

همگن سازی خطی در سازه های بنایی

ایمان صالحی دلارستانی¹، مسعود سلطانی محمدی^{2*}، عباسعلی تسنیمی³

1- کارشناس ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

2- دانشیار گروه مهندسی زلزله، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

3- استاد گروه سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

msoltani@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: آبان 1385، پذیرش مقاله: دی 1386)

چکیده - در این مقاله همگن سازی خطی در سازه های بنایی با پیکربندی متناوب مطالعه شده است. بدین ترتیب که المان پایه به عنوان کوچکترین جزء تکرار شونده با ریزمدل سازی ملات و واحد بنایی و تخصیص خواص ارتجاعی و خطی به آن دو، با المانی همگن و ارتوتروپ معادل سازی می شود. پارامترهای ارتوتروپ به دو روش المان محدود و روش تقریبی انرژی (با حل بسته) تعیین شده و نیز در روش المان محدود با تعریف ماتریس انتقال، تنش همگن به تنشهای ناهمگن المان پایه انتقال می یابد و در مقایسه با مدل ناهمگن دقت این دو فرایند به اثبات می رسد. همچنین با تهیه یک برنامه المان محدود، منحنی های تسلیم المان همگن معادل با فرض رفتار خطی - شکننده و معیارهای تسلیم مناسب برای ملات و واحد بنایی، ارائه و مطالعه می شود. شباهت رفتار کلی این منحنی های تسلیم با منحنی های تسلیم آزمایشگاهی قابل توجه است.

کلید واژگان: سازه بنایی، همگن سازی خطی، المان محدود، روش تقریبی، پیش بینی تنش، منحنی تسلیم.

1- مقدمه

بنایی، ناهمگن³ است. به دلیل ریزمدل سازی دلخواه و مستقل از موقعیت ملات یا واحد بنایی، زمان مدل سازی، حجم اطلاعات ذخیره شده و حجم محاسبات نسبت به مدل ناهمگن کاهش می یابد. همچنین تفسیر نتایج خروجی ساده تر می شود، بنابراین نسبت به مدل های ناهمگن بدون شک کاربرد عملی بیشتری دارد.

در هر مدل همگن¹، رفتار مرکب بنایی برحسب تنش متوسط و کرنش متوسط بیان می شود [1]، یعنی قوانین رفتاری² ماده ای فرضی تعیین می شوند، زیرا خواص ملات و واحد بنایی با یکدیگر تفاوت داشته و در واقع سازه

1. Homogonous
2. Constitutive laws

3. Non-homogonous/heterogonous

مدل همگن می تواند به دو روش استخراج شود:

- (1) با اتکا بر نتایج آزمایشگاهی بر روی صفحات بنایی¹،
- (2) فرایند همگن سازی² [2].

در روش اول، سطوح جانبی صفحات بنایی به عنوان المانی دو بعدی تحت تنشهای همگن و یکنواخت قرار می گیرند [1]. این صفحات نسبتاً کوچک بنایی، نمونه هایی منشوری متشکل از چند رج آجر در ارتفاع و چند آجر در طول است. از آنجا که در سازه هایی با پیکربندی متناوب³، جزئی ناهمگن به طور متناوب تکرار می شود، لذا در آیین نامه های بنایی به این صفحات، گاهی المان معرف بنایی⁴ می گویند. در تقسیم بندی کلی، این روش به دو دسته جامع و ساده تقسیم می شود.

الف) حالت جامع: بارگذاری وارد شده بر سطوح جانبی صفحه بنایی شامل حالت های متنوعی است [3]. به عنوان نمونه در [1]، سطح تسلیم ارتوتروپ مدل تحلیلی همگن و غیرخطی آن با اتکا به این آزمایشها مقیاس⁵ می شود. عیب مهم این روش، بالا بودن هزینه های آزمایشگاهی است. از سویی دیگر شرایط جدید بارگذاری، آزمایشهای جدیدی را می طلبد [4].

ب) حالت ساده: بارگذاری صفحه بنایی فقط به حالت بسیار خاصی محدود می شود. برخی از آیین نامه های بنایی با پذیرش این منطق، مدل سازی سازه بنایی را با المانی همگن، همسانگرد، خطی و ارتجاعی، ایده ال سازی می کنند [5]. در این رویکرد فقط یک مدول ارتجاعی (E_m) معرفی می شود که بوسیله f'_m به دست می آید. f'_m ، مقاومت 28 روزه المان معرف است که با شرایط

کنترل شده و با بارگذاری فشاری در راستای قائم به دست آمده است و نیز بسیاری از مقادیر طراحی بر اساس f'_m پیشنهاد می شود.

از سوی دیگر با اتکا به مدل سازی ناهمگن المان معرف یا المان پایه، می توان پارامترهای مورد نیاز برای مدل سازی همگن را تعیین کرد. این فرایند به همگن سازی موسوم است. واضح است که آزمایشهای لازم برای مدل ناهمگن (آزمایش بر روی ملات و بلوک بنایی) کم هزینه تر از آزمایش بر روی صفحات بنایی می باشد. بدین ترتیب در مدل همگن استنتاجی از روش همگن سازی علاوه بر بهره بردن از مزایای مدل همگن، هزینه آزمایشگاهی به شدت کاهش می یابد. از طرف دیگر وضعیت تنش در اجزای بنایی نمی تواند در مدل همگن استنتاج شده از آزمایش بر روی صفحه بنایی به دست آید درحالی که چنین ممنوعیتی در روش همگن سازی وجود ندارد.

این مقاله بر استفاده از روش همگن سازی خطی در سازه های ناهمگن بنایی دو بعدی با پیکربندی متناوب متمرکز است. با توجه به کاربردهای طراحی مدل همگن آیین نامه ای، مشخص می شود که تحلیل خطی همچنان کاربردی ترین روش تحلیلی است. از این منظر همگن سازی خطی اهمیت ویژه ای می یابد.

در روش همگن سازی خطی، المان پایه به عنوان کوچکترین جزء تکرار شونده در سازه مذکور با المانی همگن، ارتوتروپ و خطی معادل سازی می شود. این فرایند توسط محققان مختلف و با روشهای متفاوت دقیق یا المان محدود [6] و تقریبی مورد استفاده قرار گرفته است. در روشهای تقریبی از فرضیات ساده کننده ای برای محاسبات استفاده می شود که دقت آنها به اندازه روشهای المان محدودی نیست اما در صورت دقت در فرضیات

1. Masonry panel
2. Homogenisation /Homogenization
3. Periodic arrangement
4. Representative masonry element
5. Calibrate

مورد استفاده می‌توانند دقت قابل قبولی داشته باشند. از این روشها می‌توان به روش یک مرحله ای [7]، روش دو گامی [4] یا روشهای مهندسی [8] اشاره کرد.

در این مقاله نحوه به‌دست آوردن پارامترهای ارتوتروپیک المان همگن به روش المان محدود و روش انرژی (روشی تقریبی با حلی بسته) توسعه و تشریح می‌شود. در هر دو روش، المان پایه در مرز ملات و بلوک شبکه‌بندی¹ شده و خواص خطی و ارتجاعی به آن دو تخصیص داده می‌شود. در روش المان محدود، تعیین پارامترهای ارتوتروپ، به تعیین کرنش معادل وابسته است. برای تعیین کرنش معادل در سه حالت بارگذاری، سه مدل ساخته می‌شود که مهمترین پیش فرض این مدل-سازی، اعمال قیدهای هم حرکت² مناسب بر روی سطوح جانبی المان پایه است.

شایان توجه است که تنشهای مدل همگن، واقعی نیستند، زیرا از مشخصات ماده‌ای فرضی به‌دست آمده است. در این مقاله همچنین وضعیت تنش در مدل ناهمگن مورد بحث قرار می‌گیرد. در همگن‌سازی به روش المان محدود، با تعریف ماتریس انتقال، تنشهای مدل همگن به تنشهای مدل ناهمگن قابل تبدیل است. پیش فرض اساسی این تبدیل آن است که هر نقطه از مدل همگن با تمامی گره‌های المان پایه ریز مدل شده متناظر است. البته تنشهای متفاوتی در هر گره از المان پایه که به چند المان وصل است (به‌ویژه اگر در محل اتصال ملات به بلوک قرار داشته باشد)، بسته به اینکه مربوط به کدام المان است، به‌دست می‌آید. در ادامه درباره تغییرات تنش در مدل ناهمگن بحث خواهیم کرد.

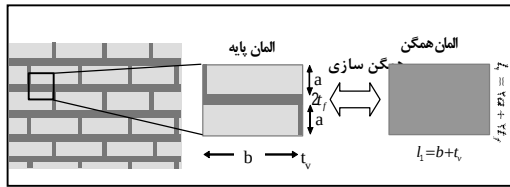
با ارائه چند مثال عددی، دقت بالای فرایند همگن‌سازی در مقایسه با مدل ناهمگن در پیش‌بینی تغییر مکانها و سختی سازه و دقت خوب آن در پیش‌بینی تنش‌ها تأیید می‌شود.

در نهایت با فرض اینکه هر یک از اجزای بنایی رفتاری خطی- شکننده دارد و از معیار شکست رانکین در کشش و فون- میسز در فشار پیروی می‌کند، منحنی‌های تسلیم دوبعدی برای المان همگن فوق ارائه می‌شود. برای تعیین سطوح تسلیم مدل همگن صرفاً از دو تنش بیشینه ایجاد شده در ملات و نیز واحد بنایی استفاده می‌شود. بدین منظور برنامه المان محدودی نوشته شده که با توجه به مشخصات هندسی و ارتجاعی ملات و نیز واحد بنایی، میزان شبکه‌بندی المان پایه و نیز اعمال قیدهای هم حرکت یا عدم اعمال آن بر سطوح جانبی آن، پارامترهای ارتوتروپ و ماتریس‌های انتقال تنش را استنتاج می‌کند. علاوه بر آن با اتکا به اطلاعات قبلی و نیز مشخصات مقاومتی ملات و واحد بنایی، منحنیهای تسلیم را استخراج می‌کند.

به دلیل ناهمگنی المان پایه، شکل این منحنی تسلیم زاویه دار بوده و با تغییر تنش برشی به‌شدت تغییر می‌کند. همچنین به‌وضوح دیده می‌شود که این منحنی تسلیم نمی‌تواند بر اساس دو تنش اصلی بیان شود. مشابه این رفتار در سطوح تسلیم واقعی استنتاجی از آزمایش بر روی صفحات بنایی نیز دیده می‌شود.

هر چند که این منحنیهای تسلیم بر اساس فرضهای ساده‌ای به‌دست آمده، با وجود این در صورت مقیاس این منحنی‌ها از طریق چند نقطه از منحنی تسلیم واقعی (استنتاجی از آزمایش بر روی صفحات بنایی) می‌توان تا حدودی شکل منحنی تسلیم را پیش‌بینی کرد. البته باید تحقیق بیشتری بر روی معیارهای گسیختگی و چگونگی

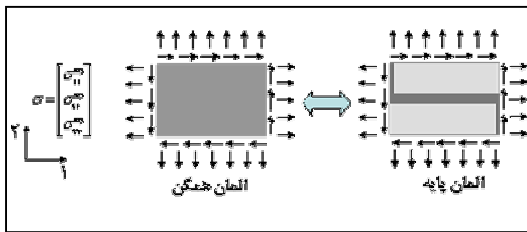
1. Meshing
2.Constraint



شکل 1 المان پایه و همگن در سازه های بنایی با پیکربندی متناوب

همگن سازی به فرایندی موسوم است که بین بردار کرنش متوسط المان پایه (s^{eq}) و بردار تنش متوسط آن (e^{eq}) رابطه ای برقرار می شود که معرف رفتار میانگین المان پایه است.

$$[e^{eq}]_{n \times 1} = [D^{eq}]_{n \times n} \times [s^{eq}]_{n \times 1} \quad (1)$$



شکل 2 معادل بودن المان پایه و المان همگن با یکدیگر

ماتریس D^{eq} که رابطه بین کرنش و تنش را مشخص می کند، به ماتریس نرمی ماده موسوم بوده و در واقع قانون ساختاری ماده⁴ است.

از آنجا که فرض شده المان پایه با المان همگنی معادل شود، قوانین رفتاری میانگین المان پایه به المان همگن نسبت داده می شود (شکل 2).

برای بررسی مفصل و ورود به جزئیات همگن سازی با پیکربندی نامتناوب به [9] رجوع شود. در این مرجع به جای مفهوم المان پایه، مفهوم المان معرف ارائه می شود.

مقیاس این منحنی ها انجام شود اما با وجود این راه حل تقریبی و جایگزینی برای آزمایشهای پرخرج بر روی صفحات بنایی و یا مدل سازی زمان بر غیرخطی است. یعنی با تلاش محاسباتی اندک می توان تعداد آزمایشهای لازم بر روی صفحات بنایی را کاهش داد.

2- تعریف همگن سازی و روشهای آن

چگونگی قرار گرفتن ملات افقی¹ و ملات قائم² و واحد بنایی (شامل آجر، بلوک و ...) در کنار یکدیگر به پیکربندی سازه بنایی موسوم است که می تواند متناوب و یا نامتناوب باشد. در پیکربندی متناوب، ابعاد واحد بنایی و ملات و مشخصات این دو در سراسر این ماده مرکب ثابت بوده و نیز ترکیبی از واحد بنایی و ملات به طور متناوب تکرار می شود. کوچکترین جزء متناوب مذکور "المان پایه"³ نامیده می شود. شکل 1 المان پایه دوبعدی را در یک پیکربندی متناوب خاص نشان می دهد. 2a و 2b به ترتیب بعد قائم و افقی واحد بنایی و نیز $2t_f$ و $2t_v$ به ترتیب ضخامت ملات بستر (افقی) و درز قائم تعریف می شود.

از آنجا که ناهمگنی این سازه مرکب در المان پایه خلاصه می شود، این ایده مطرح می شود که اگر المان پایه به شکلی با المان همگن معادل سازی شود، با توجه به تکراری بودن المان پایه، سراسر این سازه ناهمگن، با رفتار همگن متناظر می شود که شبکه بندی یکنواخت و دلخواهی را برای آن می توان در نظر گرفت.

1. Bed joint
2. Head joint
3. Basic cell

4. Constitutive law

در کلی‌ترین حالت ماتریس D^{eq} را می‌توان متقارن با درایه‌هایی مستقل و غیر صفر در نظر گرفت. با وجود این در هر دو رویکرد غالباً فرضیهایی برای بدست آوردن کرنش معادل در المان پایه اعمال می‌شود تا المان همگن معادل، المانی ارتوتروپ شود؛ به عبارت دیگر نباید تصور شود که ارتوتروپ بودن، خاصیت ذاتی المانهای همگن استنتاج شده از روشهای همگن‌سازی است بلکه صرفاً فرضی با دقت قابل قبول است. در این مقاله صرفاً بر روی حالت‌های دو بعدی تمرکز داریم. با وجود این روشهای همگن‌سازی که در این مقاله اختیار شده، به راحتی قابل تعمیم به المان پایه سه بعدی است.

در این مقاله، همگن‌سازی غیرخطی بررسی نمی‌شود. همگن‌سازی غیرخطی پیچیدگی بیشتری دارد و معمولاً به روشهای تقریبی و یا با اعمال فرضهای ساده شونده در هندسه المان پایه صورت می‌گیرد [12]. بخش مهمی از مقالات ارائه شده در این حوزه بر نظریه خمیری و مکانیک خرابی متکی است که از میان آنها می‌توان به [2] و [13] استناد کرد. البته [12] صرفاً بر نظریه خمیری استوار است.

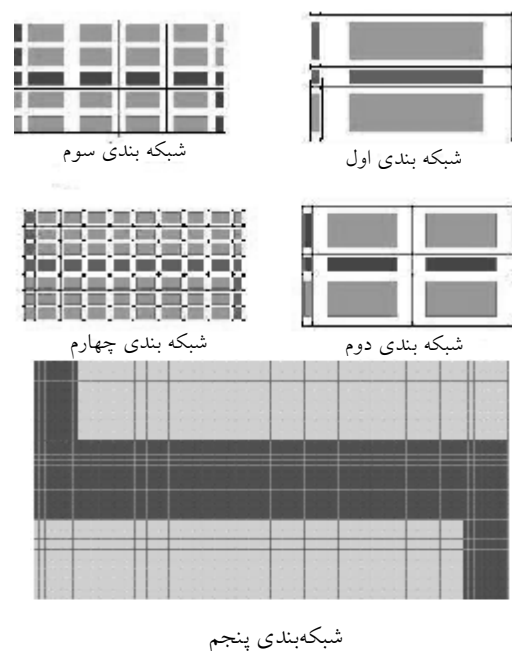
3- همگن‌سازی به روش المان محدود

3-1- تعیین پارامترهای ارتوتروپ

در المان دوبعدی همگن با فرض رفتار ارتوتروپ، رابطه (1) را می‌توان به ترتیب زیر ارائه کرد.

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{eq} \\ e_{22}^{eq} \\ 2e_{12}^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11}^{eq} & -n_{21}^{eq}/E_{22}^{eq} & 0 \\ -n_{12}^{eq}/E_{11}^{eq} & 1/E_{22}^{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12}^{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11}^{eq} \\ s_{22}^{eq} \\ s_{12}^{eq} \end{bmatrix} \quad (2)$$

از میان روشهای همگن‌سازی خطی، دو رویکرد معرفی می‌شود: (1) رویکرد المان محدودی. (2) رویکرد تقریبی. در هر دو رویکرد پس از تعیین المان پایه، المان پایه به المانهای کوچکتری در مرز ملات و واحد بنایی تقسیم شده (شکل 3) و خواص خطی و ارتجاعی و نیز عموماً همسانگرد به هر یک از آن دو تخصیص داده می‌شود. سپس تنش‌های یکنواخت قائم و برشی بر روی سطوح جانبی المان پایه اعمال و فرضیهایی برای به دست آوردن کرنش معادل اتخاذ می‌شود. در رویکرد دقیقتر درایه‌های ماتریس D^{eq} با استفاده از تحلیل المان محدود به دست می‌آید [7] [10] و در رویکرد دیگر با اعمال فرضیهایی ساده شونده بر روی کرنش اجزای ریز مدل شده و تنشهای آن، روشی تقریبی برای دستیابی به حلی بسته دنبال می‌شود [4] [11]. در این مقاله روش المان محدود و روش انرژی (روش تقریبی) به کار می‌رود.



شکل 3 پنج شبکه بندی المان پایه

مطابق رابطه (2) اگر المان پایه تحت تاثیر حالت بارگذاری اول متناظر با بردار تنش $[1 \ 0 \ 0]^T$ قرار گیرد، (شکل 4)، ستون اول ماتریس D^{eq} با بردار e^{eq} متناظر خواهد شد و به همین ترتیب در حالت دوم و سوم بارگذاری که متناظر با بردارهای تنش $[0 \ 1 \ 0]^T$ و $[0 \ 0 \ 1]^T$ است، ستون دوم و سوم ماتریس D^{eq} به دست می‌آید. بنابراین پیدا کردن درایه‌های ماتریس D^{eq} و یا پارامترهای ارتوتروپیک که شامل G_{12}^{eq} ، E_{22}^{eq} ، E_{11}^{eq} ، n_{21}^{eq} و n_{12}^{eq} است، به یافتن هر یک از سه کرنش $2e_{12}^{eq}$ ، e_{22}^{eq} ، e_{11}^{eq} در هر سه حالت بارگذاری وابسته می‌شود. برای تعیین این کرنشهای معادل، سه مدل ساخته می‌شود (شکل 4).

پس از تعیین المان پایه، المان باید به المانهای کوچکتری تقسیم شود تا حداقل در مرز ملات و واحد بنایی به‌طور مجزا تفکیک شود. پنج نوع شبکه‌بندی که در این مقاله استفاده می‌شود، در شکل (3) نشان داده شده است. در این مقاله از المان‌های چهار گرهی و مستطیلی با فرض توابع شکل ایزوپارامتریک استفاده می‌شود.

فرض می‌شود که المانهای دوبعدی واحد بنایی و نیز ملات، رفتاری ارتجاعی، خطی، همسانگرد و تنش مسطح دارند و به‌ویژه ضرایب مدول ارتجاعی بلوک بنایی و ملات (E_m ، E_b) و نیز ضرایب پواسون آن دو (ν_m ، ν_b) معین است. تعیین مدول ارتجاعی ملات از طریق نمونه‌های استوانه‌ای یا ورقه‌ای، به دلیل در نظر نگرفتن شرایط عمل‌آوری آجر در تماس با ملات و نیز نوع اتصال ملات به آجر و از سوی دیگر آزمایش بر روی نمونه‌های آجری با ضخامت کوچک یا نمونه‌های ورقه‌ای ملات به دلیل ایجاد تنش چند محوره، به نتایج غیر قابل اطمینانی منجر می‌شود. منطقی‌ترین گزینه برای

محاسبه مدول ارتجاعی ملات و آجر، آزمایش بر روی نمونه بنایی (متشکل از چند بلوک و ملاتهایی در بینشان) و نیز آجرهای به هم چسبیده است [5]. تقریباً از این رویکرد بهره برده و در آن مدول ارتجاعی استتاجی از میانگین پنج نمونه مجزای استوانه‌ای بیش از دو برابر مدول ارتجاعی ملات استتاجی از میانگین سه نمونه بنایی گزارش شده است.

در هر یک از سه حالت بارگذاری علاوه بر اعمال تنشهای یکنواخت متناظر با بردارهای سه‌گانه تنش، قیدهای تکیه‌گاهی مناسبی تعریف شده و برای اعمال فرض ارتوتروپ بودن ماتریس D^{eq} و نیز سادگی فرایند همگن‌سازی، به‌عنوان مهمترین پیش فرض، قیود هم حرکت مناسبی بر سطوح جانبی اعمال می‌شود (شکل 4). در غیر این صورت برای تعیین کرنشهای معادل، راهی جز میانگین‌گیری کرنشها وجود ندارد که مهمترین نقص آن عدم تقارن ماتریس D^{eq} است. با اعمال قیود هم حرکت، میانگین‌گیری تنشهای گرهی در سطوح جانبی جایگزین میانگین‌گیری کرنشها شده و کرنشها به طور دقیق و یکتا به‌دست می‌آید [14].

درحالت اول بارگذاری تمامی گره‌های سطح R در راستای 1 به‌طور مقید به یکدیگر و نیز تمامی گره‌های سطح T در راستای 2 به‌طور مقید با یکدیگر جابجا می‌شوند (شکل 4).

با جایگزینی بردار تنش $[1 \ 0 \ 0]^T$ در رابطه (2) مقادیر کرنش به‌شرح زیر به‌دست می‌آید.

$$e_{11}^{eq} = 1/E_{11}^{eq}, e_{22}^{eq} = -n_{12}^{eq}/E_{11}^{eq}, 2e_{12}^{eq} = 0 \quad (3)$$

و نیز تعاریف پایه کرنش، رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$e_{11}^{eq} = U_A/l_1, e_{22}^{eq} = V_A/l_2, 2e_{12}^{eq} = 0 \quad (4)$$

با دقت در روابط (5) تا (7) روشن می‌شود که پارامترهای ارتوتروپ با تعیین جابجایی‌های تنها یک گره (گره A) در هر یک از این سه مدل به دست می‌آید.

3-2- ماتریس انتقال تنش گرهی

تنشهای مدل همگن، واقعی نیستند زیرا از مشخصات ماده‌ای فرضی بدست آمده است؛ یعنی با اختصاص ماتریس D^{eq} به هر نقطه از مدل همگن، در همگن‌سازی به روش المان محدود، با تعریف ماتریس انتقال، تنشهای مدل همگن به تنشهای مدل ناهمگن تبدیل می‌شوند. پیش فرض اساسی این تبدیل آن است که هر نقطه از مدل همگن با همه گره‌های المان پایه ریز مدل شده متناظر است.

در هر یک از سه حالت بارگذاری مدل المان محدود (شکل 4)، اگر در هر یک از نقاط گرهی (نقطه j) از المانهای ریزمدل شده واقع در المان پایه (المان E) به ترتیب سه بردار تنش $Tr_{11}, Tr_{22}, Tr_{12}$ به دست آید، تنشهای مدل همگن را می‌توان با استناد به اصل جمع آثار و با استفاده از ماتریسهای $[Tr]_{3 \times 3}^{j,E}$ به تنشهای گرهی المانهای المان پایه متناظر کرد (رابطه 8).

$$[Tr]_{3 \times 3}^{j,E} = \begin{bmatrix} [Tr_{11}]_{3 \times 1}^{j,E} & [Tr_{22}]_{3 \times 1}^{j,E} & [Tr_{12}]_{3 \times 1}^{j,E} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}^{j,E} = \begin{bmatrix} Tr \end{bmatrix}^{j,E} \begin{bmatrix} S_{11}^{eq} \\ S_{22}^{eq} \\ S_{12}^{eq} \end{bmatrix} \quad (8)$$

بنابراین همگن‌سازی به روش المان محدود در تعیین ماتریس D^{eq} و ماتریسهای $[Tr]_{3 \times 3}^{j,E}$ خلاصه می‌شود.

و نهایتاً رابطه زیر از روابط (3) و (4) به دست می‌آید.

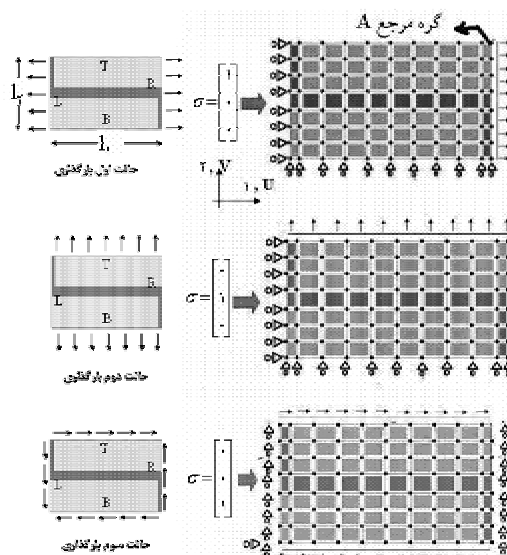
$$E_{11}^{eq} = l_1 / U_A, n_{12}^{eq} = -(l_2 / V_A) / (l_1 / U_A) \quad (5)$$

در حالت دوم بارگذاری، تمامی گره‌های سطح R در راستای 1 به طور مقید با یکدیگر و نیز تمامی گره‌های سطح T در راستای 2 به طور مقید با یکدیگر جابجا می‌شوند و رابطه زیر به همین ترتیب به دست می‌آید:

$$E_{22}^{eq} = l_2 / V_A, n_{21}^{eq} = -(l_1 / U_A) / (l_2 / V_A) \quad (6)$$

در حالت سوم بارگذاری، تمامی گره‌های سطح T در راستای 1 به طور مقید با یکدیگر و نیز تمامی گره‌های سطح B در راستای 1 به طور مقید با یکدیگر جابجا می‌شوند و رابطه زیر به همان ترتیب به دست می‌آید:

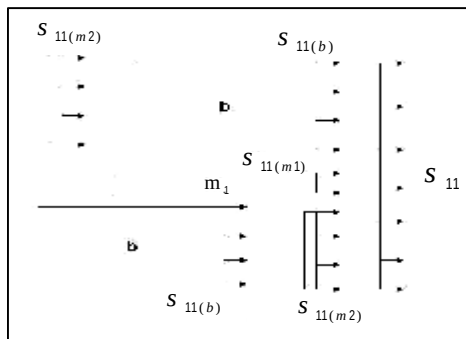
$$G_{12}^{eq} = l_2 / U_A \quad (7)$$



شکل 4 مدل‌سازی ریاضی سه حالت بارگذاری

توجه به حجم هر یک از اجزا، مجموع انرژی المان پایه به دست می آید. بر طبق قانون اول کاستیگیلیانو، اگر انرژی واحد حجم کل المان بر حسب هر یک از کرنشهای معادل مشتگیری شود، تنشهای معادل بر حسب کرنشهای معادل به دست می آید. به بیان دیگر معکوس ماتریس D^{eq} و هر یک از پارامترهای ارتوتروپیک در حلی بسته تعیین می شود.

در این روش فرض می شود که تنش بر روی سطوح جانبی هر یک از اجزای m_1 ، m_2 ، b (مانند سطحی دیفرانسیلی) یکسان بوده و نیز تنشهای قائم و تنش برشی خالص اعمال شده بر سطوح جانبی، فقط تنشهای متناظری را بر هر یک از اجزای m_1 ، m_2 ، b ایجاد می کند (شکل 6). همچنین مانند روش المان محدود فرض می شود که مدول ارتجاعی ملات بستر و درز قائم یکسان است اما در صورت تفکیک این دو، آسیبی به فرایند همکن سازی وارد نمی شود. واضح است که فرضهای تنش این روش خطا دارد. در رابطه (9)، چکیده این فرمول بندی پیشنهادی ارائه شده است [14]. شاخص m و b به ترتیب معرف ملات و بلوک بنایی است.



شکل 6 فرض ایجاد تنش یکنواخت و متناظر با تنش همگن در هریک از اجزا در روش انرژی در حالت اول بارگذاری

$$E_{11}^{eq} = \frac{4AB - C^2}{2B} \quad \text{و} \quad E_{22}^{eq} = \frac{4AB - C^2}{2A}$$

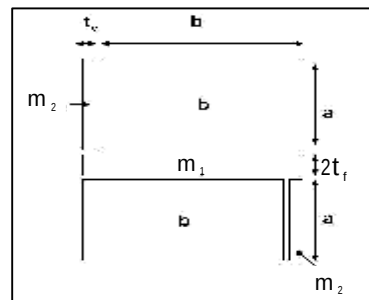
در صورت بالا بودن ناهمگنی المان پایه، در گره های محل اتصال ملات - واحد بنایی تنشهای گرهی در المانهای محصور کننده آن گره بسیار متفاوت می شود.

4- همکن سازی به روش انرژی

در این قسمت روش تقریبی پیشنهاد و فرمول بندی می شود که به نوعی در زمره روشهای همکن سازی دوگامی¹ قرار می گیرد و با تلاش محاسباتی بسیار کمتری نسبت به روش المان محدود، پارامترهای ارتوتروپ را با حلی بسته و با دقت قابل قبول به دست می دهد.

فرمول بندی ارائه شده در اینجا، دو بعدی است اما از مزایای روش انرژی آن است که می تواند برای دیگر پیوندهای مرسوم در بنایی نیز تعمیم داده شود.

خلاصه روش انرژی به شرح زیر است: ابتدا المان پایه به سه المان ملات بستر (m_1)، درز قائم (m_2)، بلوک بنایی (b) تقسیم می شود (شکل 5). در هر یک از سه حالت



شکل 5 شبکه بندی المان پایه به اجزای

m_1 ، m_2 ، b در روش انرژی

بارگذاری، با فرضهایی ساده هر یک از کرنشهای اجزای ریز مدل شده در المان پایه بر حسب کرنشهای معادل المان همگن به دست می آید. پس از آن انرژی واحد حجم اجزا بر حسب کرنشهای المان همگن فرمول بندی شده و با

1. Two-step homogenisation

هم² حساس نیست و نیز روش انرژی (رابطه 9) نسبت به روش المان محدود دقت قابل قبولی دارد. در روش انرژی و نیز در روش المان محدود یاد شده تقارن ماتریس D^{eq} برقرار است اما جدول 2 نشان می‌دهد که با اعمال نکردن قیود هم حرکت، تقارن این ماتریس برقرار نخواهد بود.

جدول 1 تأثیر شبکه بندی بر پارامترهای ارتوتروپ.

	1	2	3	4	5
E_{11}^{eq} / E_b	0,657	0,654	0,651	0,64	0,644
E_{22}^{eq} / E_b	0,4	0,399	0,398	0,397	0,396
G_{12}^{eq} / G_b	0,378	0,37	0,367	0,366	0,365
u_{12}^{eq}	0,171	0,171	0,172	0,174	0,176
u_{21}^{eq}	0,104	0,104	0,106	0,106	0,108

جدول 2 تأثیر مشخصات هندسی در روش المان محدودی (بدون اعمال هیچ قید هم حرکتی بر سطوح جانبی المان پایه)

FE	mesh1 و $b=10$ و $t_f=t_v=0.5$			
	$v_m=v_b=0,2$ $E_b=1$ $E_m=0,1$			
a	2,5	5	10	15
E_{11}	0,633	0,671	0,691	0,697
	0,375	0,527	0,676	0,749
G_{12}	0,163	0,21	0,244	0,258
v_{12}	0,185	0,166	0,157	0,154
v_{21}	0,096	0,123	0,15	0,163
Check*	0,131	0,058	0,024	0,014

$$* \text{check} = \left(\frac{E_{22}}{n_{21}} - \frac{E_{11}}{n_{12}} \right) \times 2 \left/ \left(\frac{E_{22}}{n_{21}} + \frac{E_{11}}{n_{12}} \right) \right.$$

$$G_{12}^{eq} = D, \quad n_{12}^{eq} = \frac{C}{2B} \quad \text{و} \quad n_{21}^{eq} = \frac{C}{2A}$$

$$A = \frac{1}{V^E} \left(\frac{V^b E_b f_1^2}{2(1-n_b^2)} + \frac{V^{m1} E_m}{2(1-n_m^2)} + \frac{V^{m2} E_m n^2 f_1^2}{2(1-n_m^2)} \right)$$

$$B = \frac{1}{V^E} \left(\frac{V^b E_b f_2^2}{2(1-n_b^2)} + \frac{V^{m1} E_m n^2 f_2^2}{2(1-n_m^2)} + \frac{V^{m2} E_m f_2^2}{2(1-n_m^2)} \right)$$

$$C = \frac{1}{V^E} \left(\frac{V^b E_b n_b f_1 f_2}{(1-n_b^2)} + \frac{V^{m1} E_m n_m n f_2}{(1-n_m^2)} + \frac{V^{m2} E_m n_m n f_1 f_2}{(1-n_m^2)} \right)$$

$$D = \frac{1}{V^E} \left(\frac{V^b E_b f_3^2}{2(1-n_b^2)} + \frac{V^{m1} E_m n^2 f_3^2}{2(1-n_m^2)} + \frac{V^{m2} E_m f_3^2}{2(1-n_m^2)} \right)$$

$$V^E = 2(a+t_f)(b+t_v) \quad \text{و} \quad V^b = 2ab$$

$$V^{m1} = 2t_f(b+t_v) \quad \text{و} \quad V^{m3} = 2bt_v$$

$$n = \frac{E_b}{E_m} \quad \text{و} \quad f_1 = \frac{b+t_v}{b+nt_v} \quad \text{و} \quad f_2 = \frac{a+t_f}{a+nt_f}$$

$$n_1 = \frac{G_b}{G_m} \quad \text{و} \quad n_2 = \frac{n_1 \times b + t_v}{b + nt_v} \quad \text{و} \quad f_3 = \frac{a+t_f}{a+n_2 t_f}$$

(9)

5- مثال عددی

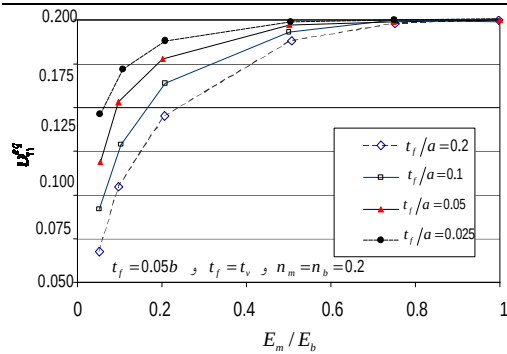
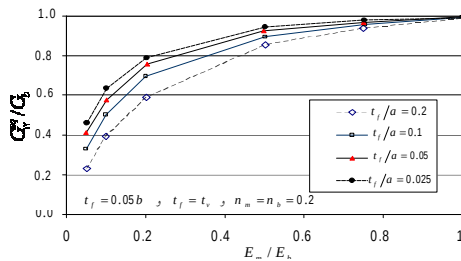
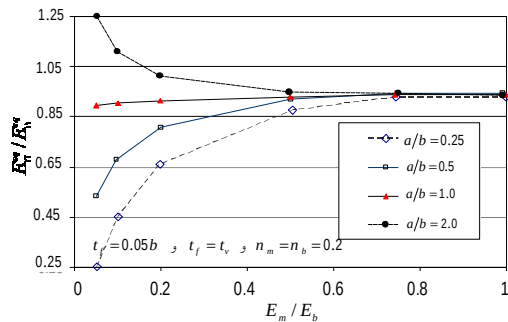
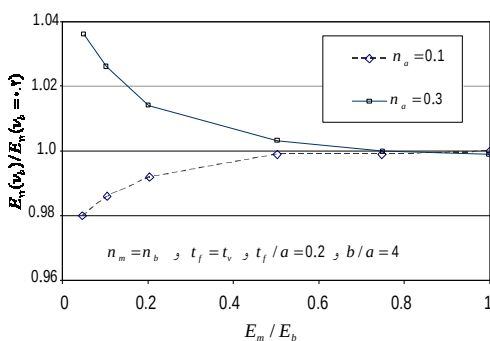
5-1- تعیین پارامترهای ارتوتروپیک

این پارامترها به روش المان محدود و بر اساس فرایند ذکر شده، توسط هر برنامه المان محدود خطی به سادگی تعیین می‌شود. مشخصات هندسی و ارتجاعی این مثال در مثالهای دیگر هم به کار می‌رود مگر آنکه خلاف آن ذکر شود. مشخصات هندسی المان پایه عبارتند از $2a = 5 \text{ cm}$ ، $2b = 20 \text{ cm}$ ، $2t_f = 2t_v = 1 \text{ cm}$ یا $b = 4a$ و $t_f = t_v = 0.2a$. مشخصات ارتجاعی ملات و بلوک عبارتند از: $E_m = 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ، $E_b = 10^5 \text{ kg/cm}^2$ یا $E_b/E_m = 0.1$ و نیز $n_m = n_b = 0.2$. جدول 1 نشان می‌دهد که با افزایش ریزمدل‌سازی المان پایه، پارامترهای ارتوتروپ به میزان ناچیزی تغییر می‌کند.

محاسبات نشان می‌دهد که پارامترهای ارتوتروپیک به تغییر پیکربندی از پیوند راسته¹ (پیش‌فرض این فصل) به پیوند روی

1. Stretcher bond

2. Stack bond

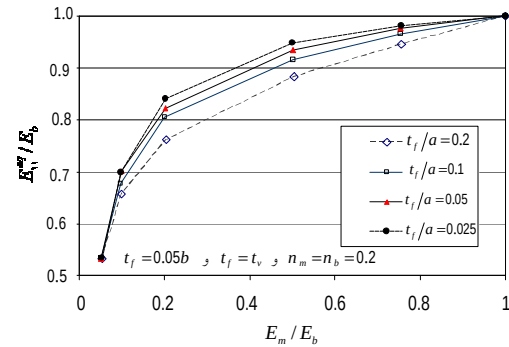
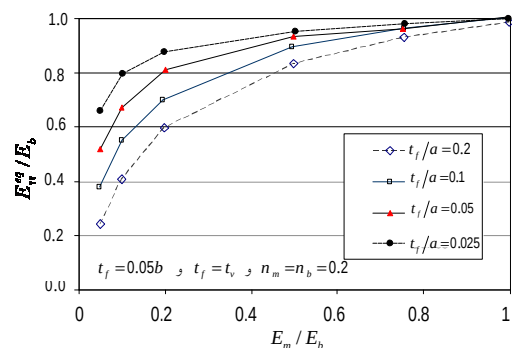

 شکل 9 تأثیر E_m/E_b و t_f/a بر u_{21}^{eq}

 شکل 10 تأثیر E_m/E_b و t_f/a بر u_{12}^{eq}

 شکل 11 تأثیر نسبت ابعاد و E_m/E_b بر u_{22}^{eq}

 شکل 12 تأثیر تغییر ضریب پواسون بر u_{22}^{eq}

2-5- مطالعه پارامتریک

به منظور مطالعه کاملتر عوامل مؤثر بر پارامترهای ارتوتروپیک و نیز تعیین تنشهای ایجاد شده در هر گره، برنامه المان محدود با اطلاعات ورودی زیر نوشته شد:

- (1) ابعاد بلوک بنایی و ضخامت ملات بستر و درز قائم،
- (2) پارامترهای ارتجاعی شامل مدول ارتجاعی و ضریب پواسون در بلوک بنایی و ملات، (3) میزان شبکه‌بندی، (4) اعمال قیود هم حرکت یا عدم اعمال آن و (5) پیوند راسته یا روی هم.

با توجه به عدم تأثیر شبکه‌بندی بر پارامترهای ارتوتوپ به منظور سادگی بیشتر، از شبکه‌بندی اول استفاده شده است. شکلهای (7) تا (13) در حالتیکه ضخامت و خواص ارتجاعی ملات افقی و قائم یکسان فرض شده، به دست آمده است.


 شکل 7 تأثیر E_m/E_b و t_f/a بر u_{11}^{eq}

 شکل 8 تأثیر E_m/E_b و t_f/a بر u_{22}^{eq}

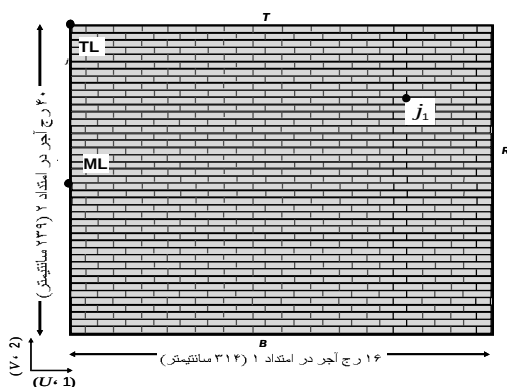
6- اعتبارسنجی فرایند همگن سازی با مقایسه

مدل همگن نسبت به مدل ناهمگن

در تمامی مثالها به طور ایده‌آل فرض می‌شود که سازه در محدوده خطی و ارتجاعی باقی می‌ماند و هیچ ترک خوردگی در آن رخ نمی‌دهد. مدل‌های همگن و ناهمگن در نرم افزار SAP2000 مدل‌سازی شده است. برای ایجاد مدل‌های ناهمگن، المان پایه‌ای با شبکه‌بندی دوم چندین بار تکرار و اضافات آن حذف شده است.

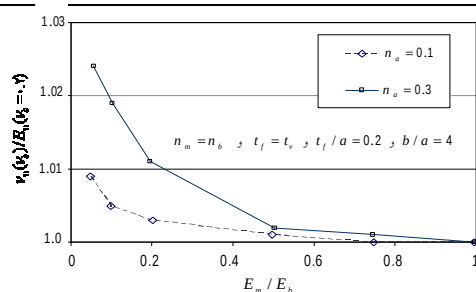
6-1- مثال اول: جابجایی در دیوار بنایی

فرض کنید دیوار آجری به عمق 10 cm و مشخصات هندسی و ارتجاعی مثال مرجع مورد بررسی قرار گیرد. بار گسترده ای در جهت X به میزان 5000 kgf / m بر روی سطح بالایی و نیز سطح سمت چپ دیوار قرار داده و سطح سمت راستی در امتداد X و سطح پایین دیوار در راستای X، Y مقید شده است (شکل 15).



شکل 15 مدل ناهمگن در مثال اول

مدل همگنی با شبکه بندی یکنواختی به تعداد 30 و 40 واحد در امتداد افقی و قائم ایجاد شده که در آن از 4 نوع المان همگن استفاده شده است (جدول 4). ماده اول و

شکل 13 تاثیر تغییرضریب پواسون بر u_{21}^{eq}

نتایج کلی به شرح زیر است:

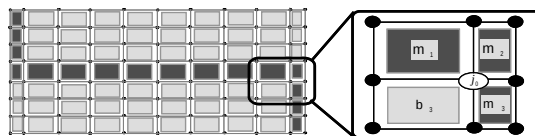
(1) پارامترهای E_{11}^{eq}/E_b و u_{12}^{eq} بیش از همه از E_m/E_b و t_f/l_1 و پارامترهای E_{22}^{eq}/E_b و u_{21}^{eq} بیش از همه از E_m/E_b و t_f/l_2 متأثر است.

(2) با نزدیک شدن ابعاد آجر به یکدیگر، صرف نظر از مشخصات مصالح و نیز با نزدیک شدن E_m/E_b به 1 (یا بزرگتر از 0,5) صرف نظر از مشخصات هندسی، رفتار المان همگن به حالت ایزوتروپ میل می‌کند.

(3) تغییر v_b ($v_m = v_b$) تاثیر زیادی بر E_{11}^{eq}/E_b و u_{12}^{eq}/u_b ندارد. E_{22}^{eq}/E_b و u_{21}^{eq}/u_b ندارد.

5-3- تعیین ماتریس انتقال

در جدول (3) ماتریس‌های $[Tr]_{3 \times 3}^{j,E}$ در سه شبکه‌بندی دوم و چهارم و پنجم گنجانده شده است. در شکل (14) موقعیت مکانی نقطه $j = j_0$ و چهار المان محصورکننده آن مشخص شده است. با افزایش ریزمدل‌سازی المان پایه برخلاف پارامترهای ارتوتروپیک، ماتریسهای انتقالی به‌طور محسوسی تغییر می‌کند.

شکل 14 موقعیت مکانی نقطه $j = j_0$ و چهار المان (E)

محصورکننده آن یعنی $m1, m2, m3, b$

دوم به ترتیب خواص ارتوتروپیک استنتاج شده از روش المان محدود (با المان پایه ای با شبکه بندی دوم) و نیز روش انرژی را دارد. ماده سوم و چهارم، موادی با خواص ایزوتروپ فرض می شود که ضریب پواسون آندو با ضریب پواسون یکسان آجر و ملات، برابر و مدول ارتجاعی آنها به ترتیب برابر با مدول ارتجاعی المان ارتوتروپ در جهت قائم (2 یا Y) و مدول ارتجاعی المان

ارتوتروپ در جهت افقی (1 یا X) است. در این مسأله و با کامپیوتری یکسان، زمان حل مدل ناهمگن در حدود 70 برابر زمان حل مدل همگن است. این موضوع به انضمام زمان بالای مدل سازی مدل ناهمگن نشان می دهد که مدل همگن تا چه اندازه می تواند حجم محاسبات را کاهش دهد

جدول 3 تعیین ماتریسهای انتقال گره متناظر با شکل (14)

meshing	b	m ¹	m ²	m ³
۲	$\begin{pmatrix} 1.11 & -0.02 & 0.42 \\ -0.10 & 1.23 & 0.30 \\ 0.10 & 0.02 & 1.08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.11 & 0.17 & 0.12 \\ 0 & 0.98 & 0.43 \\ 0.13 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.79 & 0.16 & 0.2 \\ 0.14 & 0.98 & 0.45 \\ 0.09 & 0.15 & 1.38 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.79 & -0.02 & 0.12 \\ 0.13 & 0.12 & 0.05 \\ -0.03 & 0.15 & 0.54 \end{pmatrix}$
۴	$\begin{pmatrix} 1.31 & -0.05 & 0.64 \\ -0.17 & 1.51 & 0.74 \\ 0.21 & 0.13 & 1.19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14 & 0.15 & 0.15 \\ 0.03 & 0.94 & 0.49 \\ 0.09 & 0.03 & 0.92 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.73 & 0.18 & 0.28 \\ 0.15 & 0.95 & 0.51 \\ 0.07 & 0.20 & 1.41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.72 & 0.02 & 0.20 \\ 0.1 & 0.16 & 0.10 \\ 0 & 0.17 & 0.61 \end{pmatrix}$
۵	$\begin{pmatrix} 1.71 & -0.12 & 1.06 \\ -0.33 & 2.26 & 1.67 \\ 0.29 & 0.48 & 1.66 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.17 & 0.17 & 0.31 \\ -0.06 & 1.15 & 0.94 \\ 0.27 & 0.08 & 0.92 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.84 & 0.23 & 0.93 \\ 0.07 & 1.16 & 1.06 \\ 0.24 & 0.40 & 1.57 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.05 & 0.77 \\ 0.1 & 0.24 & 0.29 \\ 0 & 0.37 & 0.82 \end{pmatrix}$

جدول 4 مشخصات المان همگن

جدول 5 جابجایی ها و در صد خطا نسبت به مدل ناهمگن، مثال اول

mm	Micro	homogeneous				Error%	homogeneous			
		1	2	3	4		1	2	3	4
U_{TL}	0,84	0,85	0,88	1,17	0,72	Error%	1,6	4,7	39	-14
U_{ML}	0,28	0,29	0,30	0,45	0,28	Error%	1,3	7	59	-2,1
V_{TL}	0,47	0,47	0,48	0,61	0,38	Error%	0,9	2,9	30	-20
V_{ML}	0,25	0,26	0,27	0,36	0,22	Error%	1,3	5,6	43	-12

Material	homogeneous			
	1	2	3	4
$E_{11 eq}$	65,4	61,5	40	65
$E_{22 eq}$	39,9	40,5	40	65
$\nu_{12 eq}$	0,104	0,1	0,2	0,2
$G_{12 eq}$	15,4	16,4	16,7	27,1

و در نتیجه کاربرد عملی تری داشته باشد. به منظور مقایسه رفتار کلی دل‌های همگن و ناهمگن، جابجایی دیوار در راستای افقی و راستای قائم (V,U) در دو نقطه TL, ML بررسی می‌شود (شکل 15). خلاصه نتایج جابجایی‌های نقاط TL, ML و درصد خطای حاصل در چهار ماده همگن نسبت به مدل ناهمگن، در جدول (5) آورده شده است.

المان‌های ارتوتروپیک در مقایسه با المان‌های ایزوتروپ، تغییر مکان سازه را دقیقتر مدل‌سازی می‌کنند. شرایط بارگذاری به گونه‌ای انتخاب شده که حالت اول بارگذاری حاکم است، به همین دلیل ماده سوم نسبت به ماده چهارم با خطایی بیشتر جابجایی‌ها را پیش‌بینی می‌کند. یادآوری می‌شود که ماده سوم با آنچه در آیین‌نامه‌های بنایی آمده به نوعی قابل تطبیق است. زیرا مدول ارتجاعی المان همگن و ایزوتروپ پیشنهادی آیین‌نامه‌های بنایی بر مبنای مقاومت فشاری یک‌بعدی المان معرف در راستای قائم به دست می‌آید. نکته قابل توجه این است همگن‌سازی به روش انرژی به جوابهایی با دقت قابل قبول منجر شده است.

محاسبات نشان می‌دهد که مدل همگنی با شبکه‌بندی 10 در 10 نیز جابجایی‌های نقاط TL, ML را به اندازه کافی دقیق پیش‌بینی می‌کند. نتیجه کلی اینکه استفاده از شبکه‌بندی‌های بزرگتر خطایی فراتر از خطای تقریب گسسته‌سازی روش المان محدود را ایجاد نمی‌نماید.

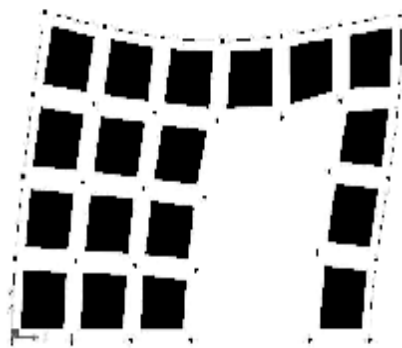
و در نتیجه کاربرد عملی تری داشته باشد. به منظور مقایسه رفتار کلی دل‌های همگن و ناهمگن، جابجایی دیوار در راستای افقی و راستای قائم (V,U) در دو نقطه TL, ML بررسی می‌شود (شکل 15). خلاصه نتایج جابجایی‌های نقاط TL, ML و درصد خطای حاصل در چهار ماده همگن نسبت به مدل ناهمگن، در جدول (5) آورده شده است.

المان‌های ارتوتروپیک در مقایسه با المان‌های ایزوتروپ، تغییر مکان سازه را دقیقتر مدل‌سازی می‌کنند. شرایط بارگذاری به گونه‌ای انتخاب شده که حالت اول بارگذاری حاکم است، به همین دلیل ماده سوم نسبت به ماده چهارم با خطایی بیشتر جابجایی‌ها را پیش‌بینی می‌کند. یادآوری می‌شود که ماده سوم با آنچه در آیین‌نامه‌های بنایی آمده به نوعی قابل تطبیق است. زیرا مدول ارتجاعی المان همگن و ایزوتروپ پیشنهادی آیین‌نامه‌های بنایی بر مبنای مقاومت فشاری یک‌بعدی المان معرف در راستای قائم به دست می‌آید. نکته قابل توجه این است همگن‌سازی به روش انرژی به جوابهایی با دقت قابل قبول منجر شده است.

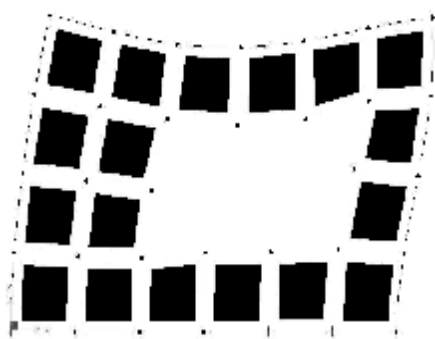
محاسبات نشان می‌دهد که مدل همگنی با شبکه‌بندی 10 در 10 نیز جابجایی‌های نقاط TL, ML را به اندازه کافی دقیق پیش‌بینی می‌کند. نتیجه کلی اینکه استفاده از شبکه‌بندی‌های بزرگتر خطایی فراتر از خطای تقریب گسسته‌سازی روش المان محدود را ایجاد نمی‌نماید.

6-2- مثال دوم: جابجایی در قاب و میانقاب بنایی

فرض کنید دیواری با مشخصات هندسی و مصالح دیوار مثال اول با کلافی بتنی محصور شده که ابعاد آن $40 \times 40 \text{ cm}^2$ و مشخصات مصالح آن $n_c = 0.2$ و $E_c = 2.65 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ و اتصال دیوار به زمین گیردار بوده و بار گسترده رو به پایینی به مقدار



شکل 16 تغییر شکل شمایی بازشوی اول



شکل 17 تغییر شکل شمایی بازشوی دوم

جدول (6)، دقت خوب مدل همگن را در مقایسه با نتایج مدل ناهمگن در تغییر مکانهای افقی و قائم و چرخش نقطه TL تأیید می کند. همچنین با توجه به نتایج قاب تنها، تأثیر میانقاب بر این نتایج مشخص می شود. البته مدل ناهمگن و همگن یاد شده ادعای مدل سازی دقیق میانقاب را ندارد. مطابق نتایج جدول (6)، بازشوی دوم، سختی مجموعه را بیش از بازشوی اول کاهش می دهد که با توجه به ایجاد ستونک های کم عمقتر منطقی به نظر می رسد. خطای بسیار اندک میانقاب کامل با شبکه بندی حداقل 6 در 4 قابل توجه است که یکی از دلایل آن، تأثیر مشخصات استاندارد قاب بتنی بر نتایج است. به دلیل تمرکز تنش، میانقابهای بازشودار نسبت به میانقاب بدون بازشو خطای بیشتری دارد.

3-6- مثال سوم: تنشها در مدل همگن و ناهمگن

از آنجا که در مثال اول تنش عمودی در راستای X حاکم بود، در این مثال برای بررسی جامع تر تنشها، بار گسترده

رو به پایینی به میزان 5000 kgf/m بر سطح بالایی دیوار به بارهای مثال اول افزوده و از مشخصات اولین ماده همگن جدول (4) استفاده می شود. در این مدل همگن، تنشها در گره دلخواهی به مختصات (5, 251.5، 188.5) بررسی می شوند. مطابق انتظار شبکه بندی 30 در 40 به اندازه کافی دقیق می باشد زیرا انحراف معیار تنش فون-میسز در هر یک از چهار المانی که در این گره اشتراک دارند، کمتر از یک درصد میانگین تنش فون-میسز آنها است. بنابراین میانگین تنشهای این چهار المان می تواند به عنوان تنش همگرا شده این گره تلقی شود. حال با استناد به رابطه (8) و نیز چهار ماتریس انتقال ردیف اول جدول 3 که مربوط به شبکه بندی دوم است، تنش میانگین مدل همگن در ماتریسهای انتقال ضرب شده و چهار تنش به ازای هریک از چهار المان محصورکننده گره j_0 (شکل 14) به دست می آید.

جدول 6 مقایسه نتایج مدل همگن و ناهمگن در مثال دوم

مقایسه مدل همگن با مدل ناهمگن		قاب با میانقاب بنایی			درصد خطا %		قاب تنها
		مدل ناهمگن	مدل همگن / شبکه بندی				
			۳۰x۴۰	۶x۴	۳۰x۴۰	۶x۴	
U _{TL}	بدون بازشو	۰,۰۱۶۲۴	۰,۰۱۶۴۷	۰,۰۱۶۵۹	۱,۴۱۶	۲,۱۵۵	۰,۰۶۷۸۱
	بازشو اول	۰,۰۳۰۹۴	۰,۰۳۱۱۹	۰,۰۲۹۰۸	۰,۸۰۸	-۶,۰۱	
	بازشو دوم	۰,۰۳۴۸۶	۰,۰۳۵۰۳	۰,۰۳۱۴۲	۰,۴۸۸	-۹,۸۷	
V _{TL}	بدون بازشو	-۰,۰۰۱۲۷	-۰,۰۰۱۲۸	-۰,۰۰۱۲۸	۰,۷۸۷	۰,۷۸۷	-۰,۰۰۲۸۵
	بازشو اول	-۰,۰۰۱۱۵	-۰,۰۰۱۱۶	-۰,۰۰۱۲۲	۰,۸۷	۶,۰۸۷	
	بازشو دوم	-۰,۰۰۱۵	-۰,۰۰۱۵۱	-۰,۰۰۱۵۳	۰,۶۶۷	۲	
Θ _{TL}	بدون بازشو	-۱,۲۶E-۴	-۱,۲۷E-۴	-۱,۲۵E-۴	۱,۲۷۴	-۰,۵۶	-۴,۶E-۴
	بازشو اول	-۲,۰۳E-۴	-۲,۰۴E-۴	-۱,۹۶E-۴	۰,۶۴۲	-۳,۴۶	
	بازشو دوم	-۲,۴۵E-۴	-۲,۴۷E-۴	-۲,۳۱E-۴	۰,۴۸۹	-۶,۰۷	

این تنشها سنجیده شود. به عنوان نمونه اگر المانی یک بعدی که مقطع آن از دو نوع ماده با مدول ارتجاعی متفاوت تشکیل شده، تحت کرنش ثابتی در راستای محوری قرار گیرد، در محل اتصال دو مقطع، اختلاف تنش وجود دارد؛ درحالی که معادلات تعادل دیفرانسیلی گرهی دقیقاً ارضا شده است. با مقایسه ستونی جدول (3) دیده می شود که تنشهای گرهی هر یک از چهار المان با ریزمدل سازی بیشتر به جای نزدیک شدن از هم دور می شود و با ریزمدل سازی بیشتر تنش در المان بلوک بنایی می تواند به میزان بسیار زیادی اضافه شود. از طرفی با ریزمدل سازی بر دقت پاسخها افزوده می شود؛ زیرا هر دو شرط همگرایی و یکنوایی (کامل بودن المانها و سازگاری المانها و شبکه) در این مثال برقرار است. بنابراین پیش بینی تنش بسیار بالا در آجر، نتیجه دقیقی است. این بحث به کاربرد عملی این قسمت خدشه وارد می کند. بنابراین سؤال کاربردی تر آن است که تا چه حد باید ریز مدل سازی ادامه یابد. زیرا همین تنشها باید در معیارهای گسیختگی استفاده شود. به این سؤال در قسمت بعدی پاسخ داده می شود.

در مدل ناهمگن مطابق شکل 15، گره j_1 مشابه با وضعیت گره j_0 و در مختصات نزدیک به مختصات آن گره یعنی در مختصات (251,7، 188,7) بررسی می شود. بنابراین تنش این نقطه در مدل ناهمگن می تواند معیاری برای دقت فرایند همگن سازی و نیز ماتریسهای انتقال باشد که خلاصه این مقایسه در جدول (7) آمده است. به منظور داشتن معیاری برای بررسی همزمان هر سه تنش، تنش فون - میسز (σ_{vm}) نیز در این جدول گنجانیده شده است.

این مثالها شاهدهی است بر دقت قابل قبول فرایند همگن سازی. به بیان دیگر فرض اعمال سه قید هم حرکت یاد شده رفتار کلی سازه (جابجاییها) و رفتار جزئی سازه (تنشها) را در مقایسه با مدل ناهمگن با دقت خوبی پیش بینی می کند.

با مرور دوباره جدولهای (3) و (7) دیده می شود که تنشهای گرهی در المانهایی که گرههایی همانند j_0 را محصور کرده اند (شکل 14)، با هم تفاوت دارد؛ به بیان دیگر کانتور تنش تغییرات زیادی دارد. توجه شود که در مدل سازی ناهمگن، دقت مدل سازی نباید با نزدیک شدن

جدول 7 مقایسه تنشهای مدل ناهمگن و تنشهای استنتاجی از همگن سازی و ماتریس انتقال، مثال سوم

B	σ_{11}^b	σ_{22}^b	σ_{12}^b	σ_{vm}^b
ناهمگن	-15,4	-6	-0,2	13,5
همگن - متوسط	-14,9	-6,3	-1,4	13
با ماتریس انتقال	-15,9	-5,8	-0,1	13,9

m1	σ_{11}^{m1}	σ_{22}^{m1}	σ_{12}^{m1}	σ_{vm}^{m1}
ناهمگن	0,2	-2,6	-5,6	5
همگن - متوسط	-14,9	-6,3	-1,4	13
با ماتریس انتقال	-0,4	-3	-6,3	5,8

M2	σ_{11}^{m2}	σ_{22}^{m2}	σ_{12}^{m2}	σ_{vm}^{m2}
ناهمگن	-12,3	-7,6	-0,3	10,7
همگن - متوسط	-14,9	-6,3	-1,4	13
با ماتریس انتقال	-12,5	-7,6	-0,3	10,9

m3	σ_{11}^{m3}	σ_{22}^{m3}	σ_{12}^{m3}	σ_{vm}^{m3}
ناهمگن	-11,2	-2,5	0,2	10,5
همگن - متوسط	-14,9	-6,3	-1,4	13
با ماتریس انتقال	-11,5	-2,6	0,2	10,5

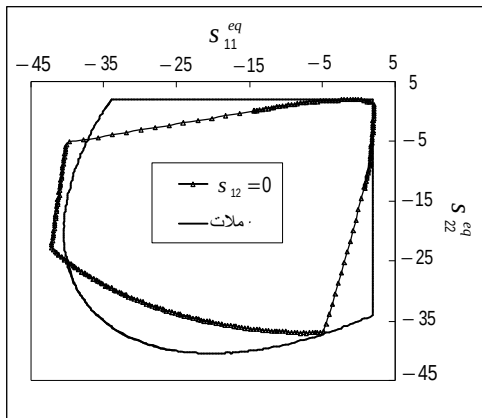
در بلوک بنایی و ملات باید در هر سه شرط رابطه (10) صدق کند.

$$\text{Von - misses: } ((s_1^i)^2 + (s_2^i)^2 - (s_1^i) \times (s_2^i))^{\frac{1}{2}} \leq s_c^i$$

$$\text{\&Rankin: } s_1^i \leq s_t^i, s_2^i \leq s_t^i, i = b, m \quad (10)$$

بدین منظور برنامه المان محدود قبلی تعمیم داده شده و با توجه به اطلاعات هندسی و ارتجاعی و مقاومتی ملات و بلوک بنایی، منحنی‌های تسلیم استخراج می‌شود.

به‌عنوان مثال در المان پایه قبلی با شبکه‌بندی سوم و فرض اعمال قیود هم‌حرکت، به‌ازای $s_{12}^{eq} = 0$ ، منحنیهای تسلیم بسته ای بر حسب s_{11}^{eq} و s_{22}^{eq} بدست آمده که در آن $s_c^b, s_t^b, s_c^m, s_t^m$ به‌ترتیب برابر 4، 100، 2، 35 فرض می‌شود (شکل 18). منحنی سیاه رنگ بیرونی منحنی تسلیم ملات است که از معیار رانکین و فون-میسز پیروی می‌کند. اگر خواص ارتجاعی ملات و بلوک بنایی یکسان می‌بود، منحنی تسلیم المان پایه بدون حضور تنش برشی بر منحنی تسلیم ملات (ماده ضعیف‌تر) منطبق می‌شد. همان‌طور که دیده می‌شود شکل منحنی تسلیم نسبت به منحنی سیاه رنگ (ملات) تغییر کرده است.



شکل 18 منحنی تسلیم المان همگن بدون حضور تنش برشی همراه با منحنی تسلیم ملات

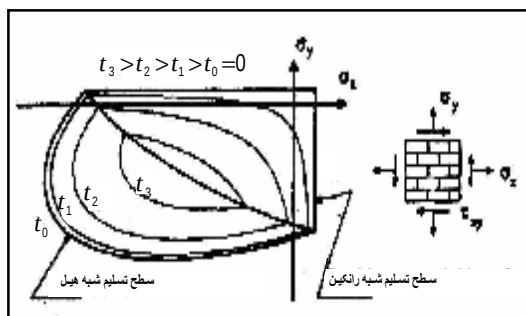
برای کاربرد عملی تر، از میان تنشهای گرهی مختلفی که بوسیله ماتریس انتقال ایجاد شده، می‌توان فقط تنش بیشینه ایجاد شده در ملات و نیز بلوک بنایی را انتخاب کرد تا مبنایی برای تفسیر تنش در مدل همگن و نیز سطوح تسلیم مدل همگن باشد.

7- منحنی‌های تسلیم ماده همگن

7-1- تعیین منحنی تسلیم

اگر فرض شود که رفتار هر یک از اجزای المان پایه (ملات افقی، ملات قائم یا بلوک بنایی) تا مرز گسیختگی خود خطی باقی می‌ماند و سپس مقاومت آن جزء و کل المان از بین می‌رود، سطوح تسلیم المان همگن می‌تواند استخراج شود یعنی پوشی از سه‌تایی‌های مرتب $(s_{11}^{eq}, s_{22}^{eq}, s_{12}^{eq})$ ارائه شود که اگر بر المان همگن و در تناظر یک به یک آن بر المان پایه اعمال شود، با استناد به رابطه (8) تنش در یکی از گره‌های المانی از المان‌های تقسیم شده المان پایه با معیار گسیختگی آن برابر شود. با تصویر کردن دوبعدی این پوش سه‌بعدی به ازای مقادیر معینی از s_{12}^{eq} ، منحنی‌های بسته‌ای بر حسب $(s_{11}^{eq}, s_{22}^{eq})$ بدست می‌آید. با استناد به [4] برای المان‌های تنش مسطح در نظر گرفتن معیار فون-میسز در فشار و رانکین در کشش، فرض قابل قبولی است. البته به‌ویژه در حالت سه‌بعدی معیار فون-میسز برای مواد شکننده مناسب نیست، زیرا در این معیار فشار هیدرواستاتیک تأثیری بر گسیختگی ندارد. این تأثیر در شکل تعمیم یافته معیار فون-میسز (معیار دراگر-پراگر) قابل ملحوظ کردن است. به هر حال مقاومت یک‌بعدی فشاری و کششی در بلوک بنایی (s_c^b, s_t^b) و نیز در ملات (s_c^m, s_t^m) باید از آزمایشها استخراج شود. به بیان دیگر، تنشهای اصلی (s_1, s_2) ایجاد شده

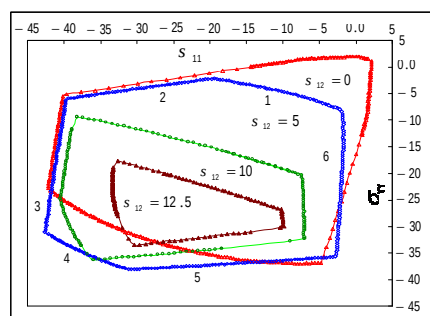
شکل (20) با استناد به [1] به مدلی همگن و غیرخطی اشاره می‌کند که معیار تسلیم ارتوتروپ آن با توجه به نتایج آزمایش بر روی صفحات بنایی مقیاس می‌شود. البته شکلهای 19 و 20 با یکدیگر تطبیق ندارد بلکه رفتار کلی این دو مشابه است. این عدم تطبیق دلایل متعددی دارد. مطابق شکل (21)، در $s_{12}^{eq} = 0$ به‌ویژه در حوزه کششی، نتایج مدل ارتوتروپ [1] با نتایج آزمایشگاهی [3] تطبیق ندارد. تعریف نامناسب مقاومت کششی در آزمایش بر روی صفحات بنایی توجیهی برای این عدم تطبیق ذکر شده است [1]. اما به نظر می‌رسد که این توجیه کاملاً صحیح نباشد و محدوده کششی با خطوط مستقیم رانکین ارضا نشود و همچنین به نظر می‌رسد شکل (18) نزدیکی بیشتری با واقعیت شکل (21) داشته باشد. علاوه بر آن در شکل (20) دیده می‌شود که به ازای تنش برشی بزرگتر، الزاماً تمامی بخشهای منحنی‌های تسلیم در درون منحنی قبلی جای می‌گیرد. این موضوع بدین صراحت در شکل (19) دیده نمی‌شود. به هر جهت اطلاعات موجود برای نتیجه‌گیری جامع کافی نیست. با وجود این، واضح است که مدل ارائه شده در [1] صرفاً تلاش می‌کند به واقعیت نزدیک شود و به‌طور منطقی مجاز است از فرضهای ساده شونده‌ای استفاده برد.



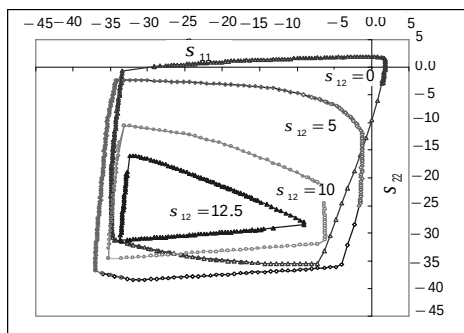
شکل 20 سطح تسلیم همگن - ارتوتروپ با معیار شبه رانکین در کشش و معیار شبه هیل در فشار [1]

در شکل (19) به دلیل ناهمگنی المان پایه، منحنی تسلیم زاویه‌دار شده است. برای مثال در منحنی تسلیم با فرض $s_{12}^{eq} = 5$ ، شش مرز قابل تفکیک شماره‌گذاری شده که در مرز اول و دوم و سوم به ترتیب، المان‌هایی در بلوک، محل تقاطع ملات افقی و قائم و باز هم بلوک با معیار رانکین و در مرز چهارم و پنجم و ششم به ترتیب المان‌هایی در ملات قائم، محل تقاطع ملات افقی و قائم و در آخر ملات افقی با معیار فون-میز به شرایط تسلیم رسیده است.

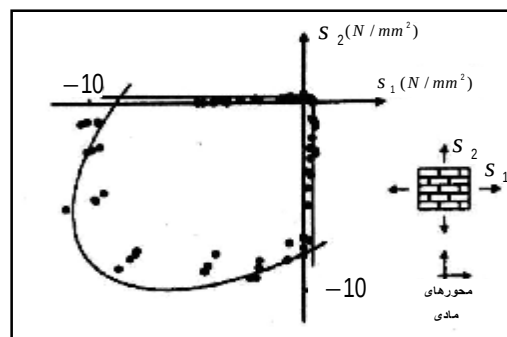
رفتار این منحنی تسلیم در حضور تنش برشی کاملاً با رفتار المانی همگن و همسانگرد متفاوت است. در مدل همسانگرد، در فضای تنش $s_{11}^{eq} - s_{22}^{eq}$ به‌ازای تغییر s_{12}^{eq} ، منحنی تسلیمی که بدون حضور تنش برشی استنتاج شده، تحت قانون خاصی می‌چرخد؛ یعنی دو پارامتر مستقل تنش برای تعریف شرایط تسلیم کفایت می‌کند. اما در منحنیهای تسلیم استنتاجی از فرایند همگن‌سازی که به المان همگن و ارتوتروپ منتج می‌شود، شرایط تسلیم در فضای دوبعدی تنش، الزاماً با هر سه درایه بردار تنش بیان می‌شود، به‌ویژه درمقادیر بالای برش سطح منحنی تسلیم به‌شدت کاهش می‌یابد (شکل 19). همین پدیده در شکل (20) نیز دیده می‌شود.



شکل 19 منحنی تسلیم المان همگن در حضور تنش برشی (اعمال هر سه قید هم حرکت).



شکل 22 منحنی تسلیم المان همگن در حضور تنش برشی (بدون اعمال هیچ قید هم حرکتی)



شکل 21 مقیاس سطح تسلیم اولیه [1] با توجه به نتایج آزمایش بر روی صفحات بنایی [3]

7-2- مقیاس منحنی های تسلیم

در قسمت قبل توضیح داده شد که فرایند همگن سازی می تواند با اتکا بر ماتریسهای انتقال، تنشهای مدل ناهمگن را با دقت خوبی پیش بینی کند. در اینجا بحث بر سر دقت مدل همگن استنتاجی در مقایسه با مدل ناهمگن نیست، زیرا دقت مدل ناهمگن و به تبع آن دقت مدل ناهمگن المان پایه و دقت مدل همگن و منحنی های تسلیم استنتاجی به چند دلیل مورد تردید است:

1) دقیق نبودن پیش فرضهای تحلیلی که شامل موارد زیر می شود:

1-1) در عمل گوشه بلوک بنایی دقیقاً قائمه نیست تا تمرکز تنش رخ دهد.

1-2) اتصال ملات با بلوک بنایی در تمام سطح آن کامل نیست.

1-3) با یک گسیختگی موضعی در گوشه کوچکی از المان پایه، سازه گسیخته نمی شود بلکه بدون تردید، باز توزیع تنش رخ می دهد.

1-4) تحلیل کاملاً خطی است و تسلیم و رفتار سخت-شونده ای در نظر گرفته نشده. البته اگر هدف یافتن منحنی تسلیمی باشد که منطقه ارتجاعی به آن محدود شده، بحث در مورد رفتار سخت شونده منتفی است.

در شکل (22)، منحنی تسلیم المان پایه یاد شده بدون اعمال هیچ قید هم حرکتی به دست آمده است. از آنجا که عموماً تنشهای بیشینه محاسبه شده بزرگتر از تنشهای بیشینه محاسبه شده با فرض اعمال قیود هم حرکت می باشد، شکل (22) کوچکتر از شکل (19) شده است. با این وجود مشخصه کلی هر دو یکی است؛ یعنی در هر دو به علت ناهمگنی المان پایه، منحنی تسلیم زاویه دار شده و نیز در تنشهای برشی بالا؛ به وضوح مساحت سطح محصور تسلیم کاهش می یابد. در مقایسه شکل (19) و (22) با تأکید بر شباهت کلی رفتار این دو، تفاوت این دو به ویژه در مورد پیش بینی مقاومتهای یک بعدی نباید نادیده گرفته شود. نشان داده شد که بدون اعمال قیود هم حرکت نمی توان تقارن ماتریس D^{eq} را ارضا کرد. این منطقی نیست که پارامترهای ارتوتروپ با اعمال قیود هم حرکت به دست آید اما منحنی تسلیم نه.

سطوح تسلیم استنتاجی از فرایند همگن سازی را با آن مقایسه کرد. به هر حال داوری قطعی به برطرف کردن این مشکل وابسته است.

ب) نباید فقط با مقایسه یک تنش مانند تنش یک محوره المان معرف، منحنی تسلیم مقیاس شود.

ج) در مورد دقیق نبودن تنشهای محاسباتی مدل ناهمگن المان پایه، مواردی طرح شده بود که می توان با اصلاح برخی از آنها به نتایج دقیقتری دست یافت.

در مدل ناهمگن علاوه بر اینکه تفسیر تنشها مشکل است، از فرایند مقیاس کردن منحنی های تسلیم نیز بی بهره است. در نتیجه، ناگزیر از ضرایب اطمینان استفاده می شود و در عمل حجم محاسبات بالا و زمان بر آن کمکی به جوابهای دقیقتر نمی کند. این نکته، برتری بسیار ممتازی برای مدل همگن استنتاج شده از روش همگن سازی است که می تواند از منحنی های تسلیم اصلاح شده استفاده کند. از سوی دیگر سطوح تسلیم متکی بر همگن سازی به هر شیوه ای به سطوح تسلیم آزمایشگاهی نزدیک شود، می تواند به عنوان سطح تسلیم مدل ارتوتروپ، مبنایی برای محاسبات غیر خطی باشد.

8 - نتیجه گیری

1) در سازه های ناهمگن بنایی با پیکربندی متناوب می توان به جای ریز مدل سازی در مدلی ناهمگن، جزء تکرار شونده آن (المان پایه) را با المانی همگن و ارتوتروپ معادل سازی کرد. در این تحقیق روش المان محدود و روش تقریبی انرژی برای تعیین مشخصات المان همگن استفاده و توسعه داده شد. در مقایسه با مدل ناهمگن در محدوده خطی، مدل همگن استنتاجی از روش المان محدود، رفتار کلی (جابجایی) سازه بنایی را با دقت بالا و تنشهای مدل ناهمگن را با دقت خوبی توصیف

5-1) فرض رفتار همگن، همسانگرد، تنش مسطح و دوبعدی برای ملات و بلوک فرضهای بسیار دقیقی نیست. 6-1) صرفاً دو تنش بیشینه ایجاد شده در ملات و نیز بلوک بنایی در المان پایه مبنای تفسیر تنش و منحنی تسلیم است.

از تبعات پیش فرضهای 1-1 تا 4-1 همان است که در تفسیر تنش مدل ناهمگن المان محدودی به آن اشاره شد و به این نتیجه ختم می شود که نباید در ریز کردن شبکه بندی المان پایه افراط شود.

2) دقت تنشهای محاسبه شده، به دقت اطلاعات ارتجاعی ملات و بلوک وابسته است و احتمال اینکه این اطلاعات دقیق نباشد، وجود دارد.

3) در مورد منحنی های تسلیم احتمال اینکه اطلاعات مقاومتی ملات و بلوک بنایی دقیق نباشد، وجود دارد و به ویژه معیارهای ساده گسیختگی اختیار شده همچنان می تواند اصلاح شود. مثلاً معیار مور- کولمب یا دراگر- پراگر در فشار شاید گزینه های خوبی باشند.

4) همچنین دیدیم که منحنی های تسلیم علاوه بر ریز مدل سازی به اعمال قیود هم حرکت نیز حساس است. به دلایل یاد شده لازم است منحنی تسلیم استنتاجی از فرایند همگن سازی با توجه به منحنی تسلیم واقعی مقیاس شود. البته در نهایت با این کار تعداد آزمایشهای لازم بر صفحات بنایی و هزینه های سنگین آن کاهش می یابد.

حال چگونه می توان به طریقی مطمئن، سطح تسلیم استنتاجی از روش همگن سازی را مقیاس کرد؟ این سؤال می تواند موضوعی برای تحقیقات بیشتر باشد. به چند ایده مهم اشاره می شود.

الف) عموماً سطح تسلیم واقعی به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی بر صفحات بنایی، شامل اطلاعات کامل یا حتی ناقصی در مورد ملات و بلوک بنایی نیست که بتوان

9- منابع

- [1] Lourenço P.B., Rots J.G., Blaauwendraad, J.; "Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation", *Journal of Structural Engineering*; 124 (6), 1998, pp 642-52.
- [2] Papa E.; "Damage and Failure Models" in "Computation Modeling of Masonry Brickwork and Blockwork Structures", Bull J. W. (Editor), Stirling, Scotland, Saxe-Coburg Publication; 2001, pp 1-26.
- [3] Page A. W.; "The strength of brick masonry under biaxial compressive-tension", *International Journal of Masonry Construction*; 3(1), 1983, pp 26-31.
- [4] Zucchini A., Lourenço P. B.; "A micro-mechanical model for Homogenisation of masonry", *International journal of Solids and Structures*; Vol. 39, 2002, pp. 3233-55.
- [5] Gabor A., Ferrier E., Jacquelin P., Hamelin, P.; "Analysis and modeling of the in-plane of hallow brick masonry panels", *Construction and Building Materials*; 20, 2006, pp 308-21.
- [6] Urbanski A., Szarlinski J., Kordecki Z.; "Finite element modeling of the behavior of the masonry walls and coloumns by homogenization approach", *Computer methods in structural masonry*; 1995, Vol. 3, pp 32-41.
- [7] Anthoine A.; "Derivation of in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory", *Journal of Solids and Structures*; Vol. 32, No. 2, 1995, pp. 137-63.
- [8] Pande G.N.; "Equivalent elastic moduli for unit masonry", *Computers and Geotechnics*; Vol. 8, 1989, pp 243-265.
- [9] Cluni F., Gusella V.; "Homogenization of non-periodic masonry structures", *International Journal of Solids and Structures*; Vol. 41, 2004, pp. 1911-23.
- [10] Anthoine A.; "Homogenisation of periodic masonry: plane stress, generalised plan strain or 3D modeling", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, 1997, pp 319-26.

می‌کند و نیز مدل همگن استنتاجی از روش انرژی رفتار کلی سازه بنایی را با دقت خوبی برآورد می‌کند.

(2) با مطالعه پارامتریک با استفاده از برنامه المان محدود نوشته شده، نتایج زیر استخراج شد:

1-2) نسبت مدول ارتجاعی معادل در راستای افقی به مدول ارتجاعی آجرها، بیش از همه وابسته به نسبت مدول ارتجاعی ملات به آجر و نسبت ضخامت به طول ملات بستر است. نسبت مدول ارتجاعی معادل در راستای قائم به مدول ارتجاعی آجرها بیش از همه وابسته به نسبت مدول ارتجاعی ملات به آجر و نسبت ضخامت ملات بستر به طول واحد بنایی در راستای قائم است.

2-2) با نزدیک شدن ابعاد آجر به یکدیگر (صرف نظر از مشخصات مصالح) و نیز با نزدیک شدن نسبت مدول ارتجاعی آجر و ملات به عدد بزرگتر از 0,5 (صرف نظر از مشخصات هندسی)، رفتار المان همگن به حالت ایزوتروپ میل می‌کند.

(3) با استفاده از برنامه المان محدود تهیه شده و با فرض رفتار خطی شکننده و معیارهای شکست مناسب برای ملات و بلوک بنایی، منحنی‌های تسلیم دوبعدی استخراج شد. به علت ناهمگنی المان پایه، منحنی تسلیم زاویه‌دار می‌شود و نیز در تنشهای برشی بالا، به وضوح مساحت سطح محصور تسلیم کاهش می‌یابد که تا اندازه‌ای با منحنی‌های آزمایشگاهی مطابقت دارد.

(4) منحنی‌های تسلیم به ریزمدل‌سازی المان پایه و اعمال فرضهای مختلف قیود هم حرکت بر سطوح جانبی آن حساس است.

(5) به دلیل عدم قطعیت‌های آزمایشگاهی و عدم دقت پیش‌فرضهای تحلیلی، مقیاس این منحنی‌ها نسبت به منحنی‌های تسلیم واقعی، هرچند به‌طور تقریبی ضروری است.

- [14] صالحی دلارستانی، ایمان؛ تعیین مدل های تنش - کرنش متوسط و شکست المانهای مصالح بنایی با ریزمدل سازی رفتار و اندرکنش اجزا آن ؛ پایان نامه دوره کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، 1385.
- [15] بریمانی، امیرحسین؛ بررسی رفتار دینامیکی غیرخطی قابهای بتن مسلح پر شده با مصالح بنایی به روش ترک پخشی ثابت؛ پایان نامه دوره کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه تربیت مدرس تهران، 1385.
- [11] Pietruszczak S., Niu X.; "A mathematical description of macroscopic behavior of unit masonry", International journal of Solids and Structures; Vol. 29 No. 5, 1992, pp 531-546.
- [12] Pietruszczak S., Ushaksaraei R.; "Description of inelastic behaviour of structural masonry", International Journal of Solids and Structures; 40, 2003, pp. 4003-19.
- [13] Gambarotta L., Lagomarsino S.; "Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its application", Earthquake engineering and structural dynamics; VOL. 26, No. 197, pp 441-462.