

استفاده از روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع در حل مسائل تراوش و نشست پی

عرفان کریمیان^۱، محمد علیائی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

m.olyaei@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۱۳۹۶/۲/۳۱]

تاریخ دریافت: [۱۳۹۵/۱۱/۲۵]

چکیده

روش اجزاء محدود هموار، با کاربرد تکنیک هموارسازی کرنش در اجزاء محدود معمولی به وجود آمده است. این تکنیک پیش از آن برای برطرف کردن ناپایداری عددی انتگرال گیری گره‌ای در روش‌های بدون شبکه ابداع شده بود. اجزاء محدود هموار دارای سه گونه اصلی شامل روش مبتنی بر سلول، روش مبتنی بر گره و روش مبتنی بر اضلاع است که تفاوت آن‌ها در چگونگی ساخت دامنه‌های هموارسازی بر اساس شبکه اجزاء محدود اولیه است. انتگرال گیری ماتریس سختی در اجزاء محدود هموار به جای المان‌ها روی این دامنه‌های هموارسازی صورت می‌گیرد. با توجه به ویژگی‌های برجسته، این روش تاکنون در حل مسائل مختلف مکانیک به کار رفته است. در این مقاله، از اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع، که نسبت به دو گونه دیگر دارای دقت بالا و سرعت همگرایی بیش‌تر جواب است، در حل مسائل ژئوتکنیکی تراوش حالت پایدار و نشست الاستیک پی استفاده شده است. پس از مروری بر روابط و معرفی روند کد نویسی، نتایج تحلیل‌های انجام شده با استفاده از کد تهیه شده بررسی شد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که کاربرد تکنیک هموارسازی کرنش در اجزاء محدود می‌تواند با ثابت ماندن تعداد درجات آزادی، دقت این روش را به میزان قابل توجهی افزایش دهد. این بهبود هم در مسأله تراوش با فرض کرنش صفحه‌ای و هم در مسأله نشست پی با فرض تقارن محوری دیده می‌شود.

واژگان کلیدی: روش اجزاء محدود هموار، روش اجزاء محدود، مسأله تراوش پایدار، نشست پی

۱- مقدمه

با کاربرد تکنیک هموارسازی کرنش در اجزاء محدود، روش اجزاء محدود هموار^۱ به وسیله لیو و همکاران^۲ به وجود آمد. این روش دارای سه نوع اصلی است که بر اساس چگونگی انجام فرآیند هموارسازی کرنش متمایز می‌شوند: الف- اجزاء محدود هموار مبتنی بر سلول^۳ [2]، ب- اجزاء

تکنیک هموارسازی کرنش^۱ به وسیله چن و همکاران^۲ [1] ابداع شده است. ایشان برای برطرف کردن ناپایداری عددی انتگرال گیری گره‌ای روش‌های بدون شبکه، انتگرال گیری گره‌ای هم‌نوی پایدار^۳ را معرفی کردند. این روش، کرنش را به صورت میانگین وزنی میدان کرنش همساز (گرادیان متقارن

4 Smoothed Finite Element Method (SFEM)

5 Liu et al.

6 Cell Based SFEM (CSFEM)

1 Strain Smoothing

2 Chen et al.

3 Stabilized Conforming Nodal Integration

همچون مکانیک جامدات و پیزوالکتریک‌ها [7 و 6]، مکانیک شکست و گسترش ترک [8 و 9 و 10]، انتقال حرارت [11 و 12]، آکوستیک [13 و 14 و 15]، مسائل غیر خطی تماس و اصطکاک [16]، تحلیل وقتی^۵ [17 و 18]، مسائل تغییر فاز [19] و بسیاری دیگر.

با وجود کمک‌های شایانی که ویژگی‌های برتر روش اجزاء محدود هموار می‌تواند به برطرف کردن مشکلات موجود در حل عددی مسائل ژئوتکنیکی داشته باشد، عملاً تاکنون استفاده‌ای از آن در این زمینه نشده است. بررسی‌های نگارندگان نشان می‌دهد که موارد کاربرد این روش در حل مسائل ژئوتکنیکی تنها محدود به چند مورد اندک، آن هم به صورت جنبی در پژوهش‌های با زمینه‌های متفاوت است. از این رو، این پژوهش به کاربرد این روش در حل نمونه‌هایی از مسائل ژئوتکنیکی می‌پردازد تا با مشاهده‌ی نتایج، زمینه برای کاربرد گسترده‌تر آن در حل مسائل این رشته فراهم شود.

در این پژوهش، عملکرد روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع در حل مسائل تراوش حالت پایدار در حالت کرنش صفحه‌ای و نشست پی با فرض تقارن محوری بررسی شده است. به این منظور، چند مسأله با استفاده از کد تهیه شده بر مبنای این روش حل شده و نتایج به دست آمده از آن با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود با استفاده از المان‌های با مرتبه‌های متفاوت مقایسه شده اند.

در این مقاله، پس از مقدمه، ایده و روابط روش اجزاء محدود هموار و جزئیات مربوط به روش مبتنی بر اضلاع ارائه شده است. سپس روند کد تهیه شده بیان شده است. پس از آن، پاسخ‌های به دست آمده برای مسأله تراوش حالت پایدار در حالت کرنش صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و در انتها، نتایج حاصل از تحلیل نشست الاستیک پی با فرض تقارن محوری واکاوی شده‌اند.

۲- روش اجزاء محدود هموار

در این بخش، ابتدا روابط روش اجزاء محدود معمولی مرور خواهد شد. روابط روش اجزاء محدود هموار بسیار شبیه

محدود هموار مبتنی بر گره^۱ [3]، و ج- اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع^۲ [4]. در روش مبتنی بر سلول، هموارسازی کرنش روی دامنه‌هایی که با تقسیم المان‌های شبکه اجزاء محدود اولیه به زیرسلول‌ها شکل می‌گیرند انجام می‌شود؛ روش مبتنی بر گره از گره‌ها برای ساختن دامنه‌های هموارسازی استفاده می‌کند؛ و در روش مبتنی بر اضلاع، دامنه‌های هموارسازی بر اساس اضلاع المان‌ها شکل می‌گیرند.

روش اجزاء محدود هموار دارای ویژگی‌های جالب توجهی است. این روش به بهم ریختگی شبکه حساس نیست، زیرا نگاشت ایزوپارامتریک^۳ که در اجزاء محدود معمولی انجام می‌شود در آن مورد نیاز نیست. با استفاده از نظریه تباین^۴، انتگرال‌گیری سطح روی دامنه‌های هموارسازی به انتگرال‌گیری روی مرزها تبدیل می‌شود، و مشتقات توابع شکل مورد نیاز نیستند. به طور کلی، روش اجزاء محدود هموار در دقت برابر دارای بهره‌وری محاسباتی بیش‌تری نسبت به روش‌های بدون شبکه و حتی اجزاء محدود معمولی است [5].

اولین نوع ارائه شده روش اجزاء محدود هموار روش مبتنی بر سلول بوده و پس از آن روش مبتنی بر گره ابداع شده است. روش مبتنی بر گره می‌تواند جواب‌های حد بالا را به دست دهد، برخلاف روش اجزاء محدود معمولی که به ویژه با استفاده از المان‌های مرتبه پایین به جواب‌های حد پایین می‌رسد. به طور کلی سختی مدل ساخته شده با این روش از سختی نمونه واقعی کم‌تر است. این مسأله موجب به دست آمدن مودهای نادرست در تحلیل‌های دینامیکی شده و این روش را دچار ناپایداری عددی زمانی می‌سازد. برای حل این مشکل، روش مبتنی بر اضلاع پیشنهاد شده است که مشکلات فوق را ندارد و علاوه بر آن دارای ویژگی‌های بارزی چون دقت فوق العاده بالا و همگرایی بسیار سریع جواب‌ها است [5].

با توجه به ویژگی‌های برجسته روش اجزاء محدود هموار، از آن در حل مسائل مختلف استفاده شده است. مسائلی

- 1 Node Based SFEM (NSFEM)
- 2 Edge Based SFEM (ESFEM)
- 3 Isoparametric Mapping
- 4 Divergence Theorem

روی این دامنه‌های هموارسازی انجام می‌شود.

در اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع، دامنه‌های هموارسازی با استفاده از اضلاع المان‌ها تشکیل می‌شوند. در این حالت، دامنه Ω به تعداد N_S دامنه هموارسازی تقسیم می‌شود؛ به گونه‌ای که: $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \dots \cup \Omega^{(N_S)}$ و $\Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} = \phi$, $i \neq j$ در واقع تعداد کل اضلاع المان‌های موجود در تمام دامنه است. در صورتی که از المان‌های مثلثی استفاده شود، دامنه هموارسازی $\Omega^{(k)}$ مربوط به ضلع k با اتصال دو گره در دو سر ضلع به مرکز ثقل دو المان مجاور ساخته می‌شود (شکل ۱).

شکل ۱. دامنه‌های هموارسازی شبکه مثلثی در روش اجزاء محدود هموار

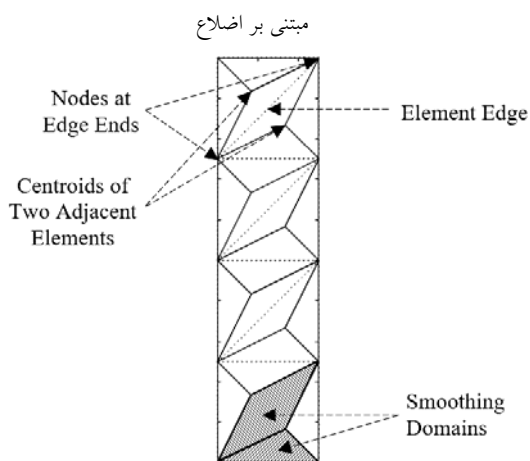


Fig. 1. Edge-based smoothing domains in a triangular mesh

پس از تشکیل دامنه‌های هموارسازی، با داشتن کرنش‌های همساز $(\epsilon = \nabla_s u)$ ، کرنش‌های هموار با استفاده از هموارسازی کرنش روی دامنه $\Omega^{(k)}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{\epsilon}_k = \int_{\Omega^{(k)}} \epsilon(x) \Phi_k(x) d\Omega = \int_{\Omega^{(k)}} \nabla_s u(x) \Phi_k(x) d\Omega \quad (8)$$

که در آن $\Phi_k(x)$ یک تابع هموارسازی است که باید شرط واحد بودن را دارا باشد:

$$\int_{\Omega^{(k)}} \Phi_k(x) d\Omega = 1 \quad (9)$$

ساده‌ترین تابع هموارسازی که معمولاً استفاده قرار می‌شود و مقدار آن روی هر دامنه ثابت است، تابع ذیل است [5]:

به این روابط هستند و در ادامه خواهند آمد.

در دامنه Ω ، که تحت اثر بارهای داخلی b قرار دارد و D تانسور ضرایب مصالح آن و \bar{T} بارهای وارد شده خارجی معلوم در مرز Γ_t است، انتگرال‌گیری روی المان‌ها برای تشکیل معادلات گسسته اجزاء محدود با استفاده از معادله انتگرالی گالرکین^۱ انجام می‌شود:

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \delta u)^T D (\nabla_s u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{T} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

که در آن $\nabla_s u$ گرادینان متقارن میدان جابه‌جایی، u یک تابع آزمایش و δu یک تابع تست است.

در روش اجزاء محدود از توابع آزمایش و تست ذیل

استفاده می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{NP} N_I(x) d_I \quad (2)$$

$$\delta u^h(x) = \sum_{I=1}^{NP} N_I(x) \delta d_I \quad (3)$$

در این روابط NP تعداد متغیرهای گره‌ای المان، d_I بردار جابه‌جایی گره‌ای و $N_I(x)$ ماتریس توابع شکل است.

با جای‌گذاری تقریب‌های u^h و δu^h در معادله انتگرالی، و از آن جا که جابه‌جایی‌های گره‌ای مجازی به مقدار دلخواه هستند، دستگاه معادلات گسسته زیر به دست می‌آید:

$$K^{FEM} d = f \quad (4)$$

که در آن K^{FEM} ماتریس سختی و f بردار نیروی المان است که به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$K_{IJ}^{FEM} = \int_{\Omega} B_I^T(x) D B_J(x) d\Omega \quad (5)$$

$$f_I = \int_{\Omega} N_I^T(x) b d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_I^T(x) \bar{T} d\Gamma \quad (6)$$

ماتریس کرنش، $B_I(x)$ ، به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$B_I(x) = \nabla_s N_I(x) \quad (7)$$

در اجزاء محدود هموار، انتگرال‌گیری مربوط به معادله

انتگرالی نه روی المان‌ها، بلکه با استفاده از تکنیک هموارسازی کرنش بر روی دامنه‌های هموارسازی انجام می‌شود. به عبارت دیگر، اجزاء محدود هموار از کرنش‌های هموار شده روی دامنه‌های هموارسازی به جای کرنش‌های همساز استفاده می‌کند. بنابراین، انتگرال‌گیری ماتریس سختی نیز به جای المان‌ها

معادله قبل به این صورت ساده می‌شود:

$$\tilde{b}_{lh}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^M n_{ih}^{(k)} N_i(x_i^{GP}) l_i^{(k)} \quad (h = x, y) \quad (16)$$

در این معادله M تعداد کل تکه‌های مرز $\Gamma_i^{(k)}$ و x_i^{GP} نقطه میانی (نقطه انتگرال‌گیری گاوسی) تکه مورد نظر مرز $\Gamma_i^{(k)}$ است که طول و بردار یکه عمود خارجی آن به ترتیب با $l_i^{(k)}$ و $n_{ih}^{(k)}$ نشان داده می‌شوند.

معادله (۱۶) نشان می‌دهد که در اجزاء محدود هموار، فقط مقدار توابع شکل در نقاط مشخصی از تکه‌های مرز $\Gamma_i^{(k)}$ مورد نیاز است و بنابراین لزومی به داشتن صورت صریح تابع شکل نیست. زمانی که از المان‌های مثلثی استفاده می‌شود، ماتریس کرنش هموار $\tilde{B}_I(x_k)$ را می‌توان به این صورت نیز نوشت:

$$\tilde{B}_I(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{j=1}^{N_e^{(k)}} \frac{1}{3} A_e^{(j)} B_j \quad (17)$$

که در آن $N_e^{(k)}$ تعداد المان‌های مرتبط با دامنه هموارسازی k و $A_e^{(j)}$ و B_j به ترتیب مساحت و ماتریس گرادیان کرنش المان j م مرتبط با دامنه هموارسازی k هستند. به این صورت محاسبه می‌شود:

$$A^{(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N_e^{(k)}} A_e^{(j)} \quad (18)$$

همان گونه که از روابط فوق استنتاج می‌شود، فقط مساحت و ماتریس‌های معمول کرنش همساز، B_j ، معادله (۷) المان‌های مثلثی برای محاسبه ماتریس سختی کلی اجزاء محدود هموار مورد نیاز هستند.

ماتریس سختی کلی، \tilde{K} ، سپس در روندی مشابه اجزاء محدود معمولی سرهم خواهد شد:

$$\tilde{K}_{IJ} = \sum_{k=1}^{N_s} \tilde{K}_{IJ}^{(k)} \quad (19)$$

$\tilde{K}_{IJ}^{(k)}$ ماتریس سختی هموار محاسبه شده روی دامنه هموارسازی $\Omega^{(k)}$ است و به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\tilde{K}_{IJ}^{(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} \tilde{B}_I^T D \tilde{B}_J d\Omega = \tilde{B}_I^T D \tilde{B}_J A^{(k)} \quad (20)$$

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega^{(k)} \\ 0 & x \notin \Omega^{(k)} \end{cases} \quad (10)$$

در این تابع $A^{(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} d\Omega$ مساحت دامنه هموارسازی $\Omega^{(k)}$ است. با در نظر گرفتن نظریه تباین و استفاده از این تابع، مقدار کرنش هموار به دست خواهد آمد که مقدار آن در دامنه هموارسازی ثابت است:

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Gamma^{(k)}} n^{(k)}(x) u(x) d\Gamma \quad (11)$$

در این رابطه $\Gamma^{(k)}$ مرز دامنه $\Omega^{(k)}$ و $n^{(k)}(x)$ ماتریس بردارهای یکه عمود خارجی مرز $\Gamma^{(k)}$ است که در مسائل دو بعدی به این صورت نوشته می‌شود:

$$n^{(k)}(x) = \begin{bmatrix} n_x^{(k)} & 0 \\ 0 & n_y^{(k)} \\ n_y^{(k)} & n_x^{(k)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

معمولاً تابع آزمایش، $u^h(x)$ ، مورد استفاده در اجزاء محدود هموار با اجزاء محدود معمولی یکسان است. معادله (۲) و بنابراین بردار نیرو، f ، نیز در اجزاء محدود هموار مشابه اجزاء محدود معمولی نوشته می‌شود.

با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱۱)، کرنش هموار روی دامنه هموارسازی $\Omega^{(k)}$ را می‌توان بر اساس جابه‌جایی‌های گرهی نوشت:

$$\tilde{\epsilon}_k = \sum_{I \in N^{(k)}} \tilde{B}_I(x_k) d_I \quad (13)$$

که در آن $N^{(k)}$ برای اجزاء محدود مبتنی بر اضلاع تعداد گره‌های المان‌هایی است که ضلع I را به طور مشترک دارا هستند. $\tilde{B}_I(x_k)$ ماتریس کرنش هموار دامنه هموارسازی $\Omega^{(k)}$ نامیده می‌شود:

$$\tilde{B}_I(x_k) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{Ix}(x_k) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{Iy}(x_k) \\ \tilde{b}_{Iy}(x_k) & \tilde{b}_{Ix}(x_k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

که با استفاده از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$\tilde{b}_{lh}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Gamma^{(k)}} n_h^{(k)}(x) N_l(x) d\Gamma \quad (h = x, y) \quad (15)$$

اگر میدان جابه‌جایی همساز روی مرز $\Gamma^{(k)}$ خطی باشد، تنها به یک نقطه برای انتگرال‌گیری به روش گاوس^۱ در طول هر تکه مرز $\Gamma_i^{(k)}$ دامنه $\Omega^{(k)}$ نیاز خواهد بود. در این حالت،

شکل ۲. محیط مسئله تراوش حالت پایدار از زیر دیوار ایجاد شده به وسیله

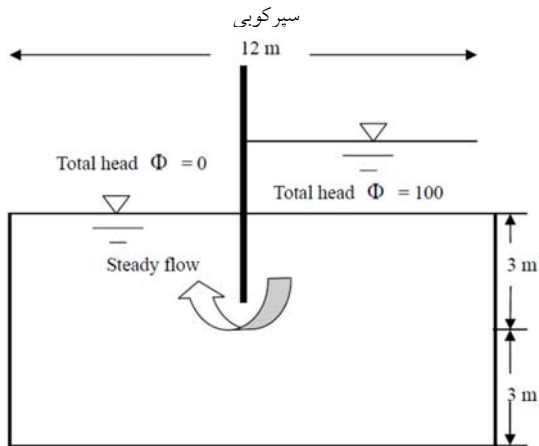


Fig. 2. Problem domain for steady state seepage under a sheet pile wall

کل افت پتانسیل هیدرولیکی از زیر دیوار برابر ۱۰۰ واحد در نظر گرفته شده است. با توجه به ویژگی‌های بیان شده، مدل سازی با فرض کرنش صفحه‌ای انجام شده است.

معادله حاکم بر این مسئله به صورت ذیل است:

$$k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

که در آن، $\Phi(x, y)$ پتانسیل هیدرولیکی و k_x و k_y به ترتیب ضرایب نفوذپذیری در جهت‌های x و y هستند که در این مسئله برابر واحد در نظر گرفته شده‌اند. شکل (۳) شبکه المان‌های مثلثی استفاده شده را همراه با شرایط مرزی نمایش می‌دهد. این شبکه دارای ۷۲ گره و ۱۱۵ المان است که در صورت ایجاد دامنه‌های هموارسازی مبتنی بر اضلاع، تعداد آن‌ها ۱۸۶ عدد خواهد بود. بزرگترین اندازه ضلع المان‌ها، که با پارامتر h شبکه مشخص می‌شود، برابر با ۱ متر در نظر گرفته شده است. ضمناً با توجه به هندسه مسئله و همسان در نظر گرفتن محیط خاکی، مقدار پتانسیل هیدرولیکی در راستای خط قائم زیر سپر برابر ۵۰ واحد خواهد بود؛ پس مدل‌سازی تنها نیمی از محیط (نیمه سمت چپ) کفایت می‌نماید.

۳- الگوریتم کدنویسی روش اجزاء محدود هموار

روند لازم برای پیاده سازی کد حل عددی به روش اجزاء محدود هموار به طور خلاصه به صورت ذیل است:

- ۱- تقسیم‌بندی دامنه مسئله به تعدادی المان و به دست آوردن اطلاعات مربوط به مختصات گره‌ها و چگونگی شکل‌گیری المان‌ها.
- ۲- ایجاد دامنه‌های هموارسازی و به دست آوردن مساحت آن‌ها و اطلاعات مربوط به گره‌های المان‌های مربوط به هر دامنه.
- ۳- تکرار روی دامنه‌های هموارسازی:

۱-۳- به دست آوردن بردار یکه عمود خارجی بر هر تکه مرز دامنه هموارسازی.

۲-۳- محاسبه ماتریس جابه‌جایی-کرنش هموار.

۳-۳- به دست آوردن ماتریس سختی هموار و بردار نیروی هر دامنه هموارسازی.

۴-۳- اضافه کردن سهم هر دامنه هموارسازی در ایجاد ماتریس‌ها و بردارهای کلی.

۴- اعمال شرایط مرزی اساسی.

۵- حل دستگاه معادلات خطی برای به دست آوردن جابه‌جایی‌های گره‌ای.

۶- به دست آوردن کرنش‌ها و تنش‌ها در نقاط مورد نظر.

شایان ذکر است که چگونگی اعمال شرایط مرزی اساسی مشابه روند مربوطه در روش اجزاء محدود معمولی و با حذف (یا تغییر) ستون‌ها و ردیف‌های ماتریس سختی است.

۴- نتایج تحلیل

۴-۱- مسئله تراوش حالت پایدار

در این قسمت، نتایج حاصل از حل مسئله تراوش حالت پایدار از زیر یک دیوار ایجاد شده با استفاده از سپرکوبی، با بهره‌گیری از کد اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع تهیه شده، بررسی شده‌اند. شکل (۲) جزئیات مسئله را نشان می‌دهد.

شکل ۴. پتانسیل هیدرولیکی محاسبه شده با استفاده از کد اجزاء محدود

هموار مبتنی بر اضلاع

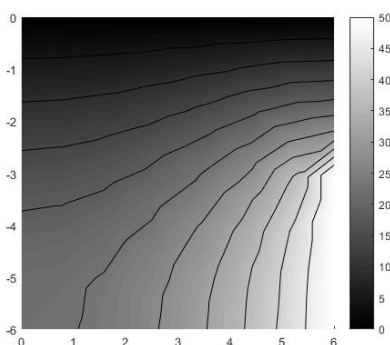


Fig. 4. Contours of hydraulic potential using the ESFEM code

برای بررسی اثر اندازه المان‌ها (پارامتر h شبکه) بر میزان کاهش خطا در اثر استفاده از تکنیک هموارسازی، محیط مسأله با دو شبکه دیگر با پارامتر h برابر ۲ و ۳ متر نیز شبکه‌بندی شده و با هر دو روش اجزاء محدود معمولی و هموار با شبکه یکسان مورد تحلیل قرار گرفت. بیشینه خطا در مرز پایینی مسأله، در مقایسه با نتایج به دست آمده از تحلیل اجزاء محدود با شبکه المان‌های شش گره‌ای با h برابر ۱ متر، در برابر پارامتر h شبکه‌های مختلف در شکل (۷) رسم شده است. مشاهده می‌شود که در تمام حالات خطای روش اجزاء محدود معمولی از روش اجزاء محدود هموار بیشتر است، و با افزایش اندازه المان‌ها تکنیک هموارسازی کرنش منجر به کاهش خطای بیشتری خواهد شد.

شکل ۵. پتانسیل هیدرولیکی محاسبه شده در مرز پایینی دامنه مسأله

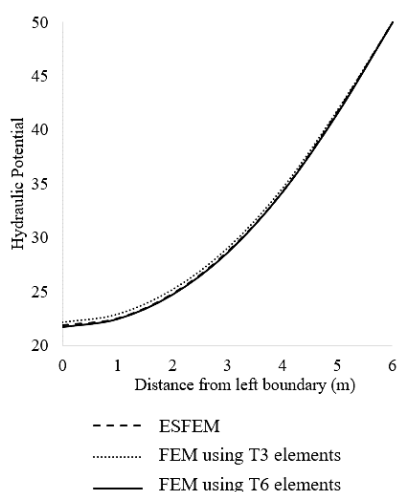


Fig. 5. Hydraulic potential on the lower boundary of problem domain

شکل ۳. شبکه مورد استفاده در مسأله تراوش حالت پایدار همراه با اعمال

شرایط مرزی

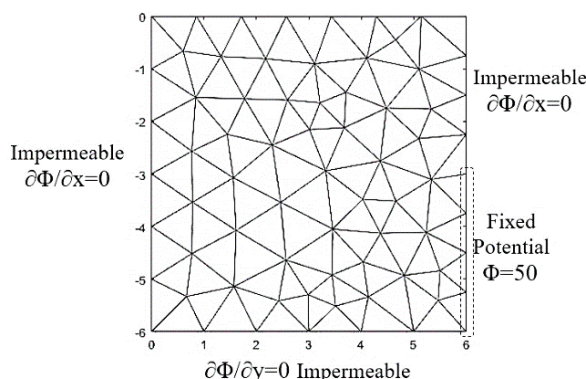


Fig. 3. Domain discretization and boundary conditions for the steady state seepage problem

پتانسیل هیدرولیکی محاسبه شده با استفاده از روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع برای این مسأله در شکل (۴) قابل مشاهده است. این محاسبه با روش اجزاء محدود معمولی نیز با استفاده از المان‌های سه گره‌ای و همان شبکه انجام شده است تا بتوان عملکرد دو روش را مقایسه کرد. از آن‌جا که برای این مسأله حل تحلیلی وجود ندارد، جواب‌های حل اجزاء محدود با استفاده از شبکه یکسان و المان‌های شش گره‌ای که به علت داشتن توابع شکل مرتبه بالاتر، دقیق‌تر هستند به عنوان معیار مقایسه انتخاب شده است.

شکل (۵) پتانسیل هیدرولیکی محاسبه شده برای مرز پایینی دامنه‌ی مسأله را با استفاده از هر سه روش نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که جواب‌های روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع مطابقت خوبی با جواب‌های اجزاء محدود دارند. به عبارت دیگر، روش اجزاء محدود هموار در شبکه‌ی المان‌های مثلثی سه گره‌ای دقتی در حد روش اجزاء محدود در شبکه المان‌های مثلثی شش گره‌ای ایجاد می‌کند. افزایش دقت روش اجزاء محدود با استفاده از المان‌های سه گره‌ای، زمانی که تکنیک هموارسازی کرنش به آن اضافه شود در شکل (۶) مشاهده می‌شود. همان‌گونه که این نمودار نشان می‌دهد، استفاده از روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع، با شبکه و تعداد درجات آزادی یکسان، می‌تواند خطای پاسخ روش اجزاء محدود معمولی را به کم‌تر از نصف کاهش دهد.

دایروی مدل سازی شده است. در این مدل از سختی سازه شالوده صرف نظر شده و بار مستقیماً به خاک وارد می شود. پارامترهای مدل سازی خاک شامل ضریب کشسانی، E ، برابر 10000 kPa و ضریب پواسون، ν ، برابر 0.3 در نظر گرفته شده اند. میزان بار 30 kPa و شعاع پی 5 متر است. شبکه المان های مثلثی استفاده شده در شکل (۸) نشان داده شده است. این شبکه دارای 265 گره و 478 المان است و در صورت ایجاد دامنه های هموارسازی مبتنی بر اضلاع، تعداد آن ها 742 عدد خواهد بود. شرایط مرزی استاندارد ژئوتکنیکی به مرزها اعمال شده اند و مرز سمت چپ محور تقارن است.

شکل ۸ شبکه المان های مثلثی مورد استفاده در مسأله نشست پی

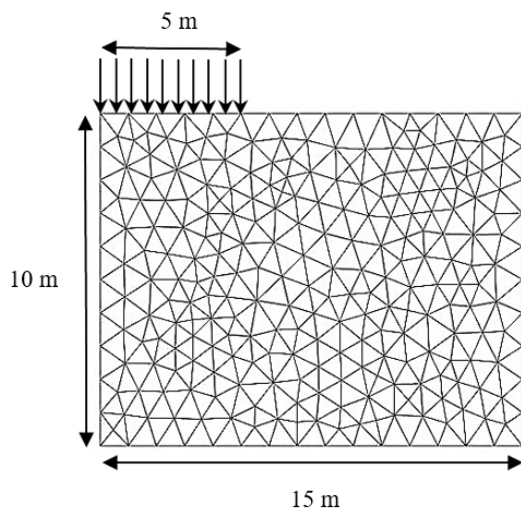


Fig. 8. Triangular elements mesh for foundation settlement problem

شکل (۹) میزان جابه جایی در سطح زمین را بر اساس نتایج به دست آمده از سه روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع و اجزاء محدود با استفاده از المان های سه و شش گره - ای نشان می دهد. لازم به ذکر است که شبکه مورد استفاده در هر سه روش یکسان می باشد. همان گونه که ملاحظه می شود، نتایج تقریباً بر هم منطبق هستند.

برای بررسی دقیق تر، میانگین نشست نقاط واقع در زیر پی (فاصله عرضی 0 تا 5 متر) در جدول (۱) بر اساس سه روش با هم مقایسه شده اند. با در نظر گرفتن روش اجزاء محدود با

۲-۴- نشست الاستیک پی

پس از بررسی عملکرد روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع در حل مسأله کرنش صفحه ای، مناسب خواهد بود که کارکرد این روش در حل مسائل دارای تقارن محوری نیز بررسی شود. به این منظور، نشست الاستیک یک پی

شکل ۶. مقایسه ی خطای پتانسیل هیدرولیکی در دو روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع و اجزاء محدود معمولی با استفاده از المان های سه گره ای

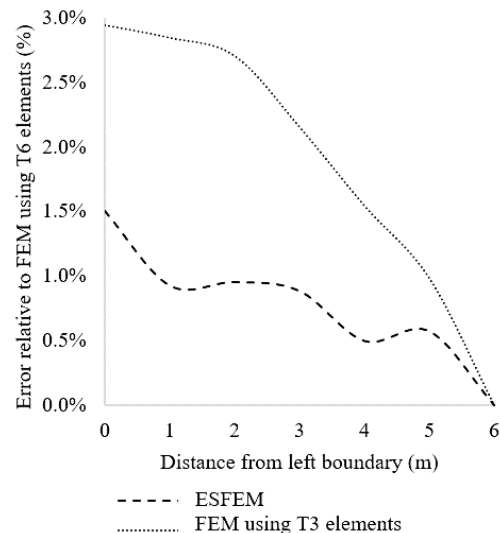


Fig. 6. Error in hydraulic potential using ESFEM and FEM with T3 elements

شکل ۷. بررسی اثر اندازه المان ها بر میزان کاهش خطای ناشی از کاربرد تکنیک هموارسازی کرنش در اجزاء محدود معمولی با استفاده از المان های سه گره ای

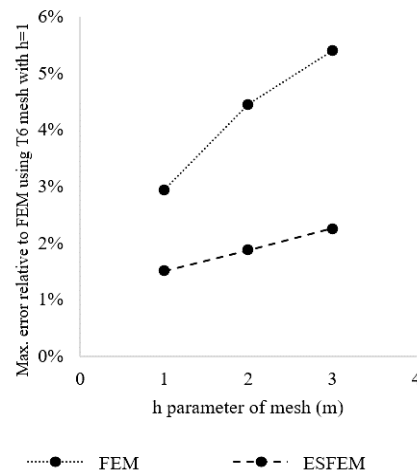


Fig. 7. Effect of elements size on error reduction by strain smoothing in FEM using T3 elements

نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روابط تحلیلی تئوری الاستیسیته [20] در جدول (۲) مقایسه شده اند.

جدول ۲. اضافه تنش عمودی ایجاد شده در زیر مرکز پی به دست آمده از روش‌های مختلف (کیلو پاسکال)

ESFEM	FEM	Analytical	Depth (m)
30.0	506.2	26.8	0.5
29.3	312.5	29.1	1.5
27.3	376.6	27.3	2.5
24.3	230.3	25.1	3.5
21.0	194.6	22.2	4.5
17.8	149.5	19.8	5.5
15.1	116.4	17.4	6.5
12.7	77.3	15.7	7.5
10.8	118.3	14.1	8.5
9.2	32.2	12.5	9.5

Table 2. Vertical stress under the center of the foundation using different methods (kPa)

ملاحظه می‌شود که با وجود این که اجزاء محدود با المان‌های سه گره‌ای عملکرد بسیار ضعیفی در محاسبه تنش‌ها دارد، استفاده از تکنیک هموارسازی کرنش در آن میتواند میزان خطا را تا حد بسیار زیادی کاهش داده و جواب‌هایی نزدیک به نتایج تحلیلی برای تنش ارائه دهد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، پس از معرفی ایده‌ها و روابط روش اجزاء محدود هموار، با نگرش ویژه به روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع به عنوان روشی با دقت بیشتر و همگرایی سریع‌تر، روند کد نویسی این روش بیان شد. سپس نتایج حاصل از حل دو مسأله ژئوتکنیکی کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری به وسیله کد تهیه شده مورد بررسی و مقایسه قرار گرفتند.

در مسأله تراوش حالت پایدار با فرض کرنش صفحه‌ای، پس از مدل سازی و تحلیل جریان عبوری از زیر یک دیوار ایجاد شده به وسیله سپرکوبی، مشخص شد که کاربرد تکنیک هموار سازی کرنش در اجزاء محدود می‌تواند دقت این روش را افزایش دهد. بررسی نتایج نشان می‌دهد که در حل این گونه مسائل، روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع با تعداد درجات آزادی یکسان می‌تواند خطای روش اجزاء محدود

المان‌های شش گره‌ای به عنوان روش دقیق‌تر و مبنای مقایسه، مشاهده می‌شود که پاسخ روش اجزاء محدود هموار به آن نزدیک‌تر و در نتیجه این روش دارای خطای کم‌تری نسبت به اجزاء محدود سه گره‌ای است. در واقع، در حالت تقارن محوری نیز تکنیک هموارسازی کرنش می‌تواند با تعداد درجات آزادی یکسان، نتایج اجزاء محدود را دقیق‌تر سازد.

شکل ۹. میزان جابه‌جایی سطح زمین در مسأله نشست پی

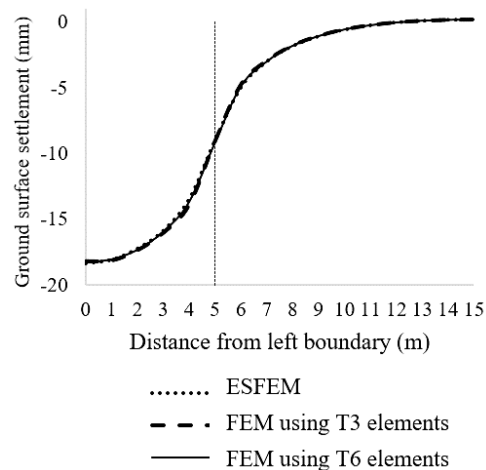


Fig. 9. Ground surface settlement (mm)

جدول ۱. مقایسه میزان نشست پی (میلی‌متر)

Difference with FEM Using T6	Average Foundation Settlement	Numerical Method
-	15.42	FEM Using T6
-0.09	15.33	FEM Using T3
0.02	15.44	ESFEM

Table 1. Comparison of foundation settlement (mm)

عملکرد برتر روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع با بررسی تنش‌ها مشخص‌تر خواهد شد. به طور کلی، المان‌های سه گره‌ای در اجزاء محدود معمولی به دلیل سختی بیش از اندازه و ناپیوستگی میدان تنش در مرز بین المان‌ها، در محاسبه تنش‌ها نتایج ضعیفی را به دست می‌دهند. اجزاء محدود هموار می‌تواند این نقیصه را به میزان بسیار زیادی جبران کند. به منظور بررسی این موضوع، میزان اضافه تنش عمودی (σ_z) ایجاد شده در اثر بار پی در زیر مرکز آن با هر دو روش اجزاء محدود معمولی و هموار برای اعماق مختلف محاسبه شد.

Journal for Numerical Methods in Engineering, 83(11), 2010, pp.1466-1497.

[10] Liu, G.R., Nourbakhshnia, N., Chen, L. and Zhang, Y.W., "A novel general formulation for singular stress field using the ES-FEM method for the analysis of mixed-mode cracks", *International Journal of Computational Methods*, 7(01), 2010, pp.191-214.

[11] Zhang, Z.B., Wu, S.C., Liu, G.R. and Chen, W.L., "Nonlinear transient heat transfer problems using the meshfree ES-PIM", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11(12), 2010, pp.1077-1092.

[12] Wu, S.C., Liu, G.R., Cui, X.Y., Nguyen, T.T. and Zhang, G.Y., "An edge-based smoothed point interpolation method (ES-PIM) for heat transfer analysis of rapid manufacturing system", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(9), 2010, pp.1938-1950.

[13] He, Z.C., Cheng, A.G., Zhang, G.Y., Zhong, Z.H. and Liu, G.R., "Dispersion error reduction for acoustic problems using the edge-based smoothed finite element method (ES-FEM)", *International journal for numerical methods in engineering*, 86(11), 2011, pp.1322-1338.

[14] He, Z.C., Liu, G.R., Zhong, Z.H., Zhang, G.Y. and Cheng, A.G., "A coupled ES-FEM/BEM method for fluid-structure interaction problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1), 2011, pp.140-147.

[15] Zhang, Z.Q. and Liu, G.R., "Upper and lower bounds for natural frequencies: a property of the smoothed finite element methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(2), 2010, pp.149-178.

[16] Zhang, Z.Q. and Liu, G.R., "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) using 3-node triangular elements for 3D non-linear analysis of spatial membrane structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2), 2011, pp.135-154.

[17] Nguyen-Thoi, T., Liu, G.R., Nguyen-Xuan, H. and Nguyen-Tran, C., "Adaptive analysis using the node-based smoothed finite element method (NS-FEM)", *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(2), 2011, pp.198-218.

[18] Li, Y., Liu, G.R. and Zhang, G.Y., "An adaptive NS/ES-FEM approach for 2D contact problems using triangular elements", *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(3), 2011, pp.256-275.

[19] Li, E., Liu, G.R., Tan, V. and He, Z.C., "An efficient algorithm for phase change problem in tumor treatment using α FEM", *International Journal of Thermal Sciences*, 49(10), 2010, pp.1954-1967.

[20] Craig, R.F., *Craig's soil mechanics*, 7th ed, CRC Press, 2004.

معمولی با المان‌های سه گره‌ای را بسیار کاهش دهد، که میزان این کاهش برای المان‌های با اندازه بزرگ‌تر بیش‌تر خواهد بود.

نتایج حاصل از تحلیل مسأله نشست الاستیک پی دایروی شرایط مشابهی را در مسائل با فرض تقارن محوری نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در این گونه مسائل نیز روش اجزاء محدود هموار مبتنی بر اضلاع با تعداد درجات آزادی یکسان، می‌تواند دقت بیشتری نسبت به روش اجزاء محدود معمول داشته باشد. علاوه بر آن، عملکرد ضعیف المان‌های سه گره‌ای اجزاء محدود معمولی در محاسبه تنش‌ها، می‌تواند با استفاده از تکنیک هموارسازی کرنش تا حد بسیار زیادی بهبود یابد.

References

۶- مراجع

[1] Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y., "A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods", *International journal for numerical methods in engineering*, 50(2), 2001, pp.435-466.

[2] Liu, G.R., Dai, K.Y. and Nguyen, T.T., "A smoothed finite element method for mechanics problems", *Computational Mechanics*, 39(6), 2007, pp.859-877.

[3] Liu, G.R., Nguyen-Thoi, T., Nguyen-Xuan, H. and Lam, K.Y., "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems", *Computers & structures*, 87(1), 2009, pp.14-26.

[4] Liu, G.R., Nguyen-Thoi, T. and Lam, K.Y., "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids", *Journal of Sound and Vibration*, 320(4), 2009, pp.1100-1130.

[5] Liu, G. and Nguyen, T., *Smoothed finite element methods*, 1st ed, Boca Raton, CRC Press, 2010.

[6] Cui, X.Y., Liu, G.R., Li, G.Y. and Zhang, G.Y., "A thin plate formulation without rotation DOFs based on the radial point interpolation method and triangular cells", *International journal for numerical methods in engineering*, 85(8), 2011, pp.958-986.

[7] Liu, G.R., Nguyen-Xuan, H. and Nguyen-Thoi, T., "A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(10), 2010, pp.1222-1256.

[8] Liu, G.R., Nourbakhshnia, N. and Zhang, Y.W., "A novel singular ES-FEM method for simulating singular stress fields near the crack tips for linear fracture problems", *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6), 2011, pp.863-876.

[9] Liu, G.R., Chen, L., Nguyen-Thoi, T., Zeng, K.Y. and Zhang, G.Y., "A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of fracture problems", *International*

Application of Edge Based Smoothed Finite Element Method in Solution of Seepage and Foundation Settlement Problems

Erfan Karimian¹, Mohammad Oliaei^{2*}

^aPh.D. Candidate, Department of Civil and Environmental Engineering, TarbiatModares University

^bAssistant Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, TarbiatModares University

Abstract:

Smoothed finite element method (SFEM) was introduced by application of the strain smoothing technique in the conventional finite element method (FEM). The strain smoothing technique was previously used in mesh-free methods to overcome the numerical instabilities due to nodal integration. SFEM has three main types: 1-Cell-based SFEM (CSFEM), 2-Node-based SFEM (NSFEM) and 3-Edge-based SFEM (ESFEM). In these methods, problem domain is first discretized into a mesh of elements, similar to the FEM, and "Smoothing Domains" are created based on the elements, to perform the strain smoothing operation. The difference between SFEM types is in the method of creating these smoothing domains. Different smoothing domains, can give results with different qualities. Among them, the edge-based method can give ultra-accurate and super-convergent results. Due to their interesting features, SFEMs have been used to solve different problems. Problems such as mechanics of solids and piezo-electrics, fracture mechanics and crack propagation, heat transfer, structural acoustics, nonlinear and contact problems, adaptive analysis, phase change problem and more. In this paper, idea and formulation of SFEM is reviewed, regarding the edge-based method. Detailed instructions are given for creation of edge-based smoothing domains, and strain and stiffness matrices for this method are derived. After that, the algorithm for creation of a SFEM code is introduced. Based on these formulations and algorithm, an edge-based smoothed finite element code is created, that is used for analysis of some numerical examples. Two problems, based on two different practical geotechnical engineering applications, are solved using the ESFEM and also FEM with 3-node and 6-node triangular elements. Using same mesh for all three cases makes comparison possible and performance of the ESFEM will be investigated. First problem is a steady state seepage problem, where seepage below a sheet pile barrier is modeled with the assumption of plane strain condition. Since there is no analytical solution for this problem, FEM using 6-node triangular elements yields to more accurate results. Investigating the results reveals that implementation of the strain smoothing technique in FEM using 3-node triangular elements, can make the results closer to those of the FEM using 6-node triangular elements. However, the degrees of freedom remain constant. With no change in mesh and number of degrees of freedom, Edge-based smoothed finite element method gives results -for steady state seepage problem- with errors less than the half of the errors reported in conventional FEM. In the other problem, elastic settlement of a circular foundation is calculated to investigate the performance of the ESFEM in axisymmetric problems, compared with the FEM. Again, the problem is solved using three methods: ESFEM, FEM with 3-node triangular elements, and FEM with 6-node triangular element, where the latter is the most accurate. Surface deformation of the problem domain, after imposition of the foundation load, is also studied. It is seen that the results of ESFEM match with the FEM results. A closer look reveals that the ESFEM results for settlement of the foundation, is closer to the FEM results using 6-node triangular elements, than the FEM using 3-node elements and are more accurate.

Keywords: Smoothed Finite Element Method, Finite Element Method, Steady State Seepage, Foundation Settlement.