

# توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی دو سیستم یکدرجه آزاد مجاور هم

سپیده رحیمی<sup>۱</sup> و مسعود سلطانی محمدی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشیار دانشگاه تربیت مدرس، گروه مهندسی زلزله

msoltani@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۱۳۹۲/۹/۱۱]

تاریخ دریافت: [۱۳۹۲/۳/۲۷]

**چکیده-** بررسی احتمال برخورد سازه‌های مجاور تحت اثر زلزله، اساس تدوین ضوابط آیین نامه‌ای برای تعیین کمینه ابعاد درز انقطاع است. در پژوهش‌های پیشین از قانون ترکیب تفاضلی دوگانه برای تعیین این فاصله استفاده شده است و تنها تفاوت بین روش‌ها در تعیین ضریب وابستگی پاسخ لرزه‌ای دو سیستم مجاور هم می باشد. این ضریب که وابسته به پریود و میرایی دو سیستم می باشد، با فرض رفتار خطی سازه‌ها تعیین شده است، و در محدوده غیرخطی، با معادل سازی رفتار سازه با حالت خطی و معرفی مقدار پریود و میرایی موثر به دست می آید. مقادیر پریود و میرایی موثر وابسته به مقدار نیاز شکل پذیری سیستم بوده و تنها برای مدل های رفتاری محدودی معرفی شده اند. در این پژوهش یک الگوریتم جامع برای تعیین ضریب وابستگی بین دو سیستم با استفاده از تئوری ارتعاشات تصادفی برای سیستم با مدل رفتاری بوک-ون با رفتارهای هیستریزیس مختلف، ارائه شده است. علاوه بر این، روش پیشنهادی برای انواع تحریک ورودی با چگالی طیفی های مشخص قابل کاربرد است و جامعیت بیشتری نسبت به روابط قبلی دارد. نیاز شکل پذیری سیستم متناظر با چگالی طیفی ورودی با استفاده از روابط ارتعاشات تصادفی تعیین و توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین دو سیستم حاصل از روابط ارائه شده با روابط موجود مقایسه می شود. برای صحت سنجی روابط ارائه شده، از آنالیز مونت کارلو برای دو سیستم غیرخطی مجاور، تحت رکوردهایی که برای یک چگالی طیفی مشخص به صورت ایستا و غیرایستا شبیه سازی شده اند، استفاده شده است.

**واژگان کلیدی:** ساختمان‌های مجاور، روابط احتمالاتی، مدل بوک-ون، ارتعاش تصادفی.

## ۱- مقدمه

برخورد کرده و ضربه‌ای به هم وارد نمایند. میزان اهمیت برخورد را می توان با مطالعه و بازنگری خسارات حاصل از این پدیده در زمین لرزه های گذشته بررسی نمود [۱]. برای مثال در زمین لرزه مکزیکوسیتی که بیشترین برخورد ساختمان ها به آن نسبت داده می شود، از مجموع ۳۳۰ ساختمان خراب

در ساخت و سازهای شهری به مواردی برخورد می کنیم که ساختمان های مجاور به هم چسبیده یا با فاصله کم از هم قرار دارند و زمان تناوب آنها برابر نیست. اگر فاصله دو سازه به اندازه کافی بزرگ نباشد، در هنگام زلزله ممکن است با یکدیگر

می‌شود. برای صحت‌سنجی روابط ارائه شده از آنالیز مونت کارلو برای دو سیستم غیرخطی مجاور هم تحت رکوردهایی که برای یک چگالی طیفی مشخص به صورت ایستا و غیرایستا شبیه سازی شده اند، استفاده شده است.

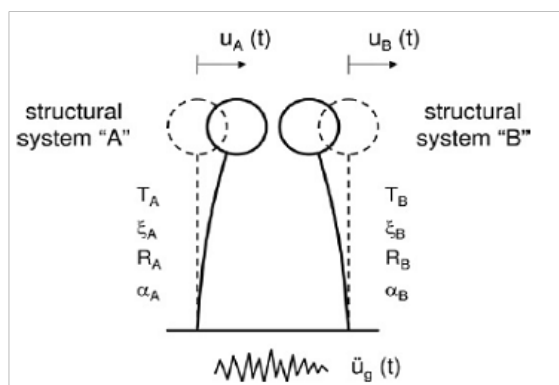
## ۲- روش ترکیب تفاضلی دوگانه

روش ترکیب تفاضلی دوگانه به وسیله‌ی جنگ در سال ۱۹۹۲ ارائه شده است که روشی است مبتنی بر تئوری ارتعاشات تصادفی. اگر پاسخ تغییر مکان دو سیستم یکدرجه آزاد  $A$  و  $B$  را  $U_A(t)$ ،  $U_B(t)$ ، به صورت فرایندهای تصادفی در یک دوره زمانی  $T_D$  تحت یک تحریک تصادفی گوسی در نظر بگیریم (شکل ۱)، تغییر مکان نسبی بین دو سیستم  $A$  و  $B$  که خود یک فرایند تصادفی است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_{REL}(t) = U_A(t) - U_B(t) \quad (1)$$

اگر  $U_{REL}(t)$ ،  $U_A(t)$ ،  $U_B(t)$ ، به صورت فرایندهای تصادفی با میانگین صفر باشند، واریانس پاسخ (میانگین مربع پاسخ) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{REL}^2 &= E\{U_{REL}^2(t)\} = E\{[U_A(t) - U_B(t)]^2\} \\ &= E\{U_A^2(t)\} + E\{U_B^2(t)\} - 2E\{U_A(t)U_B(t)\} \\ &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2E\{U_A(t)U_B(t)\} \end{aligned} \quad (2)$$



شکل (۱): دو نوسانگر یکدرجه آزادی

شده یا به طور شدید خسارت دیده (اغلب چند طبقه)، برخورد ساختمان‌های مجاور در بیش از ۴۰ درصد موارد اتفاق افتاده است. در این واقعه ۱۵ درصد کل موارد تنه‌زدگی، منجر به خرابی و انهدام کامل شده است. بیشتر این خرابی‌ها در مرکز شهر مکزیکوسیتی اتفاق افتاده است. جایی که انبوهی از ساختمان‌های مهندسی ساز وجود داشته، که با یکدیگر در تماس بودند و ارتفاع‌های متفاوت، سیستم‌های سازه‌ای متفاوت یا پیکربندی و نماهای متفاوت داشتند [۲]. با توجه به اهمیت این موضوع، آئین‌نامه‌های طرح لرزه‌ای، فاصله مجاز بین ساختمان‌ها را برای جلوگیری از برخورد ارائه داده‌اند. این فاصله در آئین‌نامه‌ها به طور معمول از دو روش جمع قدرمطلق تغییر مکان‌ها و روش جذر مجموع مربعات پاسخ‌ها حاصل می‌شود. روش منطقی دیگر برای در نظر گرفتن فاصله جدایی با استفاده از معادله پایه‌ای ترکیب تفاضلی دوگانه<sup>۱</sup> است که اولین بار به وسیله‌ی جنگ<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۲ ارائه شد [۳]. روابط ارائه شده به وسیله‌ی این معادله پایه‌ای بستگی به ضریب وابستگی پاسخ بین دو سیستم دارد. این ضرایب به وسیله‌ی افرادی چون کاسای<sup>۳</sup> و پنزین<sup>۴</sup> برای سیستم با مدل رفتاری مشخص ارائه شده است [۴و۵]. این روابط به صورت تحلیلی بوده و وابسته به خصوصیات سازه (پریود و میرایی) و نیاز شکل‌پذیری است. از آنجا که این روابط از حل خطی حاصل شده و برای حالت غیرخطی اصلاح شده‌اند و تنها برای یک مدل رفتاری خاص قابل استفاده است، در این پژوهش سعی بر آن است که فرمولاسیون ضریب وابستگی بین دو سیستم به صورت کلی برای انواع مدل‌های رفتاری ارائه شود. از آنجا که روابط پنزین و کاسای در حالت غیرخطی وابسته به مقدار نیاز شکل‌پذیری است، در این پژوهش مقدار نیاز شکل‌پذیری سیستم متناظر با چگالی توان تحریک ورودی، با استفاده از روابط ارتعاشات تصادفی تعیین شده و با نتایج حاصل از تحلیل‌های عددی مقایسه

۱. Double Difference Combination (DDC)

۲. Jeng

۳. Kassai

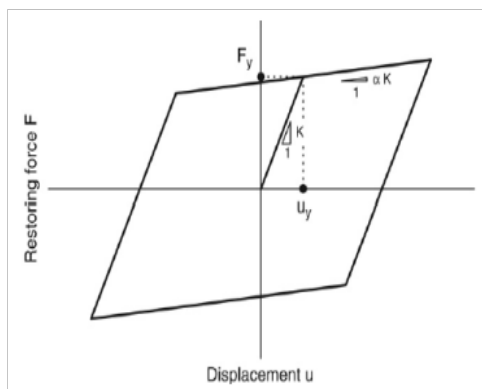
۴. Penzin

## ۳-۱-۱- معیار پنزین

در این روش فرض شده که رابطه ۵ هنوز برای سیستم غیرخطی صادق است به شرط اینکه دوره تناوب و میرایی خطی به وسیلهی دوره تناوب و میرایی موثر که تابعی از خصوصیات غیرخطی واقعی هستند، جایگزین شود. در این روش خصوصیات معادل خطی (موثر) برای سیستم غیرخطی که دارای رفتار دوخطی بار-تغییر مکان با ضریب سختی پس از تسلیم  $\alpha$  می باشد (شکل ۲)، به صورت زیر بیان می شود:

$$T_{Aeff} = T_A \sqrt{\frac{\mu_A}{\gamma + \alpha_A(\mu_A - \gamma)}} \quad (۶)$$

$$\xi_{Aeff} = \xi_A + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(\mu_A - \gamma)(1 - \alpha_A)\gamma}{\mu_A[\gamma + \alpha_A(\mu_A - \gamma)]} \right\} \quad (۷)$$



شکل (۲): رفتار هیستریزس دوخطی

پریود و میرایی موثر برای سیستم B نیز به همین ترتیب محاسبه می شود. در این روابط  $\mu$  نیاز شکل پذیری است،  $\gamma$  برابر  $\frac{1}{10}$  و مقدار  $\alpha$  برابر ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. با توجه به ارزیابی های انجام شده، نتایج حاصل از این روش دست پایین و غیر محافظه کارانه است. در بعضی از موارد میزان محافظه کارانه نبودن، در حد ۵۰ درصد نیز گزارش شده است [۶].

که در آن  $E\{\}$  نشان دهنده عملگر امید ریاضی است. ضریب ارتباط بین فرایندهای  $U_A(t)$ ،  $U_B(t)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\rho = \frac{E\{U_A(t)U_B(t)\}}{\sqrt{E\{U_A^2(t)\}E\{U_B^2(t)\}}} = \frac{E\{U_A(t)U_B(t)\}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (۳)$$

که با جای گذاری رابطه (۳) در (۲) داریم:

$$\sigma_{REL}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B \quad (۴)$$

که رابطه (۴) به معادله DDC معروف است. اگر فرض کنیم تحریک ورودی خصوصیات باند سفید را داشته باشد، مقدار ضریب وابستگی پاسخ دو سیستم یک درجه آزاد بر مبنای تئوری ارتعاشات تصادفی برابر است با (پیوست الف):

$$\rho = \frac{8\sqrt{\xi_A\xi_B}\left(\xi_A + \xi_B\frac{T_A}{T_B}\right)\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{1.5}}{\left[1 - \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2\right]^2 + 4\xi_A\xi_B\left[1 + \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2\right]\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + 4(\xi_A^2 + \xi_B^2)\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2} \quad (۵)$$

که در آن  $T_A, T_B, \xi_A, \xi_B$  ضرایب میرایی و پریود سیستم های A و B است. این رابطه تنها زمانی صادق خواهد بود که  $U_A(t)$ ،  $U_B(t)$  مربوط به پاسخ دو سیستم با رفتار خطی باشند.

## ۳-۱- روش ترکیب تفاضلی دوگانه برای سیستم های هیستریزس غیرخطی

وقتی ساختمان ها در معرض تحریک های شدید زلزله قرار می گیرند، پاسخ عموماً در محدوده غیرخطی است. اگر فرض شود رابطه ۴ هنوز برای سیستم های غیرخطی صادق است، بنابراین مقدار  $\rho$  در رابطه ۵ بایستی اصلاح شود. برای این حالت حل صحیح بسته ای برای سیستم های هیستریزس وجود ندارد [۴و۵].

## ۳-۱-۲- معیار کاسای

این روش مشابه روش پنزین برای حالت خاصی از سیستم غیرخطی که دارای رفتار دوخطی بار-تغییر مکان با ضریب سختی پس از تسلیم ۵ درصد است، در نظر گرفته شده (شکل ۲) و روابط زیر برای آن ارائه شده است:

$$T_{Aeff} = T_A [1 + 0.09 (\mu_A - 1)] \quad (8)$$

$$\xi_{Aeff} = \xi_A + 0.084 (\mu_A - 1)^{1.3} \quad (9)$$

این روابط از نتایج آنالیز انجام شده به وسیله شبیه سازی‌های عددی به دست آمده است. نتایج به دست آمده از رابطه کاسای به مراتب دقیق‌تر از جمع قدرمطلق تغییر مکان‌ها و روش جذر مجموع مربعات پاسخ‌ها، و نتایج بین ۲۵ الی ۳۰ درصد غیرمحافظه کارانه است [۶].

## ۴- مدل سازی

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، تنها تفاوت روش‌های موجود در تعیین ضریب وابستگی پاسخ بین دو سیستم است. در این پژوهش سعی بر آن است که الگوریتم جامعی برای تعیین ضریب وابستگی بین دو سیستم به صورت کلی برای مدل‌های رفتاری مختلف تحت تحریک ورودی با چگالی توانی مشخص به دست آید. با توجه به رابطه ۴، به جای مقایسه ضرایب وابستگی در روش‌های مختلف، مقدار انحراف معیار تغییر مکان نسبی یا به عبارتی، توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی را می‌توان بررسی نمود. برای دستیابی به این امر در این پژوهش دو سیستم مجاور هم به صورت یکدرجه آزاد (شکل ۱) و با مدل رفتاری بوک-ون رابطه ۴، در نظر گرفته شده است. تحریک ورودی نیز به صورت شتاب‌نگاشت‌های مصنوعی است که از چگالی طیفی گوسی تاجیمی کانای<sup>۱</sup> به صورت ایستا و غیرایستا به دست آمده‌اند. با توجه به

اینکه تحریک ورودی گوسی است، فرض می‌شود پاسخ هر کدام از دو سیستم و همچنین پاسخ نسبی بین دو سیستم، نیز دارای توزیع گوسی با میانگین صفر است. البته صحت این فرض با توجه به نتایج مونت کارلو بررسی شده است. توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی دو سیستم با مدل رفتاری بوک-ون<sup>۲</sup> با استفاده از تئوری ارتعاشات تصادفی به دست آمده است. برای مقایسه نتایج با معیارهای موجود کاسای و پنزین، مدل هیستریزس به صورت دوخطی و با ۵ درصد سخت کرنشی در نظر گرفته شده است. از آنجا که روابط پنزین و کاسای در حالت غیرخطی وابسته به مقدار نیاز شکل پذیری است، در این پژوهش مقدار نیاز شکل پذیری سیستم متناظر با چگالی توانی تحریک ورودی نیز تعیین شده و با نتایج حاصل از تحلیل‌های عددی مقایسه شده است.

## ۴-۱- مدل رفتاری بوک-ون کلاسیک

یکی از مدل‌هایی که در سال‌های اخیر در مهندسی سازه و مکانیک استفاده زیاد شده است مدل رفتاری بوک-ون است. از قابلیت‌های این مدل این است که شکل‌های مختلف مدل رفتاری سازه را در برمی‌گیرد و می‌توان با تغییر پارامترهای آن مدل‌های مختلفی ایجاد کرد. مبنای این مدل مطالعات بوک در سال ۱۹۶۷ بوده که به وسیله وون در سال‌های ۱۹۷۶ و ۱۹۸۰ گسترش داده شده است [۸و۷]. زوج معادله دیفرانسیل حاکم بر این مدل به صورت زیر است:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha kx(t) + (1 - \alpha)kz(t) = P(t) \quad (10)$$

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}|z^{n-1} - \gamma\dot{x}|z|^n \quad (11)$$

رابطه اول در معادلات بالا، معادله دیفرانسیل حرکت یک سیستم یک درجه آزاد است با این تفاوت که سختی در این معادله تابعی از  $x$  و  $z$  است.  $z$  یک تغییر مکان مجازی است که با معادله دیفرانسیلی

۲. Bouc-Wen

۱. Tajimi-Kanai

چگالی طیفی توان اغتشاش سفید  $G$  فیلتر شده‌ای است که از یک لایه خاک با مشخصات فرکانس طبیعی  $\omega_g$  و نسبت میرایی  $\xi_g$  عبور کرده است. تابع چگالی طیفی این فیلتر چنین است:

$$G(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} G_0 \quad (12)$$

در این پژوهش با توجه به پژوهش‌های القادسی<sup>۱</sup> برای نوع زمین آبرفتی ثابت‌های  $G_0$  (sec<sup>۳</sup>/cm<sup>۲</sup>)،  $\xi_g$  و  $\omega_g$  (rad/sec) به ترتیب برابر با ۰/۳۴، ۶۵/۰۳ و ۲۷/۰۲ در نظر گرفته شده است [۱۱]. برای تولید شتاب نگاشت مصنوعی، برنامه‌ای به زبان مطلب تهیه شده است. با استفاده از این الگوریتم می‌توان شتاب نگاشت‌های مصنوعی ایستا و غیرایستا با چگالی طیفی مشخص تهیه کرد. گام‌های استفاده شده شامل مراحل زیر است:

- تولید یک سری اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر تا  $2\pi$ .

- تعیین زاویه فاز تحریک  $\varepsilon$  به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر تا  $2\pi$

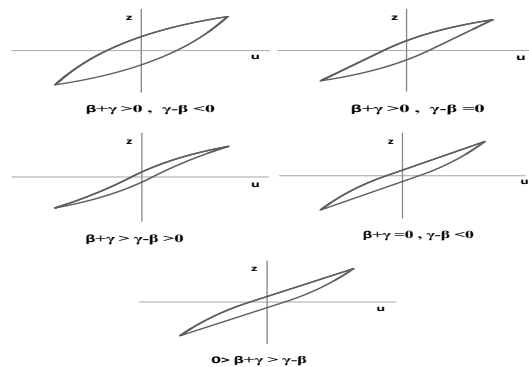
- دامنه شتاب حرکت زمین با استفاده از رابطه (۱۳) تعیین می‌شود که در آن که  $\delta\omega$  بازه زمانی فرکانس است.

$$A(\omega_k) = \sqrt{2 \delta\omega G(\omega_k)} \quad (13)$$

- شتاب ایستا با شبیه سازی تمام مولفه های فرکانسی از رابطه (۱۴) حاصل می شود.

$$\ddot{u}_{gst}(t) = A(\omega_k) \cdot \sin(2\pi \omega_k t + \varepsilon)$$

بیشتر بارگذاری‌های طبیعی، حالتی غیرایستا دارند. بدیهی است که زمین لرزه از گونه‌ی این نوع بارگذاری‌ها به شمار می‌آید. طبیعت غیرایستای زلزله هم در محتوای فرکانسی و هم در دامنه لرزش بروز می‌کند. طبیعت گذرای شدت فرایند زمین لرزه می‌تواند با اصلاح فرایند ایستای به وسیله‌ی یک تابع معین زمانی  $\xi(t)$  با توجه به رابطه (۱۵)



شکل (۳): مدل های بوک-ون کلاسیک برای مقادیر مختلف  $\beta, \gamma$

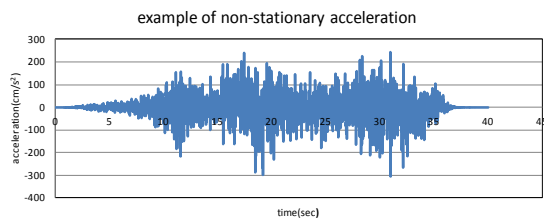
مطابق با رابطه ۱۱ بیان می‌شود. در واقع برای حل مساله باید معادلات فوق به صورت هم‌زمان حل شوند که در نتیجه آن با تغییر پارامترهای موجود شامل  $\alpha$ ،  $A$ ،  $\beta$ ،  $n$ ،  $\gamma$  شکل‌های مختلف مدل رفتاری به دست می‌آیند که نمونه‌هایی از آنها در شکل ۳ مشاهده می‌شوند.

تفاوت این مدل با مدل‌هایی چند خطی مانند کلاف و تاکدا در این است که این مدل‌ها با یک معادله واحد بیان نمی‌شوند (منحنی غیر هموار) در حالی که مدل رفتاری بوک-ون که یک مدل هموار است، تنها با یک رابطه بیان می‌شود. پس در حل مسایل، تعیین شرایط در حین بارگذاری و باربرداری با استفاده از مدل‌های هموار راحت‌تر صورت می‌گیرد. در بین مدل‌های هموار موجود نیز این مدل کامل‌ترین مدل است چراکه محدوده وسیعی از اشکال مختلف مدل رفتاری را در برمی‌گیرد.

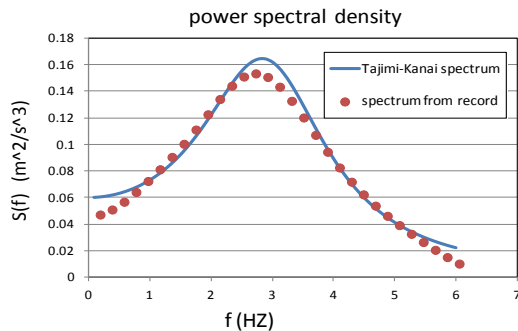
#### ۴-۲- تحریک ورودی

برای بررسی رفتار سازه در برابر حرکات زمین لرزه، با توجه به تعداد و تنوع کم شتاب نگاشت‌های ثبت و پردازش شده، ایجاد شتاب‌نگاشت مصنوعی و اعمال آن به مدل سازه از اهمیت فراوانی برخوردار است. در این پژوهش برای تولید شتاب‌نگاشت مصنوعی از الگوی فیلتر تاجیمی کانای استفاده شده است [۱۰ و ۹]. الگوی تاجیمی کانای در واقع تابع

۱. Elghadamsi



شکل (۶): نمونه‌ای از شتاب نگاشت مصنوعی غیر ایستا



شکل (۷): مقایسه چگالی طیفی حاصل از ۳۰۰ رکورد و چگالی تاجیمی-کانای

## ۵- تعیین مشخصات آماری سیستم یکدرجه آزاد

اگر تحریک ورودی گوسی و ایستا باشد، تغییر مکان سیستم نیز گوسی است. با توجه به اینکه به هر سیستم ۳۰۰ رکورد اعمال می‌شود و هم تغییر مکان مثبت و هم تغییر مکان منفی در سیستم وجود دارد، میانگین تغییر مکان صفر می‌شود. برای به دست آوردن مقدار انحراف معیار پاسخ سیستم یکدرجه آزاد با استفاده از روابط ارتعاشات تصادفی داریم:

$$\sigma_A^2 = E[y_A^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_A(\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \quad (17)$$

در رابطه ۱۷، مقدار انحراف معیار تغییر مکان برای سیستم A به تابع پاسخ فرکانسی سیستم  $H_A(\omega)$  و تابع چگالی تحریک ورودی  $S_g(\omega)$  (رابطه ۱۲) بستگی دارد. رابطه ۱۷ برای سیستم B نیز صادق است. برای تعیین انحراف معیار بایستی مقدار تابع پاسخ فرکانسی سیستم تعیین شود، این تابع از معادله حرکت سیستم به دست می‌آید. معادله حرکت سیستم (رابطه ۱۰ و ۱۱) به صورت معادلات مشتق

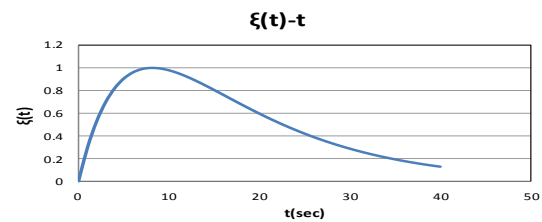
تعیین کرد. الگوهای غیر ایستای گوناگونی برای الگوسازی زلزله‌ها به کار رفته اند. در این پژوهش از الگوی غیر ایستای شینوزکا و ساتو [۱۱] استفاده شده است (رابطه ۱۶).

$$\ddot{u}(t) = \xi(t) \ddot{u}_{gst}(t) \quad (15)$$

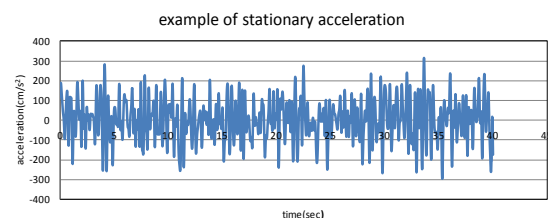
$$\xi(t) = \frac{1}{c} (e^{-at} - e^{-bt})$$

$$c = \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{a}{b-a}} - \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{b-a}} \right] \quad (16)$$

ضرایب a و b در رابطه ۱۶ به ترتیب برابر با ۰/۰۸۵ و ۰/۱۷ در نظر گرفته شده است (شکل ۴). در این پژوهش ۳۰۰ رکورد با استفاده از چگالی طیفی تاجیمی کانای تهیه شد. به طور نمونه شتاب نگاشت افقی ایستا و یک نمونه غیر ایستا برای شرایط زمین خاک آبرفتی در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. همچنین برای کنترل صحت کار، چگالی حاصل از این ۳۰۰ رکورد مربوط به زمین آبرفتی با چگالی تاجیمی کانای مقایسه شده است (شکل ۷). همان‌گونه که مشهود است، تطابق خوبی بین چگالی‌های حاصل وجود دارد.



شکل (۴): الگوی غیر ایستا [۱۱]



شکل (۵): نمونه‌ای از شتاب نگاشت مصنوعی ایستا

$$y = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \\ z \\ x_f \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{z} \\ \dot{x}_f \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\dot{S} + GS + S G^T = B \quad (23)$$

$$S = E[y \bar{y}] \text{ و } \dot{S} = E[\dot{y} \bar{y}]$$

$$B = E[y \bar{f}] + E[f \bar{y}]$$

اگر تحریک ایستا باشد، مقدار  $\dot{S}$  برابر صفر است.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha k}{m} & \frac{c}{m} & \frac{(1-\alpha)k}{m} & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \\ 0 & -c_e & -k_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi\omega_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \rho_{uz\sigma_z\sigma_u} & \rho_{ux_f\sigma_{x_f}\sigma_u} & \rho_{\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_{\dot{u}}} \\ 0 & \sigma_{\dot{u}}^2 & \rho_{\dot{u}z\sigma_z\sigma_{\dot{u}}} & \rho_{\dot{u}x_f\sigma_{x_f}\sigma_{\dot{u}}} & \rho_{\dot{u}\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_{\dot{u}}} \\ \rho_{uz\sigma_z\sigma_u} & \rho_{\dot{u}z\sigma_z\sigma_{\dot{u}}} & \sigma_z^2 & \rho_{zx_f\sigma_{x_f}\sigma_z} & \rho_{z\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_z} \\ \rho_{ux_f\sigma_{x_f}\sigma_u} & \rho_{\dot{u}x_f\sigma_{x_f}\sigma_{\dot{u}}} & \rho_{zx_f\sigma_{x_f}\sigma_z} & \sigma_{x_f}^2 & 0 \\ \rho_{\dot{u}\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_{\dot{u}}} & \rho_{\dot{u}\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_{\dot{u}}} & \rho_{z\dot{x}_f\sigma_{\dot{x}_f}\sigma_z} & 0 & \sigma_{\dot{x}_f}^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

جزئی است. با وجود چنین معادلاتی، فرایندها معمولاً به صورت غیرخطی است. در حالت کلی حل دقیقی برای این معادلات وجود ندارد. تنها در برخی موارد حل‌های تقریبی برای این معادلات به وسیله‌ی روش‌های ساده‌ای همچون روش خطی‌سازی، به دست می‌آید. پس برای به دست آوردن مشخصات آماری پاسخ از جمله انحراف معیار، توزیع تغییر مکان و توزیع بیشینه‌ها، نیاز به خطی‌سازی مدل بوک ون است که در ادامه ارائه می‌شود.

### ۵-۱- خطی‌سازی مدل بوک ون کلاسیک تحت اغتشاش با چگالی تاجیمی کانای

برای اعتبار سنجی نتایج حاصل از تحلیل‌های دینامیکی تحت رکوردهای زیاد، نیاز به نتایج حل در حوزه فرکانس داریم. برای اینکه قادر باشیم از مشخصات مدل بوک ون برای حل در حوزه فرکانس استفاده کنیم، بایستی معادلات دیفرانسیل موجود در روابط حاکم بر معادلات این مدل را به فرم خطی تبدیل کنیم. طبق مراجع [۱۳ و ۱۴]، پارامترهای خطی معادل مدل بوک-ون کلاسیک با استفاده از حداقل کردن مربع خطا به صورت زیر تعیین می‌شود. در حالت سیستم خطی شده، معادله مشتق  $z$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{z} = c_e \dot{x} + k_e z \quad (18)$$

معادله فیلتر تاجیمی کانای به صورت زیر است:

$$\ddot{x}_f + 2\xi_g \omega_g \dot{x}_f + \omega_g^2 x_f = n(t) \quad (19)$$

$$\ddot{x}_g = -(2\xi_g \omega_g \dot{x}_f + \omega_g^2 x_f) \quad (20)$$

که در آن  $n(t)$  تابع موج سفید است.

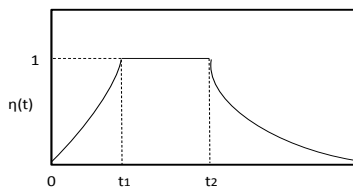
$$\dot{y} + G y = f(t) \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{z} \\ \dot{x}_f \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha k}{m} & \frac{c}{m} & \frac{(1-\alpha)k}{m} & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \\ 0 & -c_e & -k_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \\ z \\ x_f \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n(t) \end{Bmatrix}$$

شده با حل معادلات دیفرانسیل بوک ون خطی شده به صورت زیر است:

$$|H_{x(i\omega)}|^2 = \frac{1}{\left(-\omega^2 + \alpha\omega^2 + \frac{(1-\alpha)\omega^2\omega^2 c_e}{\omega^2 + k_e^2}\right)^2 + \left(2\sqrt{\alpha}\omega - \frac{(1-\alpha)\omega^2\omega^2 c_e k_e}{\omega^2 + k_e^2}\right)^2}$$

در حالت ایستا، برای هر سیستم خطی شده تنها یک مقدار برای ضرایب خطی  $(c, k_e)$  داریم، ولی در حالت غیر ایستا این ضرایب با زمان تغییر می‌کنند، برای اینکه بتوانیم از رابطه ۲۷ برای حالت تحریک غیرایستا استفاده کنیم، مقدار متوسط ضرایب خطی به دست آمده از روش خطی‌سازی را به عنوان مقدار  $c_e, k_e$  در نظر می‌گیریم. اگر الگوی غیرایستا استفاده شده در این پژوهش را با الگوی جنینگز، هازونر و تسائی [۱۵] مقایسه کنیم، می‌توان تابع الگوی غیرایستا را به سه بخش تقسیم کرد که قسمت میانی آن ایستا و دو قسمت کناری غیر ایستا است (شکل ۹). به عبارتی، الگوی غیرایستا به صورت موضعی ایستا است. بنابراین در ناحیه ایستا در یک تحریک غیر ایستا می‌توان انحراف معیار را با توجه به مقدار ضرایب خطی متوسط، ثابت در نظر گرفت و توزیع احتمالاتی آن را تعیین کرد.



شکل (۹): الگوی غیر ایستای تکه ای

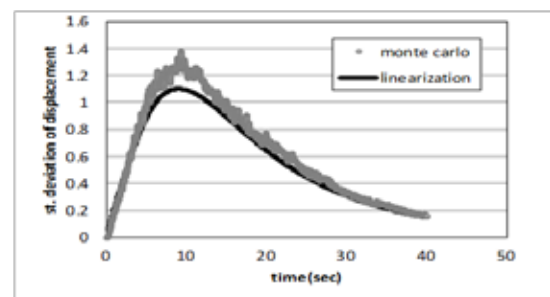
با مساوی قرار دادن سطح زیر الگوی تکه‌ای و الگوی نمایی استفاده شده در این مقاله، مقدار  $t_1$  و  $t_2$  به ترتیب برابر با ۴ و ۱۵ ثانیه است. یعنی در این ناحیه رکوردها ایستا است و می‌توان از تئوری ارتعاشات تصادفی مربوط به فرایندهای ایستا، در این قسمت استفاده نمود.

## ۶- تعیین توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین دو سیستم یکدرجه آزاد

دو سیستم یکدرجه آزاد مجاور هم را در نظر

با توجه به روابط بالا مقدار ماتریس‌های  $B, G, S$  تعیین می‌شود، از آنجا که ضرایب خطی‌سازی معادل وابسته به واریانس پاسخ و واریانس پاسخ نیز وابسته به این ضرایب است باید از روش سعی و خطا برای محاسبه ضرایب خطی استفاده نمود تا ضرایب خطی به یک مقدار ثابت همگرا شود. در حالت غیر ایستا، پاسخ‌ها وابسته به زمان است و مقدار  $\dot{x}$  برابر صفر نیست. در این حالت معادلات خطی معادل در هر گام زمانی تعیین می‌شود. همچنین مقدار  $B$  نیز در رابطه ۲۵ باید در الگوی غیرایستا ضرب شود و در هر بازه زمانی، برای تعیین مقادیر  $S$  از رابطه ۲۳ انتگرال گیری شود (برای اطلاعات بیشتر رجوع به مرجع [۱۳]). برای کنترل صحت روند خطی‌سازی تحت تحریک غیر ایستا، یک سیستم یکدرجه آزاد را در نظر گرفته و انحراف معیار پاسخ سیستم را تحت تحریک غیر ایستا (۳۰۰ رکورد تولید شده مطابق بخش ۲-۲) به دست آورده، و با نتایج خطی‌سازی مقایسه می‌کنیم.

سیستم یکدرجه آزاد با مشخصات  $\beta = 2$ ,  $\xi = 0.05$ ,  $n = 1$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $k = 10000 \text{ (kg/cm)}$ ,  $m = 40 \text{ kg}$ ,  $A = 1$ , در نظر گرفته شده و انحراف معیار پاسخ حاصل از ۳۰۰ رکورد با انحراف معیار حاصل از خطی‌سازی مقایسه شده است (شکل ۸). همان‌گونه که از شکل ۸ پیدا است، تطابق خوبی بین خطی‌سازی و نتایج حاصل از ۳۰۰ رکورد اعمالی وجود دارد، به عبارتی روند خطی‌سازی قابل قبول است.



شکل (۸): انحراف معیار تغییر مکان حاصل از ۳۰۰ رکورد و حاصل از خطی‌سازی

مقدار تابع پاسخ فرکانسی برای مدل بوک ون خطی



## ۷- تعیین نیاز شکل پذیری سیستم تحت تحریک با چگالی طیفی مشخص

همان‌گونه که بیان شد، روابط کاسای و پنزین بر اساس مقدار نیاز شکل پذیری است و از آنجا که سیستم فقط تحت اثر یک تحریک نیست، باید نیاز شکل پذیری سیستم را تحت تابع چگالی طیفی به دست آورد. مقدار نیاز شکل پذیری در یک سیستم برابر است با:

$$\mu = \frac{|x|}{x_y} \quad (30)$$

که در آن  $x$  پاسخ سیستم یک‌درجه آزاد تحت تحریک ورودی و  $x_y$  تغییرمکان تسلیم سیستم است. با توجه به اینکه باید نیاز شکل پذیری را تحت چگالی طیفی به دست آورد، محاسبه نیاز شکل پذیری تنها به صورت احتمالاتی ممکن خواهد بود. اگر توزیع احتمالاتی تغییرمکان هر سیستم تحت تحریک با چگالی گوسی، مطابق رابطه ۳۱ باشد، بر اساس قوانین ریاضی توزیع احتمالاتی نیاز شکل پذیری طبق رابطه ۳۲ حاصل می‌شود.

$$p(u_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} e^{-\frac{u_A^2}{2\sigma_A^2}} \quad (31)$$

$$p(\mu_A) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(\frac{\sigma_A}{x_y})} e^{-\frac{\mu_A^2}{2(\frac{\sigma_A}{x_y})^2}} \quad (32)$$

در یک توزیع گوسی، تغییرمکان بیشینه زمانی حاصل می‌شود که سطح زیر چگالی احتمالاتی گوسی تغییرمکان برابر واحد شود. با قرار دادن سطح زیر نمودار برابر واحد، تغییرمکان ماکزیمم بی‌نهایت می‌شود. با توجه به اینکه تغییرمکان متناظر با ۹۹/۷ درصد زیر چگالی احتمالاتی گوسی، سه برابر انحراف معیار تغییرمکان است، از این مقدار به عنوان تخمینی مناسب برای تغییرمکان بیشینه استفاده می‌کنیم.

یعنی سطح زیر نمودار توزیع احتمالاتی تغییرمکان تا نقطه متناظر با نیاز شکل پذیری تحت تابع

می‌گیریم (شکل ۱). تغییرمکان نسبی بین دو سیستم با تفاضل تغییرمکان سیستم  $A$  و  $B$  برابر است. اگر تحریک ورودی گوسی باشد، می‌توان پاسخ سیستم را نیز گوسی در نظر گرفت. با فرض اینکه تغییرمکان نسبی متوسط برابر صفر است، برای تعیین تابع توزیع احتمالاتی تغییرمکان نسبی نیاز به انحراف معیار تغییرمکان نسبی است. توزیع احتمالاتی گوسی تغییرمکان نسبی برابر است با:

$$p(U_{REL}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{REL}} e^{-\frac{U_{REL}^2}{2\sigma_{REL}^2}} \quad (28)$$

برای محاسبه انحراف معیار تغییرمکان نسبی مطابق رابطه (۴)، نیاز به انحراف معیار تغییرمکان هر سیستم و تابع دگر ارتباطی بین دو سیستم است. مقدار انحراف معیار تغییرمکان هر سیستم با توجه به رابطه ۱۷ تعیین می‌شود. تابع دگر ارتباطی بین دو سیستم در معیارهای کاسای و پنزین با توجه به رابطه ۵ تعیین می‌شود. در اینجا با توجه به اینکه پاسخ فرکانسی هر دو سیستم  $A, B$  را داریم، می‌توان مقدار مورد انتظار پاسخ بین دو سیستم را به صورت زیر تعیین کرد:

$$E\{U_A(t)U_B(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_A(\omega) S_g(\omega) H_B(\omega)^* d\omega \quad (29)$$

علامت ستاره در رابطه ۲۹ بیان کننده مزدوج تابع پاسخ فرکانسی است. بنابراین با به دست آوردن رابطه ۲۹ می‌توان مقدار انحراف معیار پاسخ تغییرمکان نسبی را بدون استفاده از ضرایب پیشنهاد شده به وسیله کاسای و پنزین محاسبه کرد. برای بررسی دقت روش پیشنهادی نسبت به روش‌های کاسای و پنزین، آنالیز مونت کارلو با ۳۰۰ رکورد برای دو سیستم مجاور هم با مشخصات متفاوت در ادامه ارائه شده است. با توجه به اینکه روابط کاسای و پنزین برحسب نیاز شکل پذیری سیستم است و از آنجا که تحریک ورودی دارای یک تابع چگالی طیفی است، باید نیاز شکل پذیری هر سیستم با مدل رفتاری بوک ون را تحت تحریک با چگالی طیفی تاجیمی کانای به دست آورد.

چگالی طیفی برابر با ۰/۹۹۷ باشد (شکل ۱۰).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow z_u = \left( \frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (34)$$

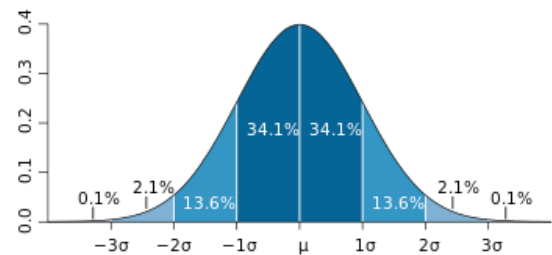
مقدار حاصل از رابطه ۳۴ برابر با تغییر مکان تسلیم است. بنابراین نیروی تسلیم برابر است با:

$$x_y = z_u \rightarrow F_y = kx_y \quad (35)$$

با استفاده از رابطه ۳۴ تغییر مکان تسلیم محاسبه شده و با قرار دادن در رابطه ۳۳ مقدار شکل پذیری سیستم تعیین می‌شود. برای سیستم B نیز به همین ترتیب محاسبات انجام می‌شود، بنابراین مقدار نیاز شکل پذیری هر سیستم یکدرجه آزادی با مدل رفتاری بوک ون تحت چگالی طیفی گوسی محاسبه شده است.

## ۷- روند ارزیابی

در این قسمت روابط ارائه شده در قسمت قبلی برای توزیع تغییر مکان نسبی، مقدار تابع دگر ارتباطی و همچنین نیاز شکل پذیری، برای دو سیستم مجاور با شرایط مختلف به کار گرفته می‌شود. نتایج حاصل از روابط ارائه شده با نتایج مدل کاسای و پنزین و همچنین همه موارد با آنالیز مونت کارلو مقایسه می‌شوند. برای کنترل روابط ارائه شده شش سیستم با شکل پذیری‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ و شش حالت مختلف برخورد بین دو سیستم در نظر گرفته شده است. این نیازهای شکل پذیری بر اساس رابطه ۳۳ به دست آمده و با میانگین ماکزیمم مقدار شکل پذیری حاصل از ۳۰۰ رکورد ایستا تطابق بسیار خوبی دارند. برای تعیین تابع توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی، مقدار ضرایب خطی سازی شده مربوط به هر سیستم تعیین می‌شود. سپس تابع چگالی احتمالاتی تفاضل تغییر مکان ها تحت اثر ۳۰۰ رکورد ایستا با چگالی حاصل از روابط ارائه شده در حوزه فرکانس و همچنین روابط کاسای و پنزین مقایسه شده است (شکل ۱۱ تا شکل ۱۶). همان گونه که مشهود است، نتایج حل در حوزه



شکل (۱۰): توزیع احتمالاتی گوسی تغییر مکان سیستم

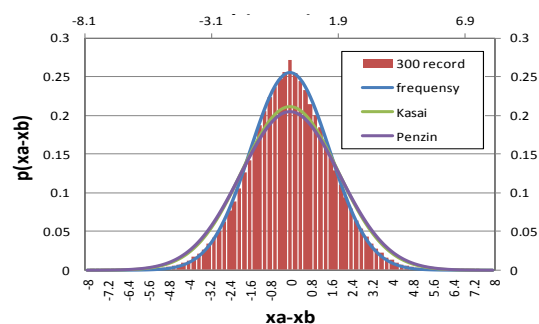
در شکل ۱۰، اگر شکل را به سه رنگ تیره، متوسط و روشن تقسیم کنیم، قسمت تیره در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین توزیع قرار دارد و قسمت متوسط و تیره به طور توأم، در فاصله دو برابر انحراف معیار از میانگین توزیع قرار دارند. در توزیع نرمال، اولی برابر با ۶۸٪ سطح و دومی برابر با ۹۵٪ سطح و سومی ۹۹/۷٪ سطح زیر نمودار است. در علم آمار شکل ۱۰ بیان کننده قانون ۶۸-۹۵-۹۹/۷ است. که به قانون ۳ سیگما معروف است. به عبارت دیگر تقریباً تمامی مقادیر توزیع نرمال در بازه ۳ برابر انحراف معیار نسبت به میانگین پاسخ قرار دارند [۱۶].

به عبارت دیگر تخمین نیاز شکل پذیری در این پژوهش به گونه‌ای است که ۹۹/۷ درصد نیاز شکل پذیری‌های محتمل از آن کمتر باشد و یا به عبارتی تنها ۰/۳ درصد تغییر مکان‌ها از مقدار تغییر مکان متناظر با نیاز شکل پذیری بیشتر است.

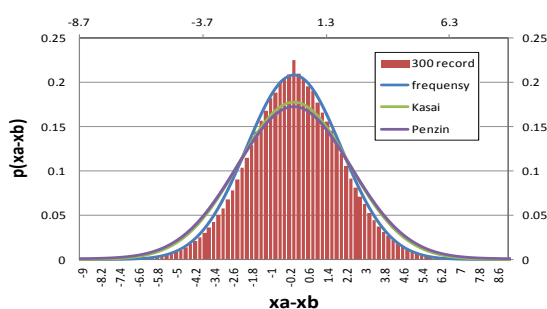
بنابراین تغییر مکان بیشینه تحت چگالی طیفی گوسی با احتمال ۹۹/۷ درصد، ۳ برابر انحراف معیار سیستم است که مطابق رابطه ۱۷ محاسبه می‌شود. با تقسیم این تغییر مکان بیشینه به تغییر مکان تسلیم، مقدار نیاز شکل پذیری تحت تحریک با چگالی طیفی گوسی به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\mu_A = \frac{3\sigma_A}{x_y} \quad (33)$$

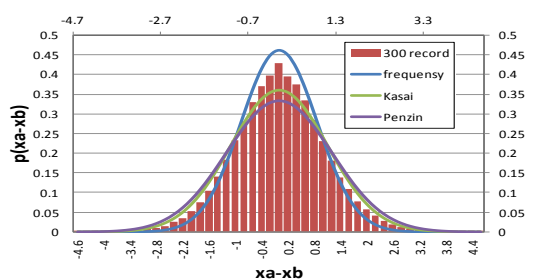
نیروی تسلیم متناظر با نقطه ای است که  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  شود پس:



شکل (۱۴): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۶۰۲

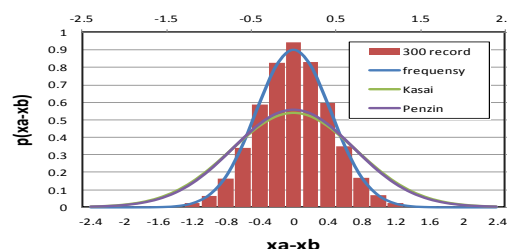


شکل (۱۵): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۷۰۲

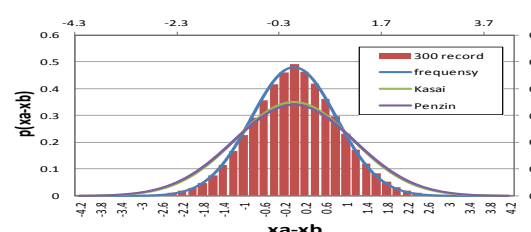


شکل (۱۶): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۷۰۵

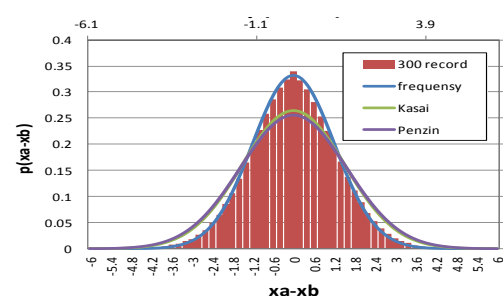
فرکانس انطباق خوبی با نتایج حاصل از ۳۰۰ رکورد ایستا دارد.



شکل (۱۱): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۳۰۲



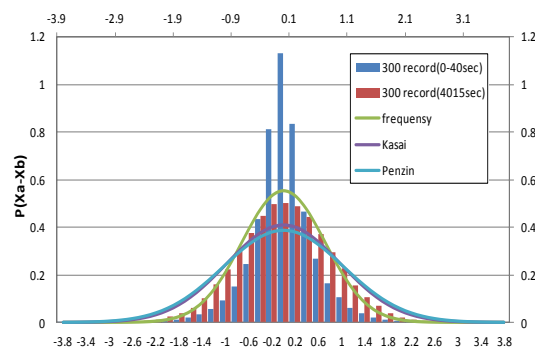
شکل (۱۲): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۴۰۲



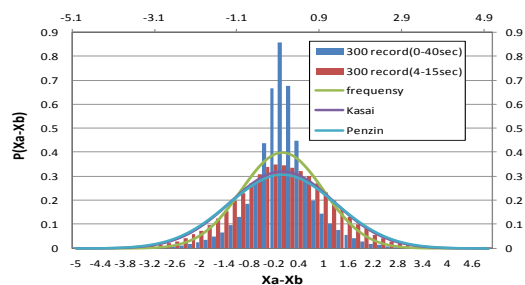
شکل (۱۳): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۵۰۲

پیشنهادی نتایج قابل قبولی در مقایسه با دیگر معیارهای موجود ارائه می کند و از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین اینکه نتایج کاسای از نتایج پنزین دقیق تر می باشد. گارسیا نیز با انجام تحلیل های عددی زیادی روی دو سیستم یکدرجه آزاد با مشخصات مختلف به این نتیجه رسید که

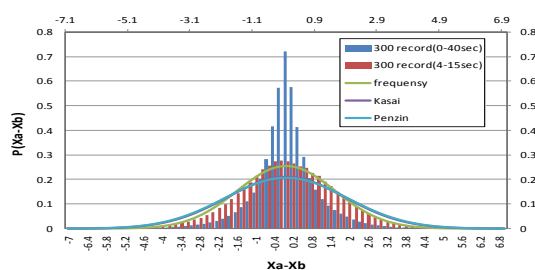
همان گونه که از شکل های ۱۱ تا ۱۶ مشهود است، توزیع تغییر مکان های نسبی تحت رکوردهای ایستا با چگالی طیفی تاجیمی کانای، از نوع گوسی و با میانگین صفر است. بنابراین فرضیه استفاده شده در محاسبه تابع توزیع احتمالاتی قابل قبول است. نتایج نشان می دهد که حل در حوزه فرکانس



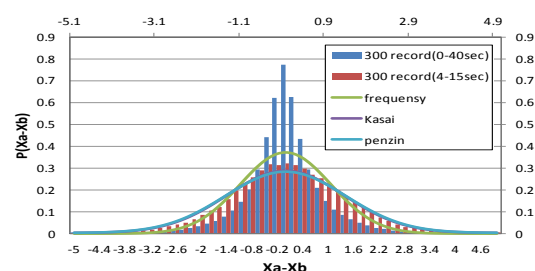
شکل (۱۸): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۳/۱ و ۵/۱



شکل (۱۹): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۴/۱ و ۵/۱



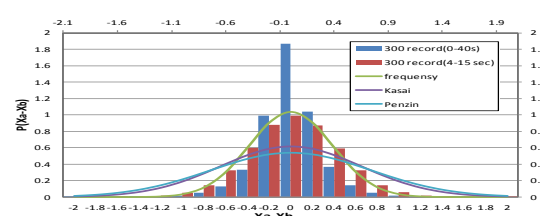
شکل (۲۰): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۵/۱ و ۵/۱



شکل (۲۱): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۲/۵ و ۵/۱

به طور کلی، نتایج کاسای دقیق‌تر از نتایج پنزین است [۳]. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۵، نیاز شکل‌پذیری یکی از سیستم‌ها ثابت و برابر ۲ و تقریباً سیستم وارد محدوده غیرخطی نشده است و شکل‌پذیری سیستم دیگر از ۳ تا ۷ تغییر کرده که معرف ورود به محدوده غیرخطی بیشتر است. توزیع احتمالاتی تغییر مکان در این حالت گسترده‌تر شده و محدوده تغییر مکانی بیشتری را در بر می‌گیرد. با افزایش تغییر شکل‌های غیرخطی، همچنان رابطه ارائه شده در حوزه فرکانس، نتایج خوبی را به نمایش گذاشته است. شکل ۱۶ نیز نشان دهنده صحت رابطه ارائه شده برای حالتی است که هر دو سیستم وارد محدوده غیرخطی شده‌اند. بنابراین رابطه ارائه شده در حوزه فرکانس توزیع احتمال تغییر مکان نسبی بین دو سیستم غیرخطی و خطی و همچنین ترکیبی از این دو را به درستی پیش‌بینی می‌کند.

در حالت تحریک‌های غیر ایستا نیز می‌توان از فرض ایستا بودن موضعی استفاده کرد. همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد، تحریک‌ها در فاصله ۴ الی ۱۵ ثانیه ایستا است، بنابراین می‌توان از روابط موجود در حالت ایستا برای تعیین توزیع تغییر مکان نسبی بین دو سیستم برای ناحیه ایستا در رکوردهای غیر ایستا استفاده کرد. برای کنترل روابط ارائه شده در قسمت ایستای تحریک‌های غیر ایستا، شش سیستم با شکل‌پذیری‌های ۱/۵، ۲، ۳، ۴ و ۵ و شش حالت مختلف برخورد بین دو سیستم در نظر گرفته شده است. سپس تابع چگالی احتمالاتی تفاضل تغییر مکان‌ها تحت اثر ۳۰۰ رکورد غیرایستا با چگالی حاصل از روابط ارائه شده در حوزه فرکانس و همچنین روابط کاسای و پنزین مقایسه شده است (شکل ۱۷ تا شکل ۲۲).

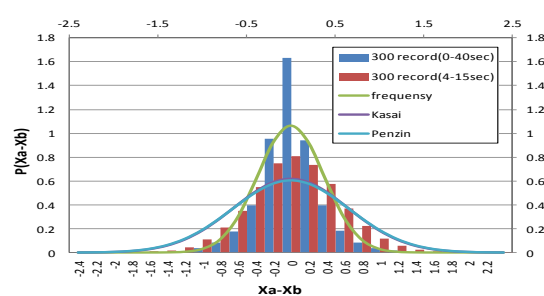


شکل (۱۷): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۲/۱ و ۵/۱

وابستگی بین دو سیستم در روابط موجود نیز از حل خطی حاصل شده و برای حالت غیرخطی اصلاح می‌شود. با توجه به اینکه ضرایب وابستگی بین دو سیستم به مقدار نیاز شکل پذیری دو سیستم تحت تحریک ورودی بستگی دارد، در این پژوهش مقدار نیاز شکل پذیری سیستم با مدل رفتاری بوک ون برای یک تابع چگالی طیفی حاصل شده است. با انجام آنالیز مونت کارلو مشخص شد که روابط ارائه شده برای تعیین توزیع احتمالاتی پاسخ نسبی بین دو سیستم با مدل رفتاری بوک ون و تحریک ایستای گوسی تاجیمی کانای، نتایج بهتری نسبت به معیارهای کاسای و پنزیل به دست می‌دهد. در حالت غیرایستا نیز با در نظر گرفتن ایستایی موضعی در قسمت میانی رکوردها، از روابط ارائه شده حالت ایستا استفاده شده و با نتایج آنالیز مونت کارلو مقایسه شد. نشان داده شده که روابط ارائه شده در قسمت ایستای تحریک غیر ایستا تطابق خوبی با نتایج مونت کارلو دارد.

## ۹- مراجع

- [1] Lopez Garcia D, «*Sepration distance necessary to prevent seismic pounding between adjacent structures*», A diddertation submitted to the Faculty of the Graduate School of The State Univesity of New York at Buffalo, 2004.
- [2] Rosenblueth, E., and Mell, R. «*The 1985 earthquake: causes and effects in Mexico City*». Concrete Int., 8(5): 23-34, 1986.
- [3] Jeng V, Kasai K, Maison BF. «*A spectral difference method to estimate building separations to avoid pounding*». Earthq Spectra., 8(2):201-223, 1992.
- [4] Kasai K, Jagiasi AR, Jeng V. «*Inelastic vibration phase theory for seismic pounding mitigation*». ASCE J Struct Eng., 122(10):1136-46, 1996.
- [5] Penzien J. «*Evaluation of building separation distance required to prevent pounding during strong earthquakes*». Earthq Eng Struct Dyn; 26(8):849-58, 1997.



شکل (۲۲): توزیع احتمالاتی تغییر مکان نسبی بین سیستم با شکل پذیری ۴ و ۵

همان‌گونه که از شکل های ۱۷ تا ۲۲ پیدا است، توزیع تغییر مکان‌های نسبی در قسمت ایستای رکوردهای غیرایستا با چگالی طیفی تاجیمی کانای، گوسی و با میانگین صفر است. نتایج نشان می‌دهد که حل در حوزه فرکانس پیشنهادی نتایج قابل قبولی در مقایسه با دیگر معیارهای موجود ارائه می‌کند، و از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین این‌که نتایج کاسای از نتایج پنزیل دقیق‌تر است. در شکل های ۱۷ تا ۲۰، نیاز شکل پذیری یکی از سیستم‌ها ثابت و برابر ۱/۵ و تقریباً سیستم وارد محدوده غیرخطی نشده است و شکل پذیری سیستم دیگر از ۳ تا ۵ تغییر کرده است. توزیع احتمالاتی تغییر مکان در این حالت گسترده‌تر شده و محدوده تغییر مکانی بیشتری را در بر می‌گیرد. با افزایش تغییر شکل های غیرخطی، همچنان رابطه ارائه شده در حوزه فرکانس، نتایج خوبی را به نمایش گذاشته است. شکل ۲۲ نیز نشان دهنده صحت رابطه ارائه شده برای حالتی است که هر دو سیستم وارد محدوده غیرخطی شده است.

## ۸- نتیجه گیری

در این پژوهش از تئوری ارتعاشات تصادفی، برای تعیین توزیع احتمالاتی پاسخ تغییر مکان نسبی استفاده شد. مقدار انحراف معیار پاسخ بین دو سیستم به وسیله روابط ارتعاشات تصادفی برای سیستم با مدل رفتاری بوک ون تحت تحریک با چگالی طیفی مشخص حاصل شد. این در حالی است که مدل‌های موجود برای تعیین مقدار انحراف معیار تغییر مکان نسبی بین دو سیستم تنها برای یک مدل رفتاری خاص به کار برده می‌شوند و مقدار ضریب

## ۱۰- پیوست الف

تعیین ضریب وابستگی پاسخ دو سیستم در روش ترکیب تفاضلی دو گانه:  
معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد تحت اغتشاش زمین برابر است با:

$$m_n \ddot{y}_n + c_n \dot{y}_n + k_n y_n = -m_n \ddot{y}_g(t) \quad (\text{پ ۱})$$

پاسخ سیستم در حوزه فرکانس برابر است با:

$$y_n(i\omega) = \frac{-m_n}{k_n} H_n(i\omega) \ddot{y}_g(i\omega) \quad (\text{پ ۲})$$

تبدیل فوریه پاسخ به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\ddot{y}_g(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{y}_g(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{پ ۳})$$

تابع پاسخ فرکانسی سیستم یکدرجه آزادی مطابق رابطه ۴ تعیین می گردد:

$$H_n(i\omega) = \frac{1}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 2i\xi_n \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]} \quad (\text{پ ۴})$$

که در آن  $\omega_n$  و  $\xi_n$  فرکانس طبیعی و میرایی سیستم می باشد. بنابراین پاسخ سیستم در هر لحظه از زمان برابر است با:

$$y_n(t) = \frac{m_n}{2\pi k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(i\omega) \ddot{y}_g(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{پ ۵})$$

[6] Lopez-Garcia D, Soong T «Evaluation of current criteria in predicting the separation necessary to prevent seismic pounding between nonlinear hysteretic structural systems», Engineering Structures 31 (1) 217-229, 2009.

[7] Bouc, R. «Forced vibration of mechanical system with hysteresis». In: Proc. of 4th Conference on Nonlinear Oscillation, Prague, 282. 1967.

[8] Wen, Y. «Method for random vibration of hysteretic systems». ASCE J.Eng. Mech. 102, 249-263, 1976.

[9] Kanai, K. «Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion», Bulletin of the Earthquake Research Institute Univ of Tokyo, Vol.35m, pp 209-325, 1957.

[10] Tajimi, H. «A statistical method of determining the maximum response of building structure during an earthquake», Proc. Of 2nd WCEE, vol.2, Science Council of Japan, Tokyo, pp. 781-798, 1960.

[11] Elghadamsi, F.E. and Mohraz, B. and Moayyad, P. «Time-dependent power spectral density of earthquake ground motions», Int. J. Soil Dyn. And Earth. Eng. 7 ,No.1, pp. 15-21, 1988.

[12] Shinozuka M, Sato Y. «Simulation of nonstationary random processes». J Engng Mech Div; 93:11-40, 1967.

[13] Wen, Y. «Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation». Trans. ASME J. APP. Mech. 47, 150-154, 1980.

[14] Hurtado, J. and Barbat, A. «Improved stochastic linearization method using mixed distributions». Struct. Safety 18, 49-62, 1996.

[15] Jennings, P.C. and Housner, G.W. and Tsai, N.C, «Simulated earthquake motions», California Institute of Technology, Pasadena, California, 1968.

[16] Sematech, «Tolerance intervals for a normal distribution». Engineering Statistics Handbook, Retrieved 2011-08-26.2010.

با استفاده از تئوری ارتعاشات تصادفی مقدار امید ریاضی مجذور پاسخ تعیین می گردد.

$$E[y_n(t) y_m(t)] = \frac{1}{td} \int_0^{td} y_n(t) y_m(t) dt \quad (پ۷)$$

$$= \frac{1}{td} \frac{m_n m_m}{4\pi^2 k_n k_m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(i\omega) H_m(i\omega) |\ddot{v}_g(i\omega)|^2 d\omega$$

(پ۶)

در صورتی که چگالی تحریک ورودی را اغتشاش سفید (S) در نظر بگیریم، مقدار ضریب وابستگی پاسخ دو سیستم از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\rho_{nm} = \frac{E[y_n(t) y_m(t)]}{\sqrt{E[y_n^2] E[y_m^2]}} \quad (پ۸)$$

$$= \frac{8\sqrt{\xi_n \xi_m} (\xi_n + r \xi_m) r^{3/2}}{(1 - r^2)^2 + 4\xi_n \xi_m r (1 + r^2) + 4(\xi_n^2 + \xi_m^2) r^2}$$

$$r = \frac{\omega_n}{\omega_m}$$

$$E[y_n^2(t)] = \frac{1}{td} \int_0^{td} y_n^2(t) dt =$$

$$\frac{1}{td} \frac{m_n^2}{4\pi^2 k_n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(i\omega)|^2 |\ddot{v}_g(i\omega)|^2 d\omega$$

مدت زمان تحریک می باشد. مقدار تابع دگر ارتباطی پاسخ دو سیستم m و n برابر است با: