

سنجش توانایی‌های چهار راهکار تقریبی بهینه‌سازی خرپاها

محمد رضایی پژند^{۱*}، سعید طلاساز فیروزی^۲

۱- استاد، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

Mrpajand@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۳۸۴/۰۱/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۲/۰۱

چکیده - فن‌های تقریبی بهینه‌سازی سازه‌ها فراوانند. از میان آن‌ها، چهار روش تقریبی توانا برای بهینه‌کردن خرپاها، اختیار و معرفی می‌شوند. این راهکارها، از تغییر و یا بهبود روش‌های تقریبی پیشین به دست آمده‌اند. بر پایه این شیوه‌های تقریبی، سازه‌های خرپایی بسیاری، با برنامه رایانه‌ای نویسندگان تحلیل شده‌اند. به سبب حجم محدود مقاله، در این جا تنها درباره‌ی شماری از سازه‌های تحلیل شده، بحث می‌شود. این پژوهش مشخص کرد که این چهار فن تقریبی، توانایی‌های یکسانی ندارند و پاره‌ای از آن‌ها کاستی‌هایی دارند. رسیدن به پاسخ بهتر، زمان کم‌تر تحلیل، نوسان پاسخ‌ها، پایداری عددی و هم‌چنین تنوع به کار بردن متغیرها، از میان ویژگی‌های آشکار شده است. خلاصه‌ای از یافته‌های این چهار روش در بخش نتیجه‌گیری می‌آید.

کلیدواژه‌گان: برنامه‌ریزی غیرخطی، بهینه‌کلی، راهکارهای تقریبی، تقریب کوژ، تحلیل سازه‌ها، خرپای مستوی و فضایی.

۱- مقدمه

زمان، نوسان، پایداری، تنوع متغیر، برنامه رایانه‌ای و ویژگی‌های کلی، بررسی می‌شوند. هم‌چنین، به اهمیت شیوه حل مسئله بهینه پرداخته خواهد شد. باید دانست، در بیش‌تر کارها، پیشینیان تنها به راهکارهای جدید تقریب توابع پرداخته‌اند. بهتر است همگام با تقریب توابع، به روش حل مسئله بهینه نیز توجه کرد.

گسترش علم بهینه‌سازی در سال‌های اخیر سبب شده است تا مهندسان از این فن برای طراحی سازه‌ها بهره‌گیرند. این مقاله در حوزه روش‌های بهینه‌سازی ریاضی است. از این رو، در ادامه، نخست به رابطه‌های ریاضی مسئله بهینه‌سازی و در پی آن به معرفی چهار روش تقریبی پرداخته خواهد شد. سپس، مسائل گوناگونی که جنبه‌های متفاوتی از بهینه‌سازی را دربرمی‌گیرند با روش‌های مزبور حل و فرایند یافتن پاسخ‌های آن‌ها با هم مقایسه می‌شوند. سرانجام، ویژگی‌های این راهکارهای تقریبی از هفت دیدگاه پاسخ بهینه،

۲- برنامه طرح بهینه خرپاها

هدف از بهینه‌سازی خرپاها، یافتن متغیرهای طراحی، مانند سطح مقطع اعضا و شکل هندسی سازه به گونه‌ای است

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \right) \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] \left(\frac{x_{i0}}{x_i} \right)^{r_i} \quad (2)$$

در این رابطه، $g_h(x, r)$ تقریب کوژ مرتبه بالا است. عامل r_i یک عدد حقیقی است که مرتبه یا درجه کوژ بودن قید $g(x)$ را با توجه به متغیر x_i مشخص می‌کند. مقدار r_i برای هر قید در چرخه‌های متفاوت تغییر می‌کند. چنانگ و همکارانش نابرابری زیر را ثابت کرده‌اند [۱]:

$$g_h(x, r) > g_h(x, s) \quad \text{اگر} \quad r_i > s_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

برای جلوگیری از نوسان فن SACA، مرتبه r_i برای هر متغیر طراحی بین دو گام متوازن می‌شود. در این راهکار، بر پایه رابطه (۴)، مرتبه r_i برای کل متغیرهای طراحی x_i مشابه اختیار می‌شود:

$$g_a(x, r) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \right) \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \right) \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] \left(\frac{x_{i0}}{x_i} \right)^{r_i} \quad (4)$$

۳-۱- یافتن مرتبه r

در فن خودمتوازن کوژ، اگر در چرخه $(k-1)$ ام مرتبه تقریب کوژ r^{k-1} باشد، مسئله تقریبی با توجه به مقدار x^{k-1} برپا می‌شود. پس از حل این مسئله، نقطه بهینه جدید x^k به دست می‌آید. و با بهره بردن از گام‌های تعریف شده‌ای می‌توان مرتبه r_i^k را پیدا کرد [۱، ۲].

چون تابع $g_a(x^k, r)$ افزایشی است، می‌توان با به‌کارگیری فن نسبت طلائی و کرانه‌های بالا و پایین r_u و r_l ، مرتبه تابع (r) را پیدا کرد.

باید افزود، برای همگرایی مناسب و جلوگیری از نوسان فرایند حل، بهتر است با روش تابع تاوان داخلی بهینه‌سازی انجام شود.

که وزن یا قیمت سازه کمینه شود. هم‌چنین، تمامی شرط‌های طراحی، مانند قیدهای تنش، تغییر مکان و دستورهای آیین‌نامه‌ای، برقرار شوند. صورت کلی یک مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F(x) : \text{کمینه شود}$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$h_k(x) = 0 \quad k=1, 2, \dots, l$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, 2, \dots, n$$

در این برنامه، $F(x)$ تابع هدف، $g_j(x)$ محدودیت‌های نابرابری، $h_k(x)$ قیدهای برابری، n ، x_i^L و x_i^U به ترتیب، شمار و کرانه‌های پایین و بالای متغیرهای طراحی است. هم‌چنین، x بردار متغیرها و m و l ، به ترتیب، شمار محدودیت‌های نامساوی و برابری هستند.

۳- فن خودمتوازن کوژ^۱

این راهکار، که توسط چانگ در سال ۲۰۰۱ پیشنهاد شد، بر پایه روش خطی‌سازی کوژ استوار است. در این شیوه، تلاش می‌شود که تقریب تابع‌ها همواره در ناحیه پذیرفتنی قرار گیرد. بنابراین، از نوسان روش در چرخه‌های مسئله جلوگیری می‌شود و در پی آن سرعت همگرایی فرایند افزایش خواهد یافت. در فن خطی‌سازی کوژ، هرگاه مشتق مرتبه یکم مثبت باشد، متغیر مستقیم (x_i) و در غیر این صورت، متغیر وارون $(\frac{1}{x_i})$ به کار می‌رود. تقریب کوژ مرتبه بالا (r_i) با کاربرد متغیرهای $x_i^{r_i}$ و $\frac{1}{x_i^{r_i}}$ ، بر پایه علامت مشتق مرتبه یکم، به شکل زیر است:

$$g_h(x, r) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \right) \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] +$$

1. Self-Adjusted Convex Approximation (SACA)

۴- روش ترکیبی مجانب‌ها

فرایند بهینه‌سازی خرپاها برای سطح مقطع، شکل و هم‌چنین ضخامت و جهت لایه‌ها در سازه‌های مرکب، بسیار پیچیده است. تابع هدف و قیدها، هم‌زمان یکنوا و غیریکنوا می‌شوند. از این رو، بیش‌تر روش‌های تقریبی، یا دارای همگرایی مناسبی نیستند و یا توانایی حل مسئله را ندارند. در سال ۱۹۹۸، زانگ برای بهینه‌سازی شکل خرپاها به این نتیجه دست یافت که باید یک راهکار ترکیبی برای حل این‌گونه مسائل به کاربرد. در راستای این اندیشه، برونیل و فلوری در سال ۲۰۰۲، راهکار ترکیبی از مجانب‌ها را پیشنهاد کردند که توانایی تقریب هم‌زمان هر دو گونه متغیر طراحی را دارد. چون در این فرایند از روش‌های تقریبی مجانب‌های متحرک^۱ و مجانب‌های متحرک بر پایه شیب^۲ استفاده می‌شود، بنابراین نخست به ویژگی‌های این دو شیوه می‌پردازیم.

۴-۱- روش MMA

این فن توسط اسوانبرگ در سال ۱۹۸۷ پیشنهاد شد. راهکار مزبور، بهبود یافته روش خطی‌سازی کوژ است و مانند آن از تقریب‌های مرتبه یکم کوژ استفاده می‌کند. در این فرایند، به جای بهره بردن از متغیرهای مستقیم و وارون، بر پایه علامت مشتق مرتبه یکم، تنها متغیرهای وارون $\frac{1}{U_i - x_i}$ و $\frac{1}{x_i - L_i}$ به کار می‌روند. تقریب تابع هدف و محدودیت‌های مسئله بهینه‌سازی در چرخه k ام به شکل زیر است [۳]:

$$\tilde{g}_j(x) = g_j(x_k) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^k \left(\frac{1}{U_i^k - x_i} - \frac{1}{U_i^k - x_i^k} \right) +$$

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}^k \left(\frac{1}{x_i - L_i^k} - \frac{1}{x_i^k - L_i^k} \right) \quad j=0, 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

در این رابطه‌ها، L_i^k و U_i^k مقدار مجانب‌ها در چرخه k ام و m و n ، به ترتیب، شمار محدودیت‌ها و متغیرهای طراحی است. باید به خاطر سپرد، برای هر متغیر طراحی فقط یکی از دو مجانب به کار می‌رود. در نتیجه، تابع تقریبی یکنواست.

۴-۲- شیوه GBMMA2

این راهکار در گروه تقریب‌های غیریکنوا قرار دارد. باید افزود، تقریب GBMMA2 به وسیله‌ی دو سینکس در سال ۱۹۹۵ به شکل زیر پیشنهاد شد:

$$\tilde{g}_j(x) = g_j(x^k) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^k \left(\frac{1}{U_i^k - x_i} - \frac{1}{U_i^k - x_i^k} \right) + \sum_{i=1}^n q_{ij}^k \left(\frac{1}{x_i - L_i^k} - \frac{1}{x_i^k - L_i^k} \right) \quad (7)$$

خاطر نشان می‌کند، در این رابطه‌ها، مشتق مرتبه دوم تابع باید مثبت باشد تا کوژ بودن مسئله پابرجا بماند.

۴-۴- مساله دوگان در تقریب‌های مجانب

برای حل برنامه بهینه‌سازی با استفاده از فن دوگان، نخست تابع لاگرانژ مسئله را به شکل زیر می‌نویسند:

$$L(x, \lambda) = r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{i0} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{i0} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \right) \quad (8)$$

$$L(x, \lambda) = r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n L_i(x_i, \lambda) \quad (9)$$

$$L_i(x_i, \lambda) = \frac{p_{i0} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{i0} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \quad (10)$$

$$b = \{b_1, \dots, b_m\}^T \quad (11)$$

$$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}^T \quad (12)$$

$$P_i = \{p_{i1}, \dots, p_{im}\}^T \quad (13)$$

$$q_i = \{q_{i1}, \dots, q_{im}\}^T \quad (14)$$

1. Method of Moving Asymptotes (MMA)
2. Gradient Based Method of Moving Asymptotes (GBMMA)

در ادامه، مشتق مرتبه یکم و دوم تابع لاگرانژ و رابطه بین متغیرهای طراحی و متغیرهای دوگان درج می‌شود:

$$L'_i(x_i, \lambda) = \frac{p_{i0} + \lambda^T p_i}{(U_i - x_i)^2} - \frac{q_{i0} + \lambda^T q_i}{(x_i - L_i)^2} \quad (15)$$

$$L''_i(x_i, \lambda) = \frac{2(p_{i0} + \lambda^T p_i)}{(U_i - x_i)^3} + \frac{2(q_{i0} + \lambda^T q_i)}{(x_i - L_i)^3} \quad (16)$$

چون $\lambda, p_{i0}, q_{i0}, p_i, q_i$ همگی مثبت هستند، بنابراین، $L''_i(x_i, \lambda) \geq 0$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$L'_i(\alpha_i, \lambda) \geq 0 \quad \text{اگر} \quad x_i(\lambda) = \alpha_i \quad (17)$$

$$L'_i(\beta_i, \lambda) \leq 0 \quad \text{اگر} \quad x_i(\lambda) = \beta_i \quad (18)$$

برای $L'_i(\alpha_i, \lambda) < 0$ و $L'_i(\beta_i, \lambda) > 0$ ، مقدار $x_i(\lambda)$ ، که پاسخ یگانه معادله $L'_i(x_i, \lambda) = 0$ است، به شکل زیر در می‌آید:

$$x_i(\lambda) = \frac{(p_{i0} + \lambda^T p_i)^{1/2} L_i + (q_{i0} + \lambda^T q_i)^{1/2} U_i}{(p_{i0} + \lambda^T p_i)^{1/2} + (q_{i0} + \lambda^T q_i)^{1/2}} \quad (19)$$

از سوی دیگر، با قرار دادن $x_i(\lambda)$ در تابع لاگرانژ، که تابع هدف مسئله دوگان است، مقدار آن فقط بر حسب λ به دست می‌آید. در نتیجه، مسئله دوگان به شکل زیر خواهد بود:

$$L(\lambda) = r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{i0} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i(\lambda)} + \frac{q_{i0} + \lambda^T q_i}{x_i(\lambda) - L_i} \right) \quad (20)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{محدودیت‌ها} \quad (21)$$

این برنامه بهینه‌سازی نامعقد است. می‌توان این مسئله را با یکی از شیوه‌ها مانند تندترین کاهش و یا روش شیب حل کرد. پس از حل برنامه دوگان و پیدا کردن مقدار متغیرهای دوگان، متغیرهای مسئله نخستین با رابطه (۴۰)، به دست

می‌آید. سرانجام، مقدار کمینه تابع هدف نخستین، با استفاده از پاسخهای بهینه حساب می‌شود.

باید افزود، تقریب تابع در شیوه ترکیبی مجانب‌ها را می‌توان به شکل زیر نوشت [۵، ۴]:

$$\tilde{g}_j(x) = g_j(x^k) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^k \left(\frac{1}{U_{ij}^k - x_i} - \frac{1}{U_{ij}^k - x_i^k} \right) + \sum_{i=1}^n q_{ij}^k \left(\frac{1}{x_i - L_{ij}^k} - \frac{1}{x_i^k - L_{ij}^k} \right) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^k \left(\frac{1}{U_{ij}^k - x_i} - \frac{1}{U_{ij}^k - x_i^k} \right) + \sum_{i=1}^n q_{ij}^k \left(\frac{1}{x_i - L_{ij}^k} - \frac{1}{x_i^k - L_{ij}^k} \right) \quad (23)$$

یاد آوری می‌کند، رابطه کنونی یک تقریب ترکیبی از فنهای *MMA* و *GBMMA2* می‌باشد. در این شیوه ترکیبی جدید، متغیرهای طراحی به دو گروه *A* و *B* تقسیم می‌شوند. برای متغیرهایی که در گروه *A* قرار می‌گیرند و اثرهای غیر یکنوا در تابع $g_j(x)$ را دارند، تقریب *GBMMA2* به کار می‌رود. از سوی دیگر، برای متغیرهای گروه *B* با اثرهای یکنوا، از تقریب *MMA* بهره می‌جویند. به سخن دیگر شیوه *MMA* یکنوا و فن *GBMMA2* محذب است.

در چرخه $k > 2$ از مساله بهینه‌سازی، یک روش خودکار برای تشخیص گروه‌بندی متغیرهای طراحی استفاده می‌گردد. این روش که گونه‌ای آزمون می‌باشد، بر اساس مقدارهای مشتق مرتبه یکم در دو تکرار پیشین از مساله بهینه‌سازی است. برای هر محدودیت $(g_j(x))$ و هر متغیر طراحی (x_i) باید آزمون زیر را انجام داد.

$$\text{اگر} \quad \frac{\partial g_j(x^k)}{\partial x_i} \times \frac{\partial g_j(x^{k-1})}{\partial x_i} > 0 \quad \text{یا} \quad \text{MMA} \quad \text{یا} \quad \text{GMMA}$$

$$\text{اگر} \quad \frac{\partial g_j(x^k)}{\partial x_i} \times \frac{\partial g_j(x^{k-1})}{\partial x_i} < 0 \quad \text{یا} \quad \text{GBMMA} \quad \text{یا} \quad \text{GCMMA}$$

$$\text{اگر} \quad \frac{\partial g_j(x^k)}{\partial x_i} - \frac{\partial g_j(x^{k-1})}{\partial x_i} = 0 \quad (23) \quad \text{رابطه خطی}$$

$$\begin{cases} \alpha_i \leq 0 & \text{آن گاه} & g_Q \leq g_{QR} & (28) \\ \alpha_i > 0 & \text{آن گاه} & g_Q > g_{QR} & (29) \end{cases}$$

در رابطه (۵۰)، چون $g_Q < g_{QR}$ است، بنابراین، تقریب g_{QR} محافظه کارانه تر از روش g_Q خواهد بود. در حالت دیگر، می توان تقریب g_Q در رابطه (۵۰) را نیز یک تقریب محافظه کارانه دانست. بر این پایه، سلاجقه انتخاب روش مناسب را به شکل زیر پیشنهاد می کند:

$$\begin{cases} g_{QR} & \alpha_i \leq 0 \\ \text{آن گاه} & \\ g_Q & \alpha_i > 0 \end{cases} \quad (30)$$

۶- تقریب سه نقطه^۲

فرایند طولانی در مسائل بهینه سازی، سبب افزایش زمان حل و هزینه می شود. تحلیلگران، تلاش های بسیاری برای کاهش هزینه ها انجام داده اند. آن ها آشکار کرده اند که با تقریب های کیفیت بالاتر، می توان این هزینه ها را کاهش داد. گیو و یامازاکی برای انجام این کار یک ترکیب خطی از متغیرهای مستقیم و وارون در سال ۲۰۰۱ پیشنهاد کردند.

اگر x_0 ، x_1 و x_2 سه نقطه پیاپی طراحی باشند، تابع تقریبی TPA، که گرد نقطه x_0 گسترش یافته است، به شکل زیر پیشنهاد می شود [V]:

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \left[\alpha_i (x_i - x_{0i}) + \beta_i \left(x_{0i} - \frac{x_{0i}^2}{x_i} \right) \right] + \frac{1}{2} c_1 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2 + \frac{1}{2} c_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{0i}} \right)^2 \quad (31)$$

این تقریب، ترکیب خطی از متغیرهای مستقیم و وارون در دو جمله نخست دنباله تیلور است. خاطر نشان می کند، جمله های دوم در این تقریب، فقط درایه های قطری

۵- تقریب محافظ کارانه درجه دوم^۱

این فن با گسترش روش های مستقیم و وارون به وسیله سلاجقه در سال ۲۰۰۲ پیشنهاد شد. یک تقریب مرتبه دوم که از متغیر مستقیم و درایه های قطری ماتریس هسین استفاده می کند به شکل زیر است [۶]:

$$g_Q(x) = g(x_1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_i} (x_i - x_{1i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_i^2} (x_i - x_{1i})^2 \quad (24)$$

در رابطه کنونی، x_1 نقطه طراحی جاری است و زیرنویس Q، تقریب، مرتبه دوم را نشان می دهد. باید افزود، پاره ای از تابع ها و از میان آن ها، تغییر مکان های گرهی، متناسب با وارون متغیر طراحی است. از این رو، تقریب درجه دوم بر حسب متغیر وارون به شکل زیر خواهد بود:

$$g_{QR}(x) = g(x_1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_i} (x_i - x_{1i}) \left(\frac{x_{1i}}{x_i} \right) \left(2 - \frac{x_{1i}}{x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_i^2} \right) (x_i - x_{1i})^2 \left(\frac{x_{1i}}{x_i} \right)^2 \quad (25)$$

اینک با کسر رابطه (۲۶) از (۲۵)، می توان نوشت:

$$g_Q - g_{QR} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - x_{1i}}{x_i} \right)^2 \times \left[\left(\frac{\partial g(x_1)}{\partial x_i} \right) (x_i - x_{1i}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_i^2} \right) (x_i^2 - x_{1i}^2) \right] \quad (26)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - x_{1i}}{x_i} \right)^2 \alpha_i$$

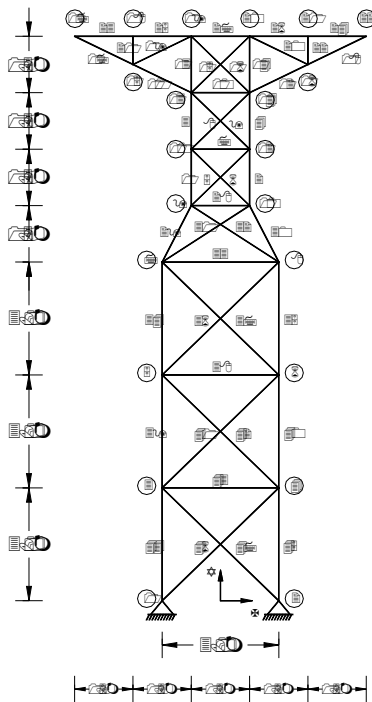
$$\alpha_i = \left(\frac{\partial g(x_1)}{\partial x_i} \right) (x_i - x_{1i}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_i^2} \right) (x_i^2 - x_{1i}^2) \quad (27)$$

بر پایه رابطه (۲۷)، علامت رابطه $g_Q - g_{QR}$ بستگی به عامل α_i دارد. چون $g(x) \leq 0$ است، می توان به نتیجه های زیر رسید:

نسبت به محور y متقارن باشد. بر این پایه، سازه دارای ۲۷ متغیر سطح مقطع و ۱۷ متغیر شکل خواهد بود.

جدول (۱) کرانه بالا و پایین متغیرهای شکل دکل ۴۷ عضوی

متغیر	کرانه پایین cm	کرانه بالا	متغیر شکل	کرانه پایین cm	کرانه بالا cm
X_2	۱۲۵	۳۳۰	Y_4	۲۰۰	۴۰۰
X_4	۱۲۵	۳۳۰	Y_6	۵۰۰	۷۰۰
X_6	۱۲۵	۳۳۰	Y_8	۷۵۰	۹۵۰
X_8	۱۲۵	۳۳۰	Y_{10}	۹۵۰	۱۱۵۰
X_{10}	۲۵	۲۳۰	Y_{12}	۱۱۲۵	۱۳۲۵
X_{12}	۲۵	۲۳۰	Y_{14}	۱۲۷۵	۱۴۷۵
X_{14}	۲۵	۲۳۰	Y_{20}	۱۴۲۵	۱۶۲۵
X_{20}	۲۵	۲۳۰	Y_{21}	۱۴۷۵	۱۶۷۵
X_{21}	۱۲۵	۳۳۰			



شکل (۱) دکل انتقال نیروی ۴۷ عضوی

پس از بهینه کردن خرپا، آشکار شد روش SACA در بهینه‌سازی شکل و سطح مقطع این سازه ناکارآمد است.

ماتریس هسین را در برمی‌گیرند و دارای مقدار c_1 برای متغیر مستقیم و مقدار c_2 برای متغیر وارون است. با استفاده از برابری مقادیر تابع تقریبی و اصلی و هم‌چنین، مشتق‌های آن در دو نقطه طراحی X_1 و X_2 ، می‌توان عامل‌های مجهول α_1, β_1, c_1 و c_2 را به دست آورد.

۷- نمونه‌های عددی

گزینش نمونه‌های عددی به گونه‌ای است که پهنه گسترده‌ای از مسائل را پوشش می‌دهند. سازه‌های مزبور، خرپاهای دو و سه بعدی است. هر سازه با چهار روش تقریبی، خودمتوازن کوژ، ترکیبی مجانب‌ها، درجه دوم محافظه‌کارانه و تقریب سه نقطه‌ای بهینه‌سازی می‌شوند و ویژگی‌های فرایندهای حل، با هم مقایسه می‌شوند. در بهینه‌سازی اندازه، سطح مقطع اعضا، متغیر طراحی است. تابع هدف در تمامی مسائل وزن سازه خواهد بود. در بهینه‌سازی شکل خرپاها، مختصه‌های گرهی، متغیرهای طراحی اختیار می‌شوند. با این کار، رفتار غیرخطی مسئله افزایش می‌یابد. افزون بر این، ترکیب هر دو گونه متغیر طراحی، اندازه و شکل خرپا، سبب پیچیدگی بیش‌تر فرایند حل خواهد شد.

۷-۱- دکل ۴۷ عضوی [۱۴]

به سازه نیروهای افقی 2500 kg در جهت x و نیروهای قائم 6200 kg در جهت y به گره‌های ۱۷ و ۲۲ وارد می‌شود. تنش‌های مجاز کششی و فشاری، مقدار $\sigma = \pm 1400 \text{ kg/cm}^2$ دارند. ضریب کشسانی مصالح، $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ و چگالی مواد $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ، اختیار شده‌اند. کرانه بالا و پایین سطح مقطع اعضا، به ترتیب، 50 cm و 1 cm است. کرانه بالا و پایین متغیرهای شکل در جدول ۱ درج شده‌اند. متغیرهای سطح مقطع به گونه‌ای اختیار می‌شوند تا سازه

با ۹٫۲ تا ۱۰٫۳ درصد اختلاف نسبت به روش MMA-GBMMA2 در جایگاه بعدی قرار دارند. فن TPA برای رسیدن به پاسخ بهینه، زمان کمتری نیاز دارد. باید به خاطر سپرد، روش MMA-GBMMA2 در ۴ مورد نقض قید می‌کند که یک بار ۱۱٪ و در بقیه موارد کم‌تر از ۴٪ است. این نقض قید به این سبب است که توابع قید، تقریبی است و به علت ماهیت روش، پاسخ بهینه به سمت یکی از مجانب‌ها حرکت می‌کند و به علت ناپایداری عددی، توانایی بازگشت ندارد. شکل ۴، تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه را نشان می‌دهد.

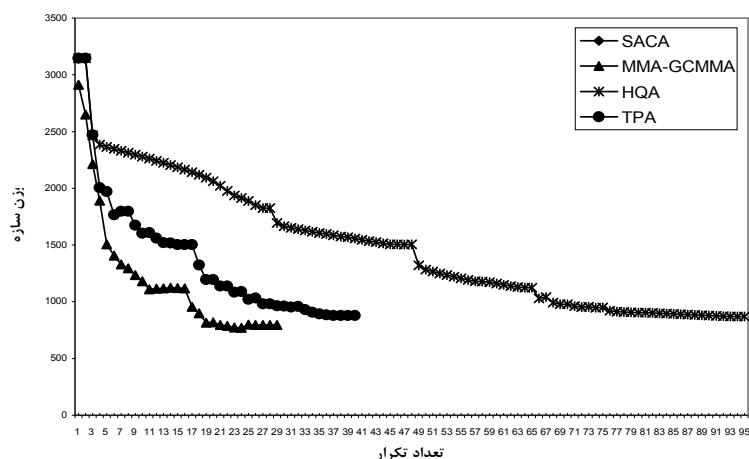
۲-۲- خرابی فضایی ۷۲ عضوی

اینک سازه فضایی چهار طبقه شکل ۳ بهینه‌سازی خواهد شد [۱۶-۱۵]. نیروهای خارجی $P_1=2225\text{kg}$ ، $P_2=2225\text{kg}$ و $P_3=-2225\text{kg}$ ، به ترتیب، در جهت‌های x ، y ، و z به گره ۱۷ وارد می‌شوند. ضریب کشسانی، $E=0.69 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ و چگالی مواد $\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$ است. مقدار محدودیت تنش در کشش و فشار $\sigma = \pm 1700 \text{ kg/cm}^2$ است. کرانه بالا و پایین سطح مقطع عضوها، به ترتیب، 25 cm^2 و 25 cm^2 است. گروه‌بندی عضوهای سازه مانند جدول ۴ است.

جدول (۲) پاسخ بهینه متغیرهای شکل دکل ۴۷ عضوی

متغیرها	SACA	MMA-GBMMA2	HQA	TPA
$X_2(\text{cm})$	****	۱۳۷٫۷۲۰	۱۴۳٫۹۵۰	۱۴۳٫۹۶۰
X_4	****	۱۲۵٫۸۷۰	۱۲۹٫۷۴۰	۱۲۹٫۷۵۰
X_6	****	۱۲۷٫۴۲۰	۱۲۹٫۶۶۰	۱۲۹٫۶۶۰
X_8	****	۱۲۵٫۶۸۰	۱۲۵٫۰	۱۲۵٫۰۱
X_{10}	****	۹۱٫۲۵۰	۵۷٫۳۸۰	۵۷٫۳۸۰
X_{12}	****	۶۰٫۸۲۰	۵۴٫۹۷۰	۵۴٫۹۸۰
X_{14}	****	۷۵٫۱۵۰	۶۲٫۳۵۰	۶۲٫۳۵۰
X_{20}	****	۱۲۶٫۱۲۰	۷۶٫۳۸۰	۷۶٫۳۸۰
X_{21}	****	۳۲۳٫۲۶۰	۲۲۴٫۹۷۰	۲۲۴٫۹۷۰
Y_4	****	۲۹۷٫۴۸۰	۳۰۰٫۰۳۰	۳۰۰٫۰۳۰
Y_6	****	۶۰٫۸۲۱۰	۶۰٫۰	۶۰٫۰
Y_8	****	۹۱۳٫۳۰	۸۹۷٫۹۰	۸۹۷٫۹۰
Y_{10}	****	۱۱۸۵٫۰	۱۰۵۲٫۱۰	۱۰۵۲٫۱۰
Y_{12}	****	۱۲۸۶٫۷۰	۱۱۹۹٫۹۰	۱۱۹۹٫۹۰
Y_{14}	****	۱۴۱۰٫۹۰	۱۳۵۳٫۴۰	۱۳۵۳٫۴۰
Y_{20}	****	۱۵۰۱٫۳۰	۱۴۸۱٫۹۰	۱۴۸۱٫۹۰
Y_{21}	****	۱۵۳۳٫۷۰	۱۴۹۱٫۴۰	۱۴۹۱٫۴۰
وزن کل سازه (kg)	****	۷۹۶٫۲۱۰	۸۶۹٫۷۲۰	۸۷۸٫۶۸۰
تعداد تکرار	****	۲۹	۹۵	۴۰
زمان اجرا (SEC)	****	۳۵	۴۷۰	۲۵

از این رو، در جدول‌های ۲ و ۳ به‌جای نتیجه‌های شیوه SACA ستاره قرار دارند. راهکار MMA-GBMMA2، کم‌ترین وزن سازه را نشان می‌دهد. فن‌های HQA و TPA،



شکل (۲) تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه دکل ۴۷ عضوی

جدول (۴) گروه‌بندی عضوهای خرابای فضایی ۷۲ عضوی

گروه	شماره عضو	گروه	شماره عضو
۱	۱،۲،۳،۴	۹	۳۷،۳۸،۳۹،۴۰
۲	۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲	۱۰	۴۱،۴۲،۴۳،۴۴،۴۵،۴۶،۴۷،۴۸
۳	۱۳،۱۴،۱۵،۱۶	۱۱	۴۹،۵۰،۵۱،۵۲
۴	۱۷،۱۸	۱۲	۵۳،۵۴
۵	۱۹،۲۰،۲۱،۲۲	۱۳	۵۵،۵۶،۵۷،۵۸
۶	۲۳،۲۴،۲۵،۲۶،۲۷،۲۸،۲۹،۳۰	۱۴	۵۹،۶۰،۶۱،۶۲،۶۳،۶۴،۶۵،۶۶
۷	۳۱،۳۲،۳۳،۳۴	۱۵	۶۷،۶۸،۶۹،۷۰
۸	۳۵،۳۶	۱۶	۷۱،۷۲

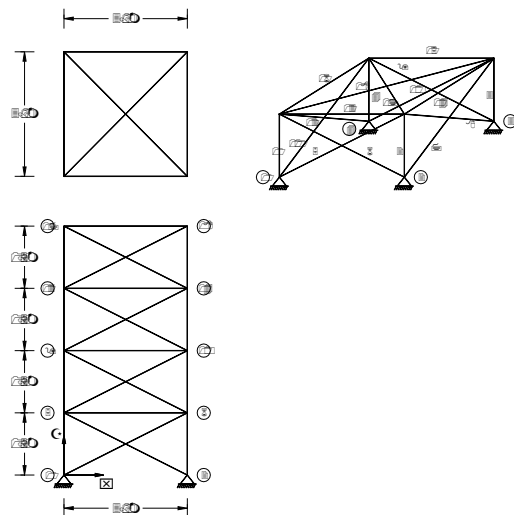
پاسخ بهینه این خرابا در جدول ۵ نشان داده شده. فن MMA-GBMMA2 در مقایسه با سایر راهکارها، مقدار بهینه به مراتب کم‌تری دارد. هم‌چنین، نقض قیدی به وجود نمی‌آید. زمان رسیدن به پاسخ بهینه در روش TPA کمینه و در روش HQA بیشینه است. شکل ۴، تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه است. باید آگاه بود دو شیوه HQA و TPA، رفتاری بسیار مشابه از خود نشان داده‌اند.

جدول (۵) پاسخ بهینه خرابای فضایی ۷۲ عضوی

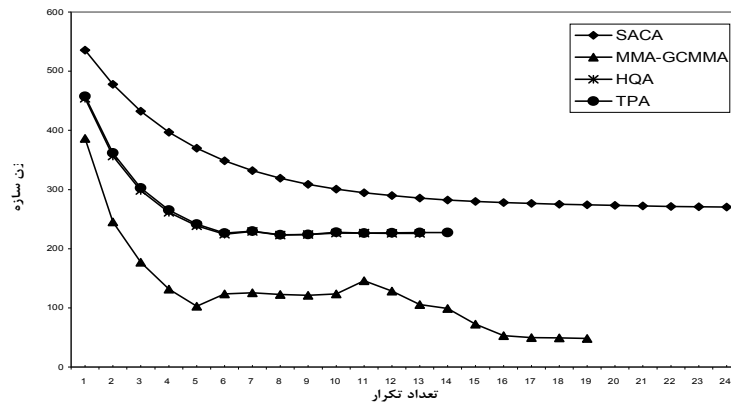
متغیرها	SACA	MMA-GBMMA2	HQA	TPA
A_1 (cm ²)	۸،۲۰۷۳	۲،۹۷۴۷	۷،۸۷۱	۷،۸۷۴
A_2	۱،۹۹۶۱	۰،۵۲۰	۰،۵۰۷	۰،۵۰۹
A_3	۶،۴۲۳۲	۰،۵۰	۰،۷۵	۰،۷۵۷
A_4	۷،۴۶۶۷	۰،۵۰	۶،۹۹۱	۶،۹۹۸
A_5	۸،۲۰۵۵	۱،۴۸۷۷	۷،۸۷۲	۷،۸۷۵
A_6	۱،۹۹۷۵	۰،۵۱۵۲	۰،۶۲۸	۰،۶۴۷
A_7	۶،۴۲۳۵	۰،۵۰۴۶	۰،۷۵۱	۰،۷۵۶
A_8	۷،۴۶۶۴	۰،۵۲۳۵	۶،۹۸۹	۶،۹۹۷
A_9	۸،۲۰۴۹	۱،۸۹۸۷	۷،۸۷۲	۷،۸۷۴
A_{10}	۱،۹۹۵۹	۰،۶۳۹۷	۰،۹۲۹	۰،۹۴۸
A_{11}	۶،۴۲۴۷	۰،۵۰۰۶	۰،۷۵۲	۰،۷۵۷
A_{12}	۷،۴۶۲۹	۰،۵۱۷۳	۶،۹۹	۶،۹۹۹
A_{13}	۸،۲۰۶۲	۱،۱۰۸۲	۷،۸۷۲	۷،۸۷۵
A_{14}	۱،۹۹۶۶	۱،۲۱۶۷	۱،۴۷۹	۱،۶۴۸
A_{15}	۶،۴۳۰۵	۱،۱۶۷۱	۶،۹۶۸	۶،۹۷۷
A_{16}	۷،۴۵۸۶	۰،۶۵۵۰	۶،۹۸۶	۷،۰۰۵
وزن کل سازه (Kg)	۳۷۰،۴۹۰	۴۸،۱۲۳۰	۲۲۵،۷۱	۲۳۷،۴۶
تعداد تکرار	۲۴	۱۹	۱۳	۱۴
زمان اجرا (SEC)	۱۸	۱۱	۱۹	۶

جدول (۳) پاسخ بهینه سطح مقطع عضوهای دکل ۴۷ عضوی

متغیرها	SACA	MMA-GBMMA2	HQA	TPA
A_1 (cm ²)	****	۲۳،۳۴۸۰	۲۵،۰	۲۵،۰
A_2	****	۳،۹۶۳۳	۳،۲	۱،۸۰
A_3	****	۱،۰۴۱۸	۱۴،۱۵۷۰	۸،۲۵۸۱
A_4	****	۱۹،۸۵۰	۲۱،۵۰	۲۱،۵۰
A_5	****	۳،۰۰۳۴	۳،۷۰	۳،۶۰
A_6	****	۱،۰۰۵۴	۱۴،۱۶۸	۸،۲۹۰۸
A_7	****	۱۷،۰۲۱۰	۱۷،۰	۱۷،۱۰
A_8	****	۳،۷۵۹۲	۳،۳	۳،۴۰
A_9	****	۱،۱۹۷۶	۱۴،۸۵۴۰	۹،۳۷۷۵
A_{10}	****	۱۸،۸۳۸۰	۱۶،۵۰	۱۹،۷
A_{11}	****	۱،۱۱۶۷	۴،۵۰	۵،۵۰
A_{12}	****	۳،۲۷۸۵	۲۸،۱۸۹۰	۲۵،۹۵۴۰
A_{13}	****	۲،۰۶۲۲۰	۱۴،۳۰	۱۸،۲۰
A_{14}	****	۸،۲۹۸۳	۳،۰۸۲۹	۳،۷۰
A_{15}	****	۱۲،۰۱۴۰	۲۸،۵۵۹۰	۲۶،۵۳۹۰
A_{16}	****	۱۴،۹۱۳۰	۱۰،۵۹۴۰	۱۲،۳۰
A_{17}	****	۱۵،۸۳۸۰	۳،۸۰	۵،۸۰
A_{18}	****	۱۶،۹۸۲۰	۲۷،۴۵۸۰	۲۴،۷۳۴۰
A_{19}	****	۱۵،۶۸۹۰	۱۱،۲۰	۱۴،۵۰
A_{20}	****	۱۴،۰۶۱۰	۱۴،۲۲۹۰	۸،۳۵۰۹
A_{21}	****	۳،۱۷۲۱	۲،۵۵۵۱	۴،۰
A_{22}	****	۱۸،۹۳۲۰	۲۵،۳۷۸۰	۲۱،۳۰۶۰
A_{23}	****	۱۱،۰۷۷۰	۸،۹۷۱۷	۱،۰۰۹۳
A_{24}	****	۹،۲۳۲۹	۱۱،۳۵۵۰	۱۵،۰
A_{25}	****	۸،۶۶۶۲	۲۶،۸۴۱۰	۲۳،۷۴۹۰
A_{26}	****	۱۲،۲۶۳۰	۱۱،۵۰	۱۳،۶۰
A_{27}	****	۷،۳۵۸۷	۱۲،۰۹۴۷	۱۴،۸۰



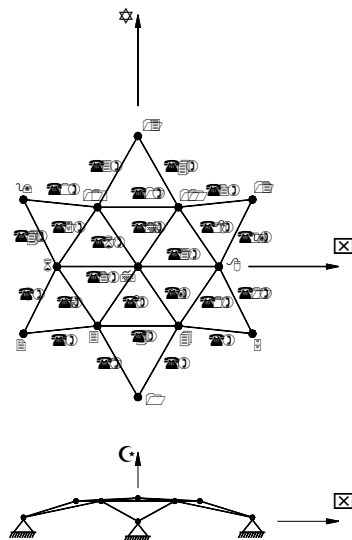
شکل (۳) خرابای فضایی ۷۲ عضوی



شکل (۴) تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه خرپای ۷۲ عضوی

جدول (۷) گروه‌بندی عضوهای گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

گروه	شماره عضو
۱	۲۴، ۲۳، ۲۱، ۱
۲	۲۲، ۲۰، ۵، ۳
۳	۲۱، ۴
۴	۱۹، ۱۴، ۱۱، ۶
۵	۱۸، ۱۵، ۱۰، ۷
۶	۱۷، ۱۶، ۹، ۸
۷	۱۳، ۱۲



شکل (۵) گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

پاسخ بهینه این سازه مانند جدول ۸ است. فن MMA-GBMMA2، پاسخ بهینه مناسب‌تری را نسبت به سایر

۳-۷- گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

در ادامه کار، طرح بهینه خرپای ۲۴ عضوی شکل ۵ پیدا خواهد شد [۱۷]. سازه، زیر اثر نیروی $F_z = -1000 \text{ kg}$ که به گره‌های ۱۰، ۸، ۷، ۶، ۴، ۳ و ۱۱ وارد می‌شود، قرار دارد. ضریب کشسانی، $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ و چگالی مواد، kg/m^3 ضریب کششی و فشاری $\rho = 7860$ است. مقدار تنش مجاز کششی و فشاری $\sigma = \pm 1400 \text{ kg/cm}^2$ است. کرانه بالا و پایین متغیرهای سطح مقطع عضوها، به ترتیب، 10 cm^2 و 1 cm^2 است. مختصه‌های گرهی و گروه‌بندی عضوهای خرپا در جدولهای ۶ و ۷ آمده است.

جدول (۶) مختصات گرهی گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

گره	x(cm)	Y(cm)	Z(cm)
۱	۰	-۵۰۰	۰
۲	-۴۵۰	-۲۵۰	۰
۳	-۱۵۰	-۲۱۶/۵	۶۲/۱۶
۴	۱۵۰	-۲۱۶/۵	۶۲/۱۶
۵	۴۵۰	-۲۵۰	۰
۶	۳۰۰	۰	۶۲/۱۶
۷	۰	۰	۸۲/۱۶
۸	۳۰۰	۰	۶۲/۱۶
۹	-۴۵۰	۲۵۰	۰
۱۰	-۱۵۰	۲۱۶/۵	۶۲/۱۶
۱۱	۱۵۰	۲۱۶/۵	۶۲/۱۶
۱۲	۴۵۰	۲۵۰	۰
۱۳	۰	۵۰۰	۰

۸- نتیجه‌گیری

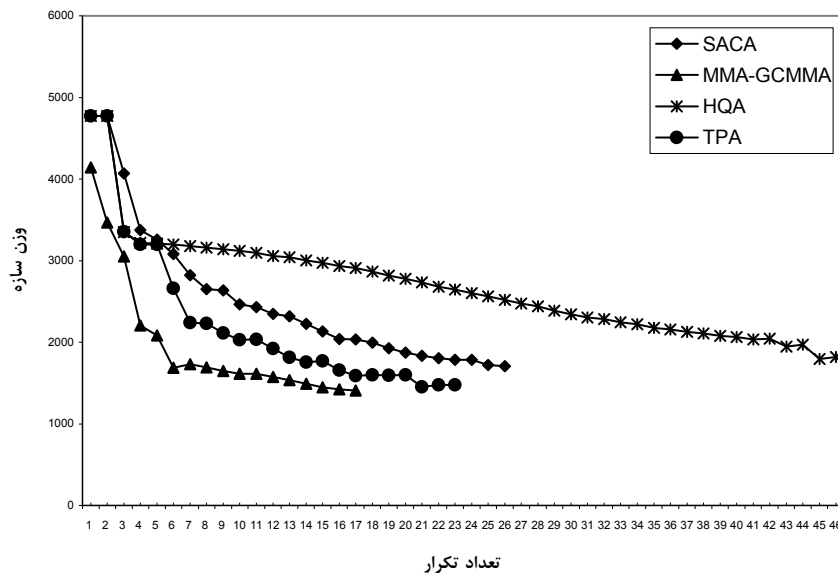
با بهینه‌سازی خرپاهای گوناگون، که شماری از آن‌ها در این مقاله آمدند، ویژگی‌های چهار فن تقریبی، در دسترس قرار گرفتند. همه روش‌ها پس از آغاز خودکار هستند و نیازی به ورود تحلیلگر در چرخه‌های فرایند ندارند. پاسخ‌های برنامه نویسندگان در حد جواب‌های مرجع‌ها است. در مقایسه این راهکارها، جنبه‌های گوناگونی قابل بررسی است. در ادامه کار، به پاره‌ای از توانایی‌ها و کاستی‌های این شیوه‌های تقریبی به طور خلاصه پرداخته می‌شود.

۱- پاسخ بهینه: چون پاسخ بهینه هدف اصلی برنامه بهینه‌سازی نویسندگان است، بنابراین، مهم‌ترین جنبه مقایسه، توانایی رسیدن به پاسخ درست خواهد بود. از این میان، فن MMA-GBMMA2 بهترین گزینه است. هر چند راهکارهای HQA و TPA تفاوت آشکاری با هم ندارند، با این وجود، شیوه TPA از این دیدگاه کمی بهتر از روش HQA است. از نظر توانایی رسیدن به پاسخ درست، فن SACA در جایگاه چهارم قرار می‌گیرد.

روش‌ها به دست می‌دهد. روش HQA با ۹٫۲٪ اختلاف، در جایگاه بعدی قرار دارد. از دیدگاه زمان بهینه‌سازی، تمامی شیوه‌ها، رفتاری مشابه نشان می‌دهند. شایان توجه است، روش MMA-GBMMA2 در ۴ مورد قیدها را برقرار نمی‌کند. باید افزود، این اختلاف مقدار بیشینه، ۲٪ دارد. تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه در شکل ۶ آمده است.

جدول (۸) پاسخ بهینه گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

متغیرها	SACA	MMA-GBMMA2	HQA	TPA
A_1 (cm ³)	۲,۲۶۷۴	۲,۱۶۶۴	۲,۱۶۷	۱,۵۱۶
A_2	۲,۷۸۵۹	۲,۳۴۳۶	۳,۰	۲,۹۹۱
A_3	۴,۸۲۴۷	۱,۰۱۴۱	۱,۰۵۴	۵,۳۵۰
A_4	۲,۶۸۳۶	۱,۸۶۴۵	۲,۰۳۹	۲,۰۰۲
A_5	۳,۱۸۷۴	۱,۰۲۲۵	۱,۰۰۹	۱,۳۴۹
A_6	۳,۱۷۵۹	۱,۸۹۷۹	۱,۹۶۳	۱,۶۳۵
A_7	۴,۸۱۹۳	۱,۲۱۷۴	۱,۲۸۵	۳,۷۷۵
وزن کل سازه (Kg)	۱۷۴,۵۱۰	۹۷,۱۹۱۰	۱۰۶,۱۴	۱۳۱,۱۵
تعداد تکرار	۱۱	۱۹	۶	۱۳
زمان اجرا (SEC)	۱	۱	۱	۱



شکل (۶) تاریخچه همگرایی پاسخ بهینه گنبد خرپایی ۲۴ عضوی

هم‌زمان ندارند. از سوی دیگر، فن MMA-GBMMA2، نقطه بهینه کلی را به دست می‌آورد و توانایی به کارگیری هر دو نوع متغیر طراحی را به طور هم‌زمان دارد.

۶- برنامه رایانه‌ای: فرایند بهینه‌سازی و برنامه رایانه‌ای وابسته به این چهار راهکار تقریبی، تفاوت کمی با هم دارند. فن TPA به ساده‌ترین برنامه نیازمند است. راهکارهای HQA، SACA و MMA-GBMMA2 در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند.

۷- ویژگی کلی: سه شیوه خود متوازن کوژ، درجه دوم محافظه‌کارانه و سه نقطه‌ای، به تقریب هر چه دقیق‌تر تابع‌های محدودیت می‌پردازند و از یک روش عددی برای یافتن پاسخ بهینه بهره می‌برند. از سوی دیگر، روش ترکیبی مجانب‌ها، با تقریب ساده‌ای، تابع‌های محدودیت و هدف را حساب می‌کند و حل کلی، دقیق و ریاضی پاسخ بهینه را در دسترس قرار می‌دهد. در این مقاله آشکار شد که روش‌های ساده‌ای که بهینه کلی را در دسترس می‌گذارند، برتر از راهکارهای پیچیده و دقیقی هستند که پاسخ بهینه را با فن‌های عددی حساب می‌کنند. به سخن دیگر، اهمیت روش یافتن پاسخ بهینه، کم‌تر از تقریب تابع نیست، چه بسا با تغییر روش یافتن پاسخ بهینه، بتوان کارآمدی سه روش TPA، HQA، SACA را افزایش داد. در مراجع [۶-۷] روشی برای حل مسئله بهینه درج نشده است، حال آن‌که بر اساس نتایج به دست آمده، شیوه حل مسئله بسیار با اهمیت است. یادآوری می‌کند برای آشکار شدن ویژگی‌های تحلیل، از روش بهینه‌سازی یکسانی (تابع تاوان داخلی) برای همه راهکارها بهره‌جویی شد.

۹- منابع

[1] Chung T.T., Chiou C.H.; "Self-Adjusted Convex Approximation Method for Structural Optimization", Computers and Structures; Vol. 79, 2001, pp 665-672

۲- زمان: شیوه TPA کم‌ترین زمان تحلیل را نیاز دارد. فن MMA-GBMMA2 از دیدگاه زمان‌بری در جایگاه بعدی قرار می‌گیرد. سپس، راهکار SACA قرار دارد. روش HQA نیازمند بیش‌ترین زمان رایانه برای یافتن طرح بهینه است. باید آگاه بود، رایانه‌های امروزی سرعت بالایی دارند و تفاوت زمان تحلیل تنها در بهینه‌سازی سازه‌های بسیار بزرگ، چشمگیر خواهد بود.

۳- نوسان: ویژگی اصلی روش SACA، جلوگیری از نوسان پاسخ‌ها است. این ویژگی به خوبی در نمودارهای تاریخچه‌های همگرایی نیز آشکار است. از این دیدگاه، راهکارهای HQA و TPA، به ترتیب، در جایگاه‌های دوم و سوم قرار می‌گیرند. فن MMA-GBMMA2، هنگامی که برنامه از تقریب MMA بهره می‌برند، امکان قرار گرفتن نقطه بهینه بر یکی از دو مجانب را افزایش می‌دهد. این گرایش به سوی مجانب، امکان نوسان پاسخ‌های فرایند را افزایش می‌دهد.

۴- پایداری فرایند حل: فن TPA به سبب رابطه‌های ساده ریاضی برای به حداقل رساندن تقریب‌های عددی، مطلوب‌ترین پایداری عددی را دارد. باید افزود، سه فرایند تقریبی دیگر، از این جنبه رفتار مشابهی نشان می‌دهند. هر کدام از این سه روش کاستی‌هایی را در طول اجرای برنامه رایانه‌ای دارند. به سخن دیگر، فرایند حل بدون دست‌یابی به پاسخ چرخه و برقرار معیار همگرایی می‌ایستد.

۵- تنوع متغیر: بیش‌تر شیوه‌های حل مسائل بهینه‌سازی، بر پایه مشتق تابع‌ها نسبت به متغیرهای طراحی استوارند. باید دانست، حساسیت تابع هدف و محدودیت‌ها نسبت به متغیرهای سطح مقطع عضوها در مقایسه با متغیرهای شکل خریاها، بسیار بیش‌تر است. بنابراین، روش‌های TPA، HQA و SACA که با تابع تاوان داخلی، نقطه بهینه را پیدا می‌کنند، توانایی به کار بردن هر دو نوع متغیر طراحی را به طور

- 64, 1997, pp. 89-95.
- [13] Zhang W.H., Fleury C., Duysinx P.; "A Generalized Method of Moving Asymptotes (G MMA) Including Equality Constraints", *Structural Optimization*, Vol. 12, 1996, pp. 143-146.
- [14] Salajegheh E., Vanderplaats G.n.; "Optimum Design of Trusses with Discrete Sizing and Shape Variables", *Structural Optimization*, Vol. 6, 1993, pp. 79-85.
- [15] Adeli H., Cheng N. T.; "Augmented Lograngian Genetic Algorithm for Structural Optimization", *J. Aerosp. Engrg., ASCE*. Vol. 7, No. 1, 1994, pp. 104-118.
- [16] Wu S. J., Chow P. T.; "Steady-State Genetic Algorithms for Discrete Optimization of Trusses", *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 6, 1995, pp. 979-991.
- [17] Ohsaki M., Arora J.S.; "A Direct Application of Higher-Order Parametric Programming Techniques to Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 1993, pp. 2683-2702.
- [2] Chung T.T., Chiou C.H.; "Structural Shape Optimization Using Self-Adjusted Convex Approximation", *Structural Multidisciplinary Optimization*; Vol. 24, 2002, pp. 218-224.
- [3] Svanberg K.; "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 24, 1987, pp. 359-373.
- [4] Bruyneel M., Duysinx P., Fleury,C.; "A Family of MMA Approximations for Structural Optimization", *Structural Multidisciplinary Optimization*; Vol. 24, 2002, pp. 263-276.
- [5] Bruyneel M., Fleury C.; "Composite Structures Optimization Using Sequential Convex Programming", *Advances in Engineering Software*; Vol. 33, 2002, pp. 697-711.
- [6] Salajegheh E., Salajegheh J.; "Optimum Design of Structures with Discrete Variables Using Higher Order Approximation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, 2002, pp. 1395-1419.
- [7] Guo X., Yamazaki K., Cheng G.D.; "A New Three-Point Approximation Approach for Design Optimization Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001, pp. 869-884.
- [8] Fleury C.; "Conlin:An Efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp. 81-89.
- [9] Fleury C., Braibant V.; "A New Dual Method Using Mixed Variables", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp. 409-428.
- [10] Svanberg K.; "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp. 359-373.
- [11] Zhang W.H., Domaszewski M., Fleury C.; "A New Mixed Convex Approximation Method with Applications for Truss Configuration Optimization", *Structural Optimization*, Vol. 15, 1998, pp. 237-241.
- [12] Zhang W.H., Fleury C.; "A Modification of Convex Approximation Methods for Structural Optimization", *Computers and Structures*, Vol.