم برابر  $S_{cr} = \frac{N\pi D^2}{V_m}$  است که با جایگزینی داریم:

$$S_{cr} = \frac{6N(\pi D^2)/6}{V_m/D} = 6f_1/D \quad (6)$$

$$S_c = \frac{f \sum_{i=1}^n 6V_i/D_i}{V_m} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{S_{cr}}{S_c} = \frac{6f_1/D}{S_c} \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{V_{cr}}{V_v} = \frac{N\pi D^2/6}{f_1 V_m} \quad (9)$$

### ۳-۴- کاربرد نظریه پیشنهادی برای نمونه‌های سنگدانه

اگر در یک طرح اختلاط، مقدار آب، سیمان، شن و ماسه برای ساخت نمونه بتنی به ترتیب برابر ۱۵۵، ۳۶۹، ۹۹۲ و ۷۶۰ کیلوگرم بر متر مکعب و حجم اجزا به ترتیب ۱۵۵ برابری، ۰/۱۱۷، ۰/۳۷۰، ۰/۲۸۸ متر مکعب باشد و از چند نوع منحنی دانه‌بندی استفاده کنیم می‌توانیم نتایج حاصل را در جداول زیر خلاصه کنیم.

اگر چگالی جرمی سنگدانه‌ها مشخص نباشد، می‌توان آن را از نسبت  $\frac{W}{C}$  و چگالی جرمی سیمان  $\rho_c$  از رابطه زیر به دست آورد. (w حجم آب در پیمان،  $\rho_c$  چگالی جرمی سیمان: برای سیمان معمولی تقریباً برابر  $3150 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  و  $\rho_w = 1000$  (حجم هوا حذف شده است).

$$\rho_a = \frac{a}{1 - \frac{C}{\rho_c} - \frac{w}{\rho_w}} \quad (4)$$

اگر حجم و سطح مخصوص سنگدانه‌ها برای نمونه بتن معین به ترتیب برابر  $V_v$  و  $S_c$  و حجم و سطح مخصوص کراه‌های معادل به ترتیب  $V_{cr}$  و  $S_{cr}$  باشد، می‌توان نسبت‌های زیر را در نظر گرفت:

$$\alpha = \frac{V_{cr}}{V_v} \quad \beta = \frac{S_{cr}}{S_c} \quad (5)$$

با در نظر گرفتن سنگدانه‌ها به صورت کروی با اندازه مشخص  $D$ ، بخش حجمی سنگدانه‌ها یعنی نسبت حجم سنگدانه‌های کروی به حجم کل برابر  $f_1 = \frac{N(\pi D^3)/6}{V_m}$  و سطح کل ذرات برابر  $A_{ag} = N\pi D^2$  و حجم ماتریس یا



نمونه مکعبی  $v_m$  برابر  $۰.۰۰۸$  متر مکعب، حجم ماتریس  $v_p$  برابر  $۰.۰۲۸$  متر مکعب و حجم سنگدانه‌ها،  $v_v$  برابر  $۰.۰۵۲۶$  متر مکعب مطابق روابط قبلی است.

به همین ترتیب اگر منحنی‌های (۲) تا (۸) را مطابق شکل (۹) و (۱۰) استفاده کنیم، نتایج مشابهی به دست می‌آید.

پس از حل معادلات و تعیین مشخصات برای دو نوع چینش، نتایج به صورت جدول (۴) خواهد بود.

با توجه به نتایج جدول ۴ مشاهده می‌شود که اگر چه قطر مؤثر در ردیف ۳ و ۷ و ۸ مساوی و برابر ۱۵ میلی‌متر است اما از منحنی دانه‌بندی و ضریب  $\beta$  می‌توان استنباط کرد که مقدار ریزدانه‌ها در ردیف ۸ و سپس ۷ بیش‌تر بوده، بنابراین سطح مخصوص بیش‌تر شده و در نتیجه موجب کاهش ضریب  $\beta$  شده است. لذا باید برای در نظر گرفتن این اثر و اثر محدوده درصد حجمی سنگدانه‌ها در دو نوع آرایش (محدوده ۵۶٪ - ۳/۵۲٪)، قطر مؤثر اصلاح شود. به همین دلیل قطر مؤثر اصلاح شده مطابق جدول (۵) می‌باشد.

به عنوان نمونه اگر از منحنی دانه‌بندی (۱) شکل (۸) استفاده کنیم، می‌توان برای منحنی بالا معادله (۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\rho = 2/4342D + 7/2943 \quad (10)$$

با قرار دادن مختصات برای  $D_{80}$  در معادله بالا داریم:

$$\rho_{80} = 2/4342D_{80} + 7/2943 \quad (11)$$

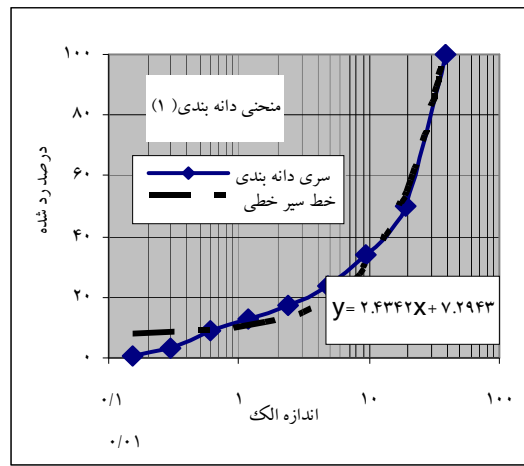
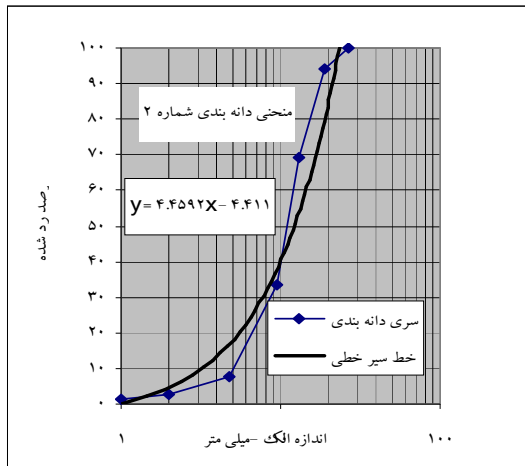
اگر رابطه (۲) را برای مختصات  $D_{80}$  بنویسیم:

$$99/5\pi(0/15^2)/6 + 97\pi(0/3^2)/6 + 91\pi(0/6^2)/6 + 87\pi(1/18^2)/6 + 83\pi(2/36^2)/6 + 76\pi(4/75^2)/6 + 66\pi(9/5^2)/6 + 50\pi(19^2)/6 + 0\pi(38/1^2)/6 = \rho_{D_{80}} \pi D_{80}^2 / 6$$

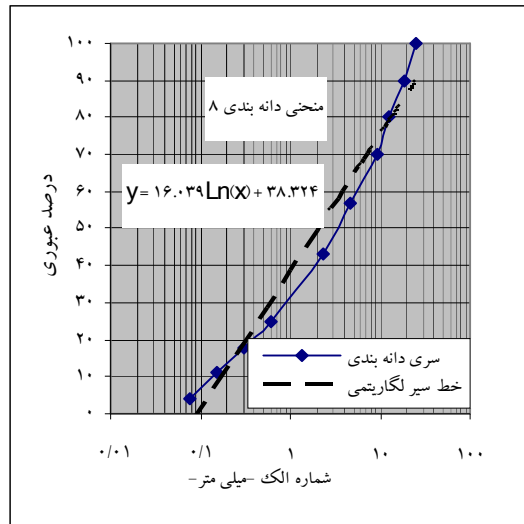
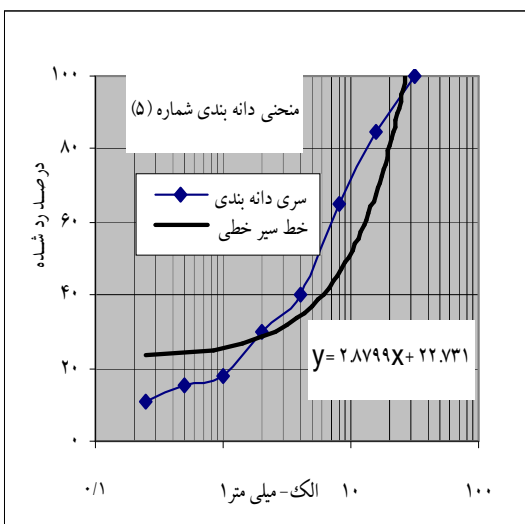
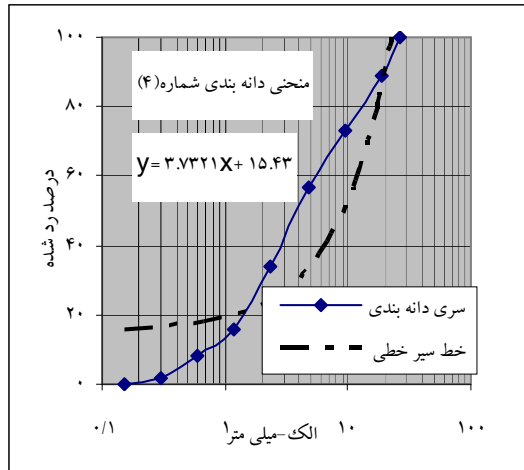
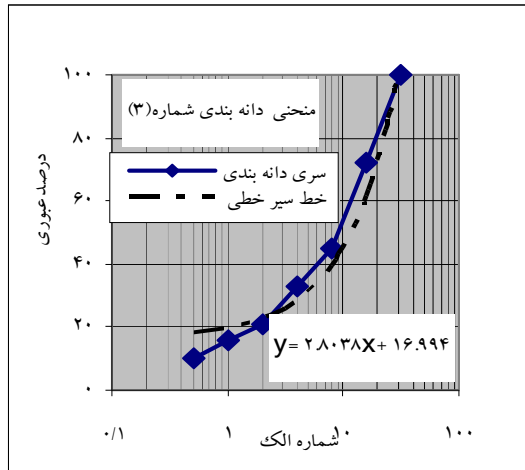
از حل معادلات فوق قطر معادل برابر  $D_{80} = 19/5$  به دست می‌آید. نتایج کامل این منحنی برای نمونه‌ای بتن مکعبی به ابعاد ۲۰ سانتی متر در جدول شماره (۳) آورده شده است. در این جدول وزن سنگدانه‌ها برابر ۱۴ کیلوگرم، حجم

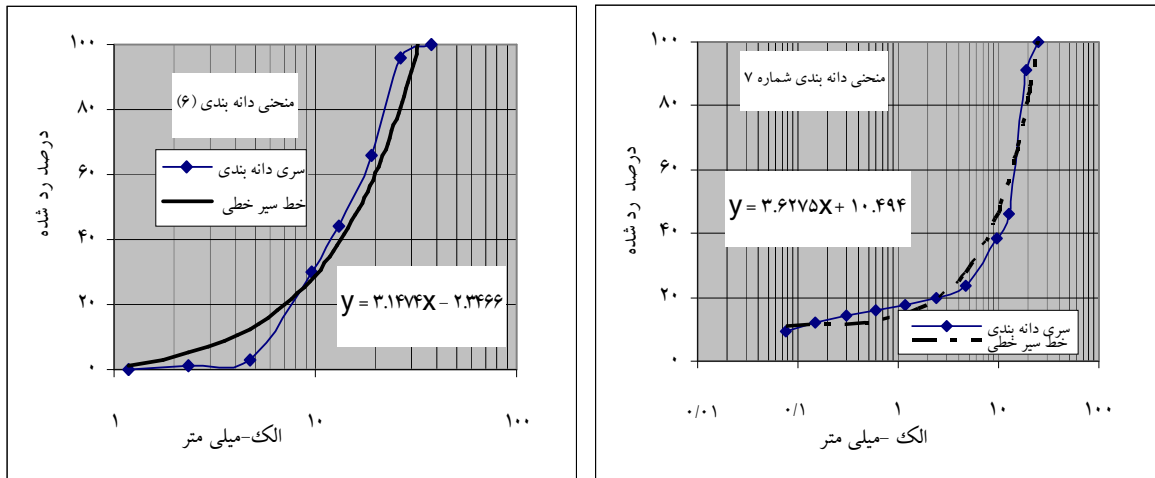
جدول (۳) نتایج طرح اختلاط منحنی دانه‌بندی شماره (۱)

شماره الک (mm)	درصد مانده نسبی	درصد رد شده نسبی	درصد مانده	وزن مانده روی الک در نمونه kg	ضریب $\psi$	تعداد سنگدانه با قطر مشخص	حجم سنگدانه $m^3$
۳۸/۱	۰	۱۰۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۹	۵۰	۵۰	۵۰	۷	۰/۵	۸۱۰	۰/۰۰۴۳۶
۹/۵	۶۶	۳۴	۱۶	۲/۲۴	۰/۱۶	۲۰۷۴	۰/۰۰۱۳۹
۴/۷۵	۷۶	۲۴	۱۰	۱/۴	۰/۱۱	۱۰۳۷۰	۰/۰۰۰۸۷۲
۲/۳۶	۸۳	۱۷	۷	۰/۹۸	۰/۰۷	۵۹۱۸۸	۰/۰۰۰۶۱۰
۱/۱۸	۸۷	۱۳	۴	۰/۵۶	۰/۰۴	۳۷۰۵۷۴	۰/۰۰۰۴۳۸
۰/۶	۹۱	۹	۴	۰/۵۶	۰/۰۴	۲۰۵۸۱۶۳	۰/۰۰۰۳۴۸
۰/۳	۹۷	۳	۶	۰/۸۴	۰/۰۶	۱۰۲۹۰۸۱۵	۰/۰۰۰۲۱۸
۰/۱۵	۹۹/۵	۰/۵	۲/۵	۰/۳۵	۰/۰۲۵	۸۲۳۲۶۵۲۴	۰/۰۰۰۲۱۸
				$\Sigma = 14$			$\Sigma = 1005$
۱۹/۵				۱۴	۱	۱۴۹۸	۰/۰۰۵



شکل (۹) منحنی دانه بندی (۱) و (۲)





شکل (۱۰) منحنی دانه بندی (۳) تا (۸)

جدول (۴) نتایج منحنی های دانه بندی (۱) تا (۸)

شماره منحنی	حالت چینش	$D_{50}$ (mm)	$V_m$ (m <sup>۳</sup> ) *۱۰ <sup>-۶</sup>	$V_v$ (m <sup>۳</sup> ) *۱۰ <sup>-۶</sup>	$V_p$ (m <sup>۳</sup> ) *۱۰ <sup>-۶</sup>	$S_{cr1}$ المان پایه	$S_{cr2}$ المان ۲۰*۲۰	$S_c$	$V_{cr} = V_c$ m <sup>۳</sup>	$\beta$	$\alpha$
۱	الف	۱۹/۵	۴۱/۵۰۹	۲۳/۲۸۲	۱۸/۲۲	۱۷۲	۲۰۰	۱۹۳۹	/۰۰۵	/۱۰۳	≈ ۱
	ب	۱۹/۵	۴۴/۴۸۹	۲۳/۲۸۲	۲۰/۲۰۷	۱۶۰					
۲	الف	۱۴	۱۵/۳۶	۸/۶۲	۶/۷۴	۲۴۰	۲۷۸	۶۶۴/۵	/۰۰۵	/۴۱۸	≈ ۱
	ب	۱۴	۱۶/۴۶	۸/۶۲	۷/۸۴	۲۲۴					
۳	الف	۱۵	۱۸/۸۹	۱۰/۶۰	۹/۶۵	۲۲۴	۲۶۰	۱۳۲۵	/۰۰۵	/۱۹۶	≈ ۱
	ب	۱۵	۲۰/۲۵	۱۰/۶۰	۸/۲۹	۲۰۹					
۴	الف	۱۲	۹/۶۸	۵/۴۲	۴/۲۶	۲۸۰	۳۲۵	۳۳۷۴	/۰۰۵	/۰۹۶	≈ ۱
	ب	۱۲	۱۰/۳۷	۵/۴۲	۴/۹۵	۲۶۲					
۵	الف	۱۱/۵	۸/۵۲	۴/۷۷	۳/۷۵	۲۹۲	۳۳۹	۲۱۲۲	/۰۰۵	/۱۶۰	≈ ۱
	ب	۱۱/۵	۹/۱۳	۴/۷۷	۴/۳۶	۲۷۳					
۶	الف	۲۰	۴۴/۸	۲۵/۱	۱۹/۷	۱۶۸	۱۹۵	۵۳۴	/۰۰۵	/۳۶۵	≈ ۱
	ب	۲۰	۴۸	۲۵/۱	۲۲/۹	۱۵۷					
۷	الف	۱۵	۱۸/۸۹	۱۰/۶۰	۹/۶۵	۲۲۴	۲۶۰	۳۰۱۰	/۰۰۵	/۰۸۶	≈ ۱
	ب	۱۵	۲۰/۲۵	۱۰/۶۰	۸/۲۹	۲۰۹					
۸	الف	۱۵	۱۸/۸۹	۱۰/۶۰	۹/۶۵	۲۲۴	۲۶۰	۸۵۱۸	/۰۰۵	/۰۳	≈ ۱
	ب	۱۵	۲۰/۲۵	۱۰/۶۰	۸/۲۹	۲۰۹					

جدول (۵) قطر اصلاح شده

شماره منحنی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
قطر اولیه $D_{50}$ (mm)	۱۹/۶	۱۴	۱۵	۱۲	۱۱/۵	۲۰	۱۵	۱۵
قطر اصلاح شده	۱۹	۱۳	۱۴	۱۱	۱۱	۱۸	۱۲/۵	۱۰

## ۴- نتیجه گیری

پس از بررسی جدول‌ها به نتایج زیر دست یافتیم:

الف: حجم المان پایه در دو حالت چینش مرزی بالا و پایین به ترتیب برابر با  $5/6D^2$  و  $6D^2$  است.

ب: نسبت بین  $\frac{S_{crf}}{S_{crf}}$  در دو حالت آرایش، ثابت و به ترتیب  $0/8$  و  $0/8$  است.

ج: با داشتن منحنی دانه بندی و طرح اختلاط می‌توان با به دست آوردن قطر مؤثر، المان پایه را با دو نوع چینش انتخاب کرد.

د: تنوع ضریب  $\beta$  بیانگر آن است که علاوه بر قطر مؤثر این پارامتر را نیز باید مد نظر قرار داد. با توجه به این‌که هرچه مقدار ریزدانه در منحنی دانه بندی بیش تر باشد، سطح مخصوص هم بیش تر خواهد شد، لذا قطر به دست آمده باید اصلاح شود و ضریب اصلاح  $\beta$  خواهد بود.

لذا می‌توان با داشتن منحنی دانه بندی در طرح اختلاط نمونه بتنی، به جای روش‌های پیچیده و مبتنی بر احتمالات یا روش‌های تصویر برداری، از روش ساده بالا، قطر مؤثر را به دست آورد و پس از تعیین مدل هندسی المان پایه، از آن در تعیین رفتار در حالت‌های مختلف بارگذاری استفاده کرد که این مسأله در مقالات بعدی ارائه خواهد شد.

## ۵- مراجع

- [5] Wai ., Chen; "Micro crack propagation study of concrete under compression "Journal of Eng. Mech vol.117, 1991, 582-593.
- [6] Ashraf Ragab., Mohamed, Hansen.; "Micromechanical modeling of crack-aggregate interaction in concret materials" Cement and Concrete Composites, vol.21, 1999, 349-359.
- [7] lopez., Caballero., Carol.; "3d meso structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension", Fracture mechanics of concrete structure, Ia-FraMcos, 2004.
- [8] Buyukozturk., O, nelson. A, State. F. O.; "Deformation of frcture of particle composite", J. Eng. Mech. Div, 98, 1972, pp. 581-593.
- [9] Nagai., Sato., Ueda.; "Three dimensional mesoscopic analyses of mortar and concrete" Fracture mechanics of concrete structure, Framcos, 2004
- [10] Schlangen, E. and J. G. M. van Mier.; "Shear fracture in cementitious composites, Part II: Numerical simulations" (Z. P. Ba'zant Ed.), 1992 ,pp. 671-676. Fracture mechanics of concrete. New York: Elsevier
- [11] Van Mier J. G. M., lilliu. and microlab; "Experimental & numerical analysis of 3D concrete fracture", research – school structural engineering.
- [12] Bazant., luigi.; "confinement – shear lattice model for conerate Damage in Tension and compression I , II , Theory, computation." J. Eng. Mech, Vol.129, No.12, 2003.
- [13] Illiu.; "3D lattice type fracture model for concrete ", Eng. Frac. Mech, No.70, 2003 pp.927-941.
- [14] Stefan Hafner, konke.; "Ageometrical inclusion matrix model for the finite element analysis of concrete at multiple scale", proceedings of the 16th ikm germany june 10-12, 2003pp-1611.
- [15] Zhu, Teng, Teng.; "Meso Mechanical model for concrete part 1&2, "Magazine of concrete Research , 56, No.6, 2004-p313-345.
- [16] Garboczi & Bentz.; "Analytical Formulas for itz properties" J. Adv. Cem. B. Mat, 6-99, 1997, 16-25.
- [17] lu & torquato.; "Formula for interfacial transition zone volume" Journal of Adv. Cement Base Material, 1997, 6-99.
- [1] Nilsen, Monteiro. ; "Concrete a three phase materail ", Cement and Concrete Research, vol.23, 1993, 301-306.
- [2] Ramesh & sotelino & chen.; "Effect of transition zone on elastic stress in concrete materials " ASCE -j of Mat. In Civil, 10(4) 1998, 275 – 285.
- [3] Monteiro., ollivier.; "The aggregate – mortar interface" , cement and concret Research, vol.15, 1985 , pp.953 – 958
- [4] Roelfstra., wittmann.; "Le beton numerique ", Material structur (RILEM), 18, 1985, 327-335.

- [22] Stefan Hafner., Stefan Eckardt and Carsten Könke "A geometrical inclusion-matrix model for the finite element analysis of concrete at multiple scales", Proceedings of the 16th IKM, Gürlebeck, Hempel, Könke (eds.), Weimar, Germany, June 10-12, 2003, ISSN 1611-4086.
- [23] Gianluca., cusatis.; "Tridimensional Random particle model for concrete, desimber 2001, Thises, polotecnico milano.
- [18] C.c yong.; "Effecet of the transition zone on the Elastic Moduli of mortar "Cem. Con. Res, 1998 .vol.28, No.5, pp 727
- [19] Anil.; "prediction of interphase properties of a three phase composite Using three phase and Four composit model ",- 16th ASCE Eng . Mech. conference, 2003.
- [20] Garboczi.; " Three dimensional mathematical analysis of particle shape using x-ray tomography and spherical harmonics", Cem&Con. Res., Vol .32, No.10, 2002
- [21] Stefan Hafner., Stefaneckardt., konke.; "Mesoscale modeling of concrete Geometry and numerics", vol. 84, issue.7, 2006, pp.450 .

## Geometrical Inclusion - Matrix Modeling of Concrete

I. Rasoolan<sup>1\*</sup>, S.A. Sadrnejhad<sup>2</sup>, A.R. Bagheri<sup>3</sup>

1- Ph.D. Student in Structure Engineering, K.N. Toosi University, Tehran, Iran

2- Prof., Civil Engineering, Dept., K.N. Toosi University, Tehran Iran

3- Asistant Prof., Civil Engineering Dept., K.N. Toosi University, Tehran, Iran

rasoolan82@yahoo.com

### Abstract:

Recent experiments and analytical investigations have shown that the mechanical behavior of concrete is strongly dependent on its microstructure. However, the concrete behavior is composed of three phases as grains, cement paste and interfacial transition zone. The grains type, size and distribution of aggregate affect the concrete's characteristics. Because of the random distribution and size variation of aggregate in concrete, the modeling of concrete's behavior based on component in meso structure is difficult and so we must use simple assumption.

In this paper, through mixing design and grading curve, a simple method was developed to replace real aggregate with equivalent sphere aggregate with effective diameter.

So we can use simple methods instead of complex numeral and randomness or X ray methods to find effective diameter and to determine two arrangements with maximum and minimum aggregate volume as a repeatable basical element. As a result, we can use this element for modeling the behavior of sample concrete in meso scale and three phases.

**Keywords:** Aggregates, Equale shape, Concrete, Interfacial zone, Grading, Specific surface area