

## طراحی پی با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژیک

حمید محرمی<sup>۱</sup>، فاطمه زاهدی تجریشی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشیار دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشجوی دکترای سازه دانشگاه صنعتی بابل

f.zaheditajrishi@stu.nit.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۲۰

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۰/۱۴

**چکیده** - در این مقاله، طراحی بهینه پی با استفاده هم‌زمان از بهینه‌سازی توپولوژیک و بهینه‌سازی ابعادی بررسی شده است. مدل استفاده‌شده، از المان‌های صفحه‌ای برای پی گسترده، المان‌های حجمی برای خاک و المان‌های فشاری برای اتصال خاک و پی تشکیل شده است. تحلیل و طراحی به صورت الاستیک و سه‌بعدی تحت یک بارگذاری معین انجام می‌شود. با توجه به وابستگی تعداد متغیرهای طراحی به تعداد المان‌های محدود در فضای طراحی (که معمولاً زیاد است)، استفاده از روش‌های کلاسیک در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها عملی است. از این رو در این مقاله از روشی نوین برای ایجاد توپولوژی بهینه استفاده می‌شود که ایده اصلی آن بر پایه‌ی کارایی المان‌های واسط بین خاک و پی در انتقال نیروهای فشاری به خاک است. این الگوریتم جدید، المان‌هایی از پی که تحت فشار اندک یا صفر قرار دارند را حذف می‌کند. بهینه‌سازی کلی از دو فاز مجزای بهینه‌سازی توپولوژیک و بهینه‌سازی ابعادی تشکیل شده است. بهینه‌سازی ابعادی شامل تعیین ضخامت و درصد آرماتورهای خمشی بهینه پی است. روند بهینه‌سازی ابعادی و توپولوژی در پی هم تکرار می‌شود تا دیگر پیشرفتی در بهینه‌سازی بوجود نیاید. کارایی روش پیشنهادشده در این مقاله با حل چهار نمونه عددی بررسی شده است.

**واژگان کلیدی** - طراحی پی، بهینه‌سازی توپولوژیک، راستای قابل قبول، المان‌های واسط فشاری

### ۱- مقدمه

هم هزینه آن کمینه باشد و هم محدودیت‌های نشست و

تنش و غیره را ارضاء کند.

طراحی بهینه یک سازه به سه مرحله کلی بهینه‌سازی ابعادی، شکل و توپولوژی تقسیم می‌شود [۱]. نخستین تحقیقات درباره‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها روی بهینه‌سازی ابعاد متمرکز شد. برای نمونه، پیدا کردن ابعاد بهینه سطح مقطع عضوهای یک خرپا یا یک قاب از این دسته هستند. با پیشرفت روش‌های بهینه‌سازی با استفاده از بهینه‌سازی شکل، سعی در یافتن مرزهای بهینه یک سازه شد. پیدا

یکی از قسمت‌های مهم و اساسی سازه، پی آن است که وظیفه‌ی تحمل نیروهای وارد از سازه و کنترل نشست‌های آن را بر عهده دارد. در طراحی پی، متغیرهای زیادی دخالت دارند و ترکیب‌های مختلفی از این متغیرها می‌توانند ضوابط تنش و نشست را دربر گیرند. به بیان دیگر، طراحی پی می‌تواند چندین جواب قابل قبول داشته باشد که البته از نظر هزینه با هم متفاوت هستند. در این صورت با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی می‌توان پی را چنان طرح کرد که

مسئله را پهلوان [۳] با بررسی نشست خاک زیر پی برج میلاد نشان داده است.

در این مقاله، خاک زیر پی، خاک درشت‌دانه شمال تهران که خاک نسبتاً سختی است، فرض شده است؛ در نتیجه، رفتار خاک به صورت خطی در نظر گرفته شده و مدول الاستیسیته آن با توجه به میزان سختی یا نرمی خاک تعیین شده است.

## ۲-۲- مدل کردن محیط خاک

برخی از محققین، محیط خاک را به صورت فنرهای جدا و مستقل از هم مدل کرده‌اند که به آن "مدل وینکلر" گفته می‌شود [۴] و مهم‌ترین نقص آن مستقل بودن فنرها از هم است. برخی دیگر برای رفع این مشکل، مدل وینکلر را با یک عنصر سازه‌ای دیگر مدل کرده‌اند که به آن‌ها "مدل‌های چند پارامتری" می‌گویند [۵]. افراد دیگری نیز در پژوهش خود، محیط خاک را به صورت یک محیط پیوسته فرض کرده و آن را با روش اجزای محدود مدل کرده‌اند [۶، ۷]. با توجه به این که مدل‌سازی خاک به صورت یک محیط پیوسته، نتایج بهتر و نزدیک به واقعیت‌تری به دست می‌دهد، در این پژوهش، محیط خاک به صورت یک محیط پیوسته سه‌بعدی مدل شده است.

برای تحلیل سامانه نیز روش‌های متعددی همانند روش اجزای محدود، تلفیق روش اجزای محدود و اجزای مرزی و تلفیق روش اجزای محدود و اجزای نامحدود وجود دارد. در این مقاله، کل سامانه (خاک + پی) به وسیله المان‌های محدود مدل می‌شوند.

## ۲-۳- بهینه‌سازی پی

به خاطر ریسک‌پذیر نبودن، معمولاً پی به صورت محافظه‌کارانه طراحی می‌شود و از اینرو و تاکنون تحقیقات زیادی در مورد بهینه‌سازی پی‌ها انجام نشده است. اولین

کردن مرزهای بهینه سازه‌ای که با فرضیات تنش مسطح مدل شده، نمونه‌ای از این نوع بهینه‌سازی است. در مسائل بهینه‌سازی ابعاد و شکل، مرزهای فضای طراحی ثابت نیستند اما توپولوژی فضای طراحی ثابت است. بنابراین برای طرح یک سازه بهینه، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی ابعادی و شکل کافی نبوده و لازم است که توپولوژی بهینه‌ی فضای طراحی معلوم باشد. از این رو بهینه‌سازی توپولوژیک به عنوان سومین دسته از روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها و اولین مرحله در یافتن سازه بهینه معرفی شد. پس برای به دست آوردن یک طرح مهندسی بهینه لازم است ابتدا توپولوژی سازه با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژیک مشخص شود و سپس با بهینه‌سازی شکل و ابعاد، مشخصات هندسی دقیق و بهینه آن تعیین شود.

در این مقاله، طراحی پی‌های گسترده انعطاف‌پذیر به صورت بهینه انجام می‌شود تا در نهایت، شکل بهینه پی با ضخامت و آرماتورهای بهینه یافت شود. ابتدا تاریخچه تحقیقات انجام‌شده در این زمینه بررسی و سپس با مدل‌سازی مناسب و تلفیق روش بهینه‌سازی توپولوژیک و ابعادی، کد برنامه بهینه‌سازی پی گسترده تهیه شده و در ادامه، کارایی آن با حل چند نمونه عددی بررسی و نتیجه‌گیری شده است.

## ۲- تحقیقات

### ۲-۱- مدل کردن رفتار خاک

محققین، رفتار خاک را به صورت‌های گوناگون مانند الاستیک، غیرخطی، الاستوپلاستیک کامل و یا الاستوپلاستیک با سخت‌شوندگی، فرض کرده‌اند [۲]. اگرچه رفتار خاک حتی به ازای کرنش‌های کوچک، الاستیک و برگشت‌پذیر نیست، ولی می‌توان رفتار خاک‌های سخت را به صورت خطی در نظر گرفت. این

معیار بهینگی است [۱]. در این مقاله از روشی نوین برای حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک پی استفاده شده است.

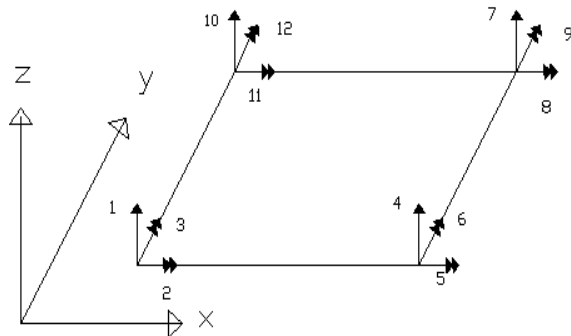
### ۳- مدل‌سازی و تحلیل

برای استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی، لازم است آن را با یک الگوریتم تحلیل سامانه پیوند داد. در این بخش الگوریتم تحلیل الاستیک سامانه، متشکل از خاک + پی + المان‌های واسط (Gap) استفاده‌شده در این برنامه، توضیح داده می‌شود.

#### ۳-۱- مدل اجزای محدود سازه

در برنامه کامپیوتری تهیه‌شده در این مقاله، بخش‌های مختلف سازه به صورت زیر مدل شده است:

- پی گسترده به وسیله‌ی المان‌های صفحه‌ای چهار ضلعی مدل شده است. المان صفحه‌ای، یک المان همگن و ایزوتروپیک است که مطابق شکل ۱، یک درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی دورانی در هر گره دارد. مدل‌سازی المان محدود المان صفحه‌ای بر اساس کار آقای زینکوویچ [۱۵] انجام شده است.



شکل (۱) المان صفحه‌ای خمشی

- اعضای واسط بین پی و خاک به وسیله‌ی المان‌های واسط فشاری با سه درجه آزادی انتقالی در هر گره، مدل شده است. این المان‌ها ظرفیت کششی ندارند و تنها می‌توانند نیروی فشاری را انتقال دهند. وضعیت کلی این المان در

تحقیقات انجام‌شده در این زمینه، به وسیله‌ی کوهلی [۸] در سال ۱۹۶۸ روی پی‌های منفرد انجام شده است. در سال ۱۹۹۳ در مورد بهینه‌سازی پی ماشین‌آلات تحت بارهای هارمونیک، تحقیقاتی به وسیله‌ی زینکوویچ و ویلچینسکی [۹] انجام شد. در سال ۲۰۰۱، پیرو [۱۰] در مورد بهینه‌سازی پی نواری یک دیوار بلند، تحت اثر بار طولی با شدت ثابت، تحقیقاتی انجام داد. در سال ۲۰۰۱، کیم و همکارانش [۱۱] بر نحوه چیدمان شمع‌ها برای کمینه کردن نشست‌های غیریکنواخت پی‌های گسترده کار کردند. در سال ۲۰۰۲، آرورا و همکارانش [۱۲] درباره‌ی بهینه‌سازی پی‌های مرتفع بتن‌آرمه برای ماشین‌آلات تحت ارتعاش تحقیقاتی انجام دادند. طراحی بهینه پی و سازه، هم‌زمان، در سال ۲۰۰۷ به وسیله‌ی آقایان غیرتمند و محرمی [۱۳-۱۴] انجام شد. در این پژوهش، ایشان سعی کردند پی‌های نواری انعطاف‌پذیر و روسازه را با در نظر گرفتن اندرکنش سازه - پی و خاک، بهینه کنند.

#### ۴-۲- بهینه‌سازی توپولوژی

در بهینه‌سازی توپولوژیک، هدف، یافتن بهترین وضعیت قرارگیری ماده برای دربرگیری شرایطی خاص همانند سختی بیشینه و وزن کمینه است. برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها می‌توان از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی استفاده کرد. در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها، تعداد متغیرهای طراحی وابسته به تعداد المان‌های تقسیم‌کننده فضای طراحی است. از آن جا که تعداد المان‌ها در یک مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد است، استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها مشکل است. برای از بین بردن این مشکل روش‌های گوناگونی پیشنهاد شده است که بهترین و معروف‌ترین آن‌ها، روش

## ۲-۳- تحلیل سازه‌ها با عناصر خرپایی بدون ظرفیت کششی

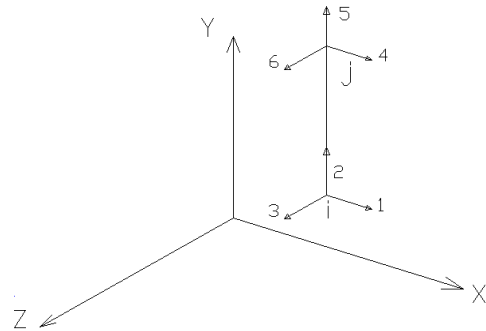
سازه‌هایی که عناصر فقط فشاری یا کششی دارد، به خاطر رفتار دوگانه این اعضا در کشش و فشار، رفتار غیرخطی از خود بروز می‌دهند و تحلیل آن‌ها نیازمند استفاده از روش‌های تحلیل غیرخطی است. معمولاً روش‌های تحلیل غیرخطی سازه نیاز به اصلاح بردار بار و یا ماتریس سختی سازه و سپس حل دستگاه معادلات مربوط طی یک فرایند تکراری چند مرحله‌ای دارد. به همین دلیل، جواب‌های به دست آمده دقیق نیست و تابع تعداد تکرارهای تحلیل است [۱۶]. در این برنامه با کمک روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی کاربرد اصل جمع آثار قوا در تحلیل سازه‌ها از روشی که به وسیله‌ی محرمی و ریاضی [۱۶] توسعه داده شده، استفاده می‌شود. در این روش بدون نیاز به انجام فرایندهای تکراری و بدون تغییر در مدل اولیه سازه و ماتریس سختی آن، می‌توان سازه‌هایی را که عناصر خرپایی با ظرفیت محدود کششی یا فشاری دارند، در یک مرحله ارزیابی کرد و به جواب‌های درست و دقیق رسید [۱۶]. در برنامه تهیه شده در این مقاله، با استفاده از این قابلیت، مسئله uplift در پی، مدل شده و از آن برای بهینه‌سازی توپولوژیک استفاده شده است.

## ۴- فرمول‌بندی طراحی برای بهینه‌سازی

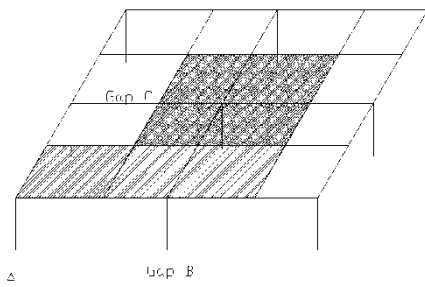
### ۴-۱- مسئله بهینه‌سازی

هر مسئله بهینه‌سازی با تعریف تعدادی پارامتر طراحی، یک تابع ریاضی که بیشینه یا کمینه کردن آن تابع، هدف بهینه‌سازی است و تعدادی شرط، ساخته می‌شود. در این مقاله، هدف به صورت زیر تعریف می‌شود و از روی آن، تابع هدف ساخته می‌شود:

مختصات سه‌بعدی در شکل ۲ نشان داده شده است. در این مقاله، هر المان واسط به تعدادی از المان‌های پی متصل است که حالت‌های مختلف آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

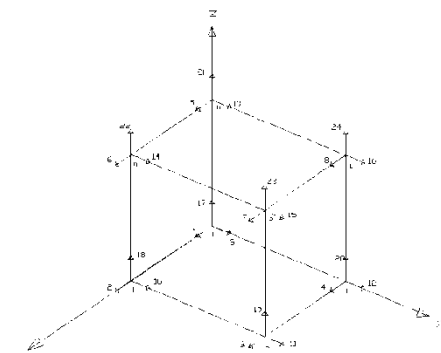


شکل (۲) وضعیت کلی المان Gap سه‌بعدی



شکل (۳) المان‌های واسط و نحوه اتصال آن‌ها به المان‌های پی؛ الف) المان Gap A اتصال در گوشه به یک المان پی، ب) المان Gap B اتصال در کنار به دو المان پی، ج) المان Gap C اتصال در وسط به چهار المان پی

• محیط پیوسته خاک زیر پی به وسیله‌ی المان‌های آجری هشت‌گره‌ای که در هر گره، سه درجه آزادی انتقالی دارد، مدل شده است. این المان در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴) المان آجری

#### ۴-۴-۴- قیدها

قیدهای هر مسئله بهینه‌سازی، چهارچوب رسیدن به تابع هدف بهینه را تعیین می‌کنند. در این جا، قیود مسئله عبارتند از قیود لنگر خمشی، نیروی برشی و تنش فشاری زیر پی. همچنین قیود اندازه‌ای شامل حدود بالا و پایین آرماتورهای کششی و ارتفاع پی بر اساس آیین‌نامه و مسائل اجرایی نیز در مسئله به عنوان قیود رعایت می‌شوند.

#### ۴-۴-۱- قید لنگر خمشی در پی

مبحث نهم مقررات ملی ساختمان لازم می‌داند که در هر مقطع از یک عضو بتنی تحت لنگر خمشی رابطه (۱) برقرار باشد [۱۷]:

$$\frac{M_u}{M_r} \leq 1 \quad (1)$$

$M_u$  لنگر خمشی ضریب‌دار وارد بر مقطع و  $M_r$  ظرفیت خمشی اسمی مقطع است.

#### ۴-۴-۲- قید نیروی برشی در پی

بر اساس مبحث نهم مقررات ملی ساختمان، در هر مقطع از یک عضو بتنی تحت نیروی برشی باید رابطه (۲-۴) برقرار باشد [۱۷]:

$$\frac{V_u}{V_r} \leq 1 \quad (2)$$

$V_u$  نیروی برشی ضریب‌دار وارد بر مقطع و  $V_r$  ظرفیت برشی اسمی مقطع است.

#### ۴-۴-۳- قید تنش فشاری زیر پی

ابعاد پی باید به گونه‌ای طراحی شود که تنش فشاری زیر پی از تنش مجاز خاک بیشتر نشود. در این پژوهش، المان‌های پی به وسیله المان‌های واسط فقط فشاری به

هدف بهینه‌سازی: تعیین توپولوژی بهینه پی گسترده به گونه‌ای که با منظور کردن سطح مقطع آرماتورهای خمشی و ضخامت بهینه پی، هزینه ساخت پی تحت یک بارگذاری مشخص به کمترین مقدار برسد.

#### ۴-۲- متغیرهای طراحی

در این مقاله، متغیرهای طراحی استفاده شده شامل ارتفاع پی، سطح مقطع آرماتورهای خمشی مثبت و منفی پی و بود یا نبود المان‌های پی است. همه المان‌های پی جزء متغیرهای طراحی نیستند؛ بلکه المان‌هایی که مرزهای پی را مشخص می‌کنند یا تحت بارگذاری قرار می‌گیرند جزء پارامترهای ثابت مسئله هستند و قابل حذف شدن نیستند.

#### ۴-۳- تابع هدف

در این پژوهش، تابع هدف مسئله بهینه‌سازی، کمترین هزینه است که برابر مجموع هزینه‌های بتن و آرماتور است. برای محاسبه این هزینه‌ها به صورت زیر عمل می‌شود.

$C_c$  هزینه واحد حجم بتن،  $C_s$  هزینه واحد حجم فولاد،  $nef$  تعداد المان‌های پی موجود در هر مرحله بهینه‌سازی،  $A_{xj}^+$  مساحت آرماتورهای مورد نیاز در راستای  $x$  برای تحمل لنگر مثبت موجود در المان  $j$  ام،  $A_{xj}^-$  مساحت آرماتورهای مورد نیاز در جهت  $x$  برای تحمل لنگر منفی موجود در المان  $j$  ام،  $A_{yj}^+$  مساحت آرماتورهای مورد نیاز در راستای  $y$  برای تحمل لنگر مثبت موجود در المان  $j$  ام،  $A_{yj}^-$  مساحت آرماتورهای مورد نیاز در راستای  $y$  برای تحمل لنگر منفی موجود در المان  $j$  ام،  $w_j$  عرض المان  $j$  ام پی و  $h$  ارتفاع پی است.

تنش‌ها هستند.  $Ncon$  تعداد قیدها،  $Ndv$  تعداد متغیرهای طراحی و  $l, u$  نمادهای حدود بالا و پایین متغیرهای طراحی هستند.

## ۵- روش حل مسئله بهینه‌سازی

### ۵-۱- الگوریتم بهینه‌سازی

به طور کلی مسئله طرح بهینه پی گسترده در این پژوهش تلفیقی از دو قسمت زیر است:

- تعیین توپولوژی بهینه پی
  - تعیین ضخامت پی و آرماتورهای بهینه آن
- مراحل حل این مسئله بهینه‌سازی را می‌توان در گام‌های زیر خلاصه کرد:

۱. پارامترهای ثابت مسئله و هندسه مدل شامل مختصات گره‌ها، المان‌ها (پی + خاک + المان‌های واسط)، درجات آزادی، شرایط مرزی، بارگذاری، مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و غیره تعریف می‌شود؛
۲. مقادیر اولیه برای متغیرهای طراحی تعریف و حدود بیشینه و کمینه این مقادیر تعیین می‌شود.
۳. مدل با استفاده از المان‌ها و متغیرهای موجود تحلیل می‌شود و تغییر مکان‌ها و نیروهای داخلی المان‌ها از جمله ممان‌های خمشی و نیروهای برشی المان‌های صفحه‌ای پی محاسبه می‌شود؛
۴. مقادیر آرماتورها با استفاده از روابط طراحی برای ضخامت مفروض پی و با توجه به لنگرهای به‌دست‌آمده محاسبه می‌شود؛
۵. مسئله استاندارد بهینه‌سازی شامل تابع هدف، متغیرهای طراحی، قیود، آنالیز حساسیت و ... تعریف می‌شود؛
۶. ضخامت پی و مقادیر آرماتورها به عنوان متغیرهای اولیه به روند بهینه‌سازی داده می‌شود تا با استفاده از روش، جهت‌های قابل قبول و با توجه به تابع هدف، مقادیر بهینه

المان‌های خاک وصل شده است. المان‌های واسط تنها قادر به تحمل نیروی فشاری هستند و در نتیجه تنها فشار را به خاک منتقل می‌کنند. تنش‌های فشاری انتقالی از پی به خاک به وسیله‌ی المان‌های واسط باید از تنش مجاز خاک کمتر باشد. در این صورت برای تنش‌های مجاز خاک همواره باید رابطه (۳) برقرار باشد:

$$\frac{F_i}{w.l} \leq q_a \Rightarrow \frac{F_i}{w.l.q_a} \leq 1 \quad (3)$$

$w$  فاصله عرضی بین المان‌های واسط خاک و پی،  $l$  فاصله طولی بین المان‌های واسط خاک و پی،  $F_i$  نیروی محوری فشاری المان واسط  $l$  ام و  $q_a$  تنش مجاز خاک است که طبق رابطه‌های محاسبه می‌شود [۲].

### ۴-۴-۴- شکل کلی مسئله بهینه‌سازی

با داشتن تابع هدف، متغیرهای طراحی و قیدهای تنش برای مدل مورد نظر، مسئله طرح بهینه را می‌توان در دو مرحله جداگانه تعریف کرد:

مرحله اول: تشخیص و حذف المان‌های قابل حذف پی (بهینه‌سازی توپولوژیک)

مرحله دوم: تعریف یک مسئله بهینه‌سازی استاندارد برای المان‌های باقی‌مانده که به شکل زیر نوشته می‌شود (بهینه‌سازی ابعادی):

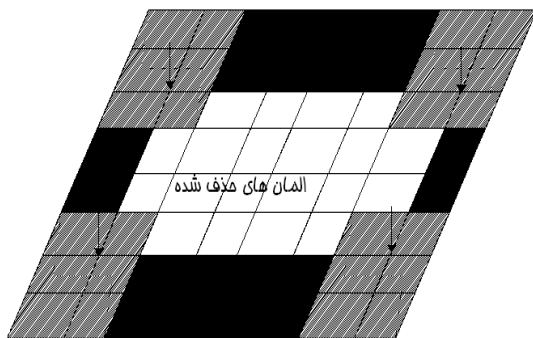
$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= C_s \times \sum_{j=1}^{\text{nef}} (l_j(A_{Xj}^+ + A_{Xj}^-) + w_j(A_{Yj}^+ + A_{Yj}^-)) + \\ & C_c \times \sum_{j=1}^{\text{nef}} w_j \cdot l_j \cdot h \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{S.T. } \begin{cases} g(x)_k \leq 1 & k = 1, 2, 3, \dots, Ncon \\ X_i^l \leq X_i \leq X_i^u & i = 1, 2, 3, \dots, Ndv \end{cases}$$

$Z$  هزینه کل پی شامل هزینه‌های بتن و آرماتور است،  $X_i$  نماد متغیرهای طراحی،  $g(x)_k$  نماد قیدهای مربوط به

داشت. از سوی دیگر، هر المان واسط به تعدادی از المان‌های پی متصل است و حذف یک المان واسط، وابسته به حذف المان‌های پی متصل به آن می‌شود. حذف المان‌های پی در میزان تنش‌های ایجادشده در المان‌های باقی‌مانده تغییراتی ایجاد می‌کند که این تغییرات منجر به محاسبات دوباره متغیرهای طراحی و در نتیجه تابع هدف جدید می‌شود. حذف المان‌ها تا جایی مفید است که تنش‌ها در المان‌های باقی‌مانده منجر به افزایش هزینه ناشی از تغییر در متغیرهای طراحی از جمله ضخامت پی و آرماتورها نشود؛ اگر حذف دسته‌ای از المان‌ها منجر به افزایش چشم‌گیر تنش‌ها در المان‌های دیگر و در نتیجه افزایش تابع هدف که همان هزینه است شود، برنامه از حذف آن‌ها خودداری می‌کند؛ پس تعیین توپولوژی بهینه با حذف آن دسته از المان‌ها که سه شرط زیر را دارند، انجام می‌شود:

۱. المان‌هایی که هیچ نیرویی را تحمل نمی‌کنند یا تحت فشار اندک قرار دارند؛
  ۲. المان‌هایی که حذف آن‌ها موجب کاهش هزینه می‌شود و
  ۳. المان‌هایی که از لحاظ مسائل اجرایی و آیین‌نامه‌ای حذف‌شدنی هستند.
- در نهایت، ترکیبی از المان‌های حذفی و باقی‌مانده، توپولوژی بهینه را تشکیل می‌دهند که نمونه‌ای از آن در شکل ۵ نشان داده شده است.



المان‌های باقی‌مانده المان‌های ثابت

شکل (۵) شکل شماتیک توپولوژی بهینه پی

متغیرهای ابعادی پیدا شوند. تا این مرحله، طراحی بهینه پی برای توپولوژی داده شده مشخص می‌شود و از این مرحله به بعد توپولوژی تغییر می‌کند؛

۷. اگر دور دوم یا بالاتر بهینه‌سازی باشد، کنترل هم‌گرایی انجام می‌شود:

اگر تابع هدف مرحله  $i <$  تابع هدف مرحله  $i-1$  باشد الگوریتم از گام ۱۱ پی‌گیری می‌شود.

اگر تابع هدف مرحله  $i >$  تابع هدف مرحله  $i-1$  باشد الگوریتم از گام ۸ پی‌گیری می‌شود.

۸. المان‌های واسط قابل حذف (المان‌های کم‌فشار و یا المان‌های بدون فشار) و به تبع آن المان‌های پی متصل به این المان‌های واسط مشخص می‌شود.

۹. المان‌های پی و واسط قابل حذف از فرایند مسئله حذف می‌شود. با تغییر توپولوژی، مسئله دوباره تحلیل می‌شود و نیروهای داخلی از جمله ممان‌های خمشی المان‌ها تغییر می‌کند؛

۱۰. با توجه به تغییر مقادیر نیروهای داخلی در مرحله جدید، مسئله به گام ۳ برمی‌گردد؛

۱۱. تابع هدف، توپولوژی و متغیرهای طراحی مرحله  $i-1$  به عنوان جواب مسئله انتخاب می‌شود و

۱۲. پایان.

### ۱-۱-۵- روش تعیین توپولوژی بهینه

ایده اصلی تعیین توپولوژی بهینه بر اساس کارایی المان‌های واسط در انتقال نیروها از پی به خاک زیر آن می‌باشد. ویژگی مهم المان‌های واسط، تحمل نکردن نیروی کششی است؛ یعنی از آن‌جا که خاک قادر به تحمل نیروهای کششی نیست، طی بارگذاری مشخص، المان‌های واسطی که نیرویی در آن‌ها ایجاد نشده است، هیچ نیرویی را به خاک منتقل نمی‌کنند. در چنین شرایطی، حذف این المان‌ها هیچ تأثیری در میزان نیروهای منتقل‌شده به خاک نخواهد

## ۲-۱-۵- روش حل مسئله بهینه‌سازی استاندارد

در این پژوهش، در هر مرحله بهینه‌سازی، تعداد مشخصی المان وجود دارد که باید ضخامت و مساحت آرماتور بهینه آن‌ها یافت شود؛ بنابراین نیاز به بیان یک مسئله بهینه‌سازی استاندارد و حل آن است. در بخش قبل در مورد نحوه تشکیل این مسئله توضیح داده شد. در این بخش نحوه حل مسئله بهینه‌سازی استاندارد با روش جهت‌های قابل قبول توضیح داده می‌شود.

ایده اصلی روش، انتخاب یک نقطه ابتدایی است که در همه قیدها صدق کرده و طبق رابطه تکراری (۵) به سمت نقطه بهینه حرکت کند.

$$x_{i+1} = x_i + \lambda S_i \quad (5)$$

$x_i$  نقطه شروع برای  $i$  امین تکرار،  $S_i$  راستای حرکت،  $\lambda$  فاصله حرکت (طول گام) و  $x_{i+1}$  نقطه نهایی است که در انتهای  $i$  امین تکرار به دست می‌آید. مقدار  $\lambda$  همواره به گونه‌ای انتخاب می‌شود که  $x_{i+1}$  در ناحیه امکان‌پذیر قرار گیرد. راستای جست‌وجوی  $S_i$  به گونه‌ای پیدا می‌شود که الف) با یک حرکت کوچک در آن راستا هیچ قیدی نقص نشود و ب) مقدار تابع هدف بتواند در آن راستا کاهش یابد. نقطه ابتدای  $x_{i+1}$  به عنوان نقطه ابتدای تکرار بعدی، انتخاب و کل فرایند چندین بار تکرار می‌شود. تکرار فرایند تا رسیدن به نقطه‌ای که در آن نتوان جهت‌ی را یافت که دو شرط الف) و ب) را برآورده کند، ادامه می‌یابد. به طور کلی چنین نقطه‌ای، نقطه کمینه موضعی مسئله را ارائه می‌کند. این نقطه کمینه لزوماً یک کمینه سراسری نیست مگر این که مسئله یک مسئله برنامه‌ریزی محدب باشد. جهت‌ی که در خاصیت الف) صدق می‌کند یک جهت امکان‌پذیر و جهت‌ی که هر دو خاصیت الف) و ب) را برآورده

می‌کند یک جهت امکان‌پذیر مفید (روش جهت‌های قابل قبول) نامیده می‌شود. برای آشنایی بیشتر با این روش به کتاب‌های بهینه‌سازی از جمله کتاب آقای کرش<sup>۱</sup> [۱۸] یا هافتکا<sup>۲</sup> [۱۹] مراجعه شود.

## ۶- نمونه‌های حل شده

## ۶-۱- فرضیات اصلی در نمونه‌ها

برای بررسی این برنامه، چهار نمونه سه‌بعدی در این پژوهش حل شده است. در همه این نمونه‌ها شکل اولیه پی به صورت گسترده است و تحت یک نوع بارگذاری قرار دارد. ارتفاع پی در همه‌ی نقاط آن ثابت فرض شده است. تفاوت نمونه‌ها در نوع خاک و المان‌هایی است که می‌توانند یا نمی‌توانند حذف شوند. مشخصات مصالح مورد استفاده شده در این نمونه‌ها مطابق جدول ۱ است.

جدول (۱) مشخصات مصالح مصرف شده

مقاومت $MPa$	مدول الاستیسیته $MPa$	ضریب پواسون	مصالح
۲۱	۲۰۰۰۰۰	۰/۱۷	بتن
از رابطه هانسن*	متناسب با تنش مجاز خاک	۰/۳۵	خاک
۴۰۰	۲۰۰۰۰۰۰	۰/۳۳	فولاد

$$* \sigma_{allow} = (0.5 \cdot \gamma \cdot W \cdot N_\gamma + h \cdot N_q + C \cdot N_c) / SF$$

شکل کلی پی گسترده استفاده شده در این نمونه‌ها در شکل ۶ نشان داده شده است. پی تحت نیروهای وارد بر ۱۲ ستون روی آن قرار گرفته است که مقادیر آن‌ها در جدول ۲ نشان داده شده است. طول و عرض المان‌های پی، ۱۰۰ cm اختیار شده و هر چهار المان پی با یک المان واسط به المان‌های خاک متصل شده‌اند.

1- U.Kirsh  
2- Haftka



جدول (۲) مشخصات بارگذاری پی

شماره ستون	نیروی محوری (kg)	لنگر خمشی در امتداد x (kg.cm)	لنگر خمشی در امتداد y (kg.cm)
۱	۷۹۶۵/۶۷	۸۴۰۳۲۳۵	۳۵۵۳۲۴۸
۲	۹۲۲۸۹/۸	۸۶۵۱۵۹۹	۳۸۲۱۷۹۴
۳	۹۵۱۷۶/۸	۸۷۷۱۶۷۳	۳۹۷۷۳۷۵
۴	۹۸۵۶۷/۸	۸۶۷۳۳۳۸	۳۴۴۰۳۲۳
۵	۷۹۶۵/۶۷	۸۴۰۳۲۳۵	۳۵۵۳۲۴۸
۶	۹۲۲۸۹/۸	۸۶۵۱۵۹۹	۳۸۲۱۷۹۴
۷	۹۵۱۷۶/۸	۸۷۷۱۶۷۳	۳۹۷۷۳۷۵
۸	۹۸۵۶۷/۸	۸۶۷۳۳۳۸	۳۴۴۰۳۲۳
۹	۷۹۶۵/۶۷	۸۴۰۳۲۳۵	۳۵۵۳۲۴۸
۱۰	۹۲۲۸۹/۸	۸۶۵۱۵۹۹	۳۸۲۱۷۹۴
۱۱	۹۵۱۷۶/۸	۸۷۷۱۶۷۳	۳۹۷۷۳۷۵
۱۲	۹۸۵۶۷/۸	۸۶۷۳۳۳۸	۳۴۴۰۳۲۳

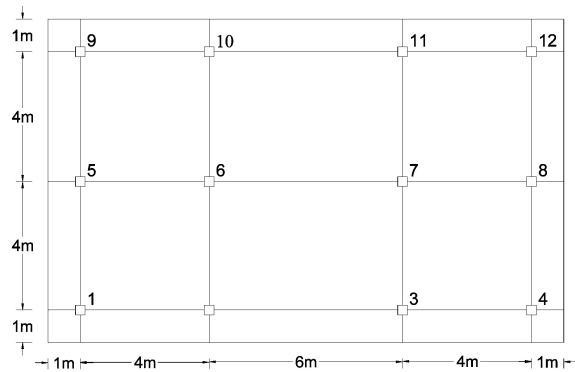
مدول الاستیسیته خاک،  $1000\text{kg/cm}^2$  فرض می‌شود.

• نمونه (۴): مانند نمونه ۳ است اما فقط قابلیت تبدیل به پی نواری را دارد.

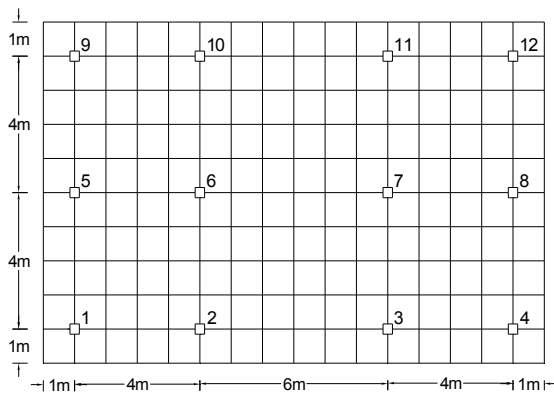
در نمونه‌های ۱ و ۳ از آن جا که پی توانایی تبدیل به پی منفرد را دارد، تنها المان‌های زیر ستون‌ها قابل حذف نیستند اما در مثال‌های ۲ و ۴ افزون بر المان‌های بالا، المان‌های نواری نیز قابل حذف نمی‌باشند. سایر المان‌ها می‌توانند در طی روند بهینه‌سازی حذف شوند.

حل هر کدام از نمونه‌ها طی مراحل مختلف انجام شده و در هر مرحله تعدادی از المان‌های پی حذف شده‌اند و به دنبال آن، تابع هزینه تغییر کرده است. مراحل مختلف حل و نتایج به‌دست آمده از آن، شامل مقدار تابع هدف و ضخامت پی، به ترتیب در جداول ۳ و ۴ نشان داده شده‌اند.

برای هر یک از نمونه‌ها، شکل اولیه و توپولوژی بهینه پی در شکل‌های ۸ تا ۱۱ نشان داده شده است. در این شکل‌ها، المان‌های سیاه، المان‌های غیر قابل حذف و المان‌های سفید، المان‌های قابل حذف در روند بهینه‌سازی است. توپولوژی بهینه نیز به رنگ خاکستری نشان داده شده است.



شکل (۶) پلان پی گسترده



شکل (۷) المان‌بندی پی گسترده

## ۲-۶- شرح نمونه‌های حل شده

• نمونه (۱): در این نمونه فرض بر آن است که پی گسترده می‌تواند به پی نواری و یا منفرد تبدیل شود که روی خاک با تنش مجاز  $3.5\text{kg/cm}^2$  قرار دارد. ضخامت اولیه پی،  $45\text{cm}$  و مدول الاستیسیته خاک  $2000\text{kg/cm}^2$  است.

• نمونه (۲): مانند ۱ است اما فقط قابلیت تبدیل به پی نواری را دارد.

• نمونه (۳): مثال ۱ است اما روی خاک با تنش مجاز  $0.5\text{kg/cm}^2$  قرار دارد. ضخامت اولیه پی،  $65\text{cm}$  و

با توجه به جداول و شکل‌های ۸ تا ۱۱ موارد زیر را می‌توان ملاحظه نمود:

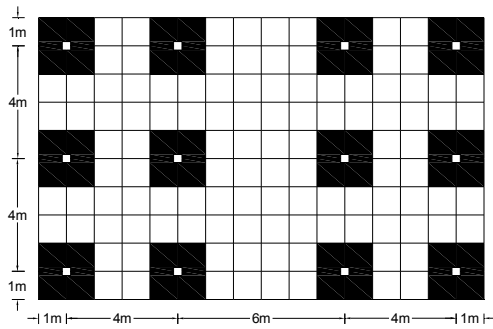
- در نمونه‌های ۱ و ۲، توپولوژی باقی‌مانده تنها از المان‌های غیر قابل حذف تشکیل شده است. چون حذف المان‌های قابل حذف تا آخرین مرحله نه تنها باعث نقض
- هیچ قیدی نشده بلکه تابع هدف را کاهش داده در نتیجه توپولوژی بهینه بر توپولوژی نهایی ممکن منطبق شده است.

جدول (۳) تغییرات تابع هدف در مراحل مختلف بهینه‌سازی

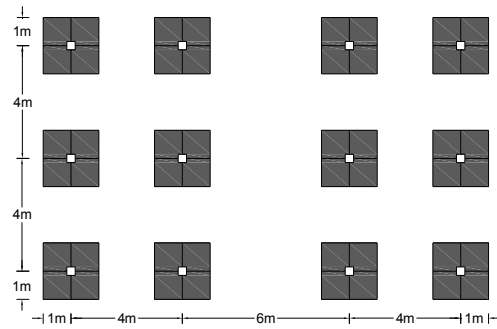
مرحله	شروع	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمونه ۱	$۸/۱۴ \times ۱۰^۸$	$۵/۱۵ \times ۱۰^۸$	$۳/۵ \times ۱۰^۸$	$۲/۹ \times ۱۰^۸$	$۱/۸ \times ۱۰^۸$	-	-	-
نمونه ۲	$۸/۱۴ \times ۱۰^۸$	$۵/۱۵ \times ۱۰^۸$	$۴/۴ \times ۱۰^۸$	$۴/۲ \times ۱۰^۸$	-	-	-	-
نمونه ۳	$۸/۲۶ \times ۱۰^۸$	$۸ \times ۱۰^۸$	$۷/۴ \times ۱۰^۸$	$۶/۹ \times ۱۰^۸$	$۶/۱۳ \times ۱۰^۸$	$۵/۸ \times ۱۰^۸$	$۳/۳ \times ۱۰^۸$	$۴/۹ \times ۱۰^۸$
نمونه ۴	$۸/۲۶ \times ۱۰^۸$	$۸/۱۲ \times ۱۰^۸$	$۵/۷ \times ۱۰^۸$	$۵/۲ \times ۱۰^۸$	$۷/۷ \times ۱۰^۸$	-	-	-

جدول (۴) تغییرات ضخامت پی در مراحل مختلف بهینه‌سازی

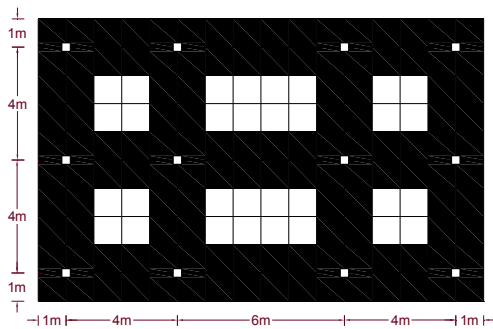
مرحله	شروع	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمونه ۱	۴۵	۳۹/۳	۳۹/۳	۳۹/۳	۳۹/۳	-	-	-
نمونه ۲	۴۵	۳۹/۳	۳۹/۳	۳۹/۳	-	-	-	-
نمونه ۳	۶۵	۶۳/۱	۶۴/۲	۶۴/۳	۶۸/۸	۷۶/۳	۴۸/۹	۸۲/۲
نمونه ۴	۶۵	۶۳/۲	۴۸/۷	۵۰/۲	۷۵/۴	-	-	-



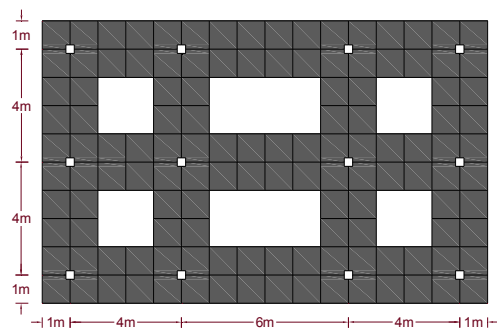
شکل (۸-الف) المان‌بندی پی نمونه ۱



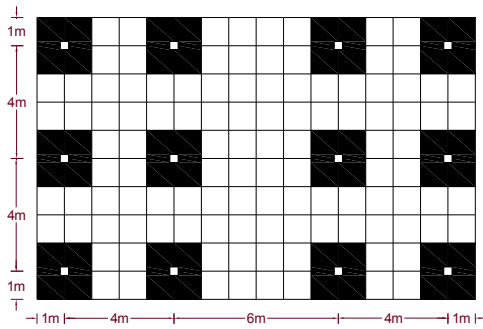
شکل (۸-ب) توپولوژی بهینه پی نمونه ۱



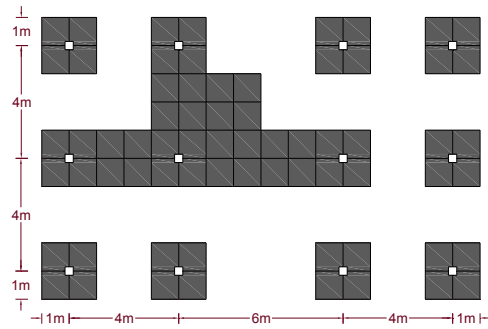
شکل (۹-الف) المان‌بندی پی نمونه ۲



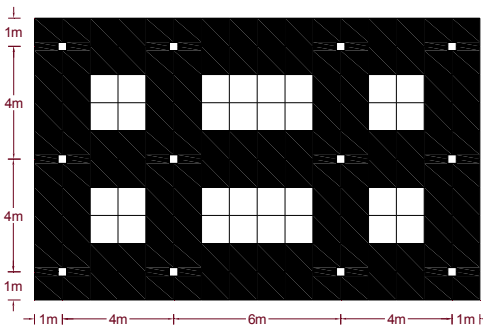
شکل (۹-ب) توپولوژی بهینه پی نمونه ۲



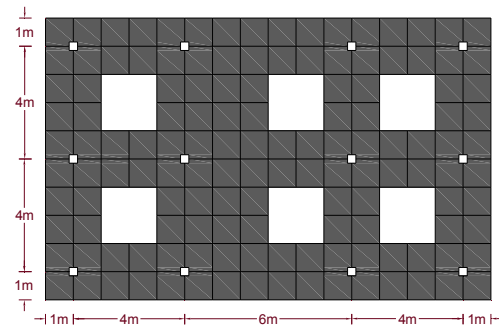
شکل (۹-الف) المان‌بندی پی نمونه ۳



شکل (۸-ب) توپولوژی بهینه پی نمونه ۳



شکل (۱۱-الف) المان‌بندی پی نمونه ۴



شکل (۱۱-ب) توپولوژی بهینه پی نمونه ۴

جدول (۵) نتایج نمونه‌ها

نمونه	تنش مجاز خاک	توپولوژی بهینه	توپولوژی نهایی ممکن	قید فعال
نمونه ۱	$3.5 \text{ kg/cm}^2$	پی منفرد	پی منفرد، پی نواری و پی گسترده	برش پانچ
نمونه ۲	$3.5 \text{ kg/cm}^2$	پی نواری	پی نواری و پی گسترده	برش پانچ
نمونه ۳	$0.5 \text{ kg/cm}^2$	متفاوت از شکل‌های متعارف	پی منفرد، پی نواری و پی گسترده	تنش مجاز خاک
مثال ۴	$0.5 \text{ kg/cm}^2$	متفاوت از شکل‌های متعارف	پی نواری و پی گسترده	تنش مجاز خاک

۳. علت وجود تفاوت در توپولوژی‌های به‌دست‌آمده از

- در نمونه‌های ۳ و ۴، چون حذف برخی از المان‌های قابل حذف نسبت به حذف نشدن آن‌ها منجر به افزایش هزینه می‌شود؛ در نتیجه، توپولوژی بهینه پی به صورت ترکیبی از المان‌های قابل حذف و غیر قابل حذف است و بر خلاف دو نمونه قبل به صورت شکل‌های عادی استفاده شده برای پی (گسترده، نواری، منفرد) نیست.

### ۳-۶- جمع‌بندی مثال‌ها

- در این بخش چهار نمونه بررسی شد که نتایج آن‌ها را می‌توان به صورت جدول ۵ جمع‌بندی کرد:
- با توجه به جدول ۵ می‌توان موارد زیر را بیان کرد:
۱. توپولوژی بهینه پی می‌تواند به صورت یکی از شکل‌های متعارف پی مانند گسترده، نواری و یا منفرد باشد.
  ۲. توپولوژی بهینه پی لزوماً به صورت شکل‌های متعارف پی در نمی‌آید.

نمونه‌های ۱ و ۳ یا ۲ و ۴ که ویژگی‌های کاملاً یکسان اما تنش مجاز خاک متفاوت دارند را می‌توان به صورت زیر توضیح داد:

- در نمونه‌های ۱ و ۲، تنش مجاز خاک، مقدار زیادی دارد. از سوی دیگر حذف المان‌های پی منجر به کاهش ابعاد پی و در نتیجه افزایش تنش‌های منتقل شده به خاک به‌وسیله‌ی المان‌های واسط می‌شود. اما تنش‌های منتقل شده به خاک هیچ‌گاه از تنش مجاز خاک بیشتر نمی‌شود. در چنین شرایطی که تنش مجاز خاک تعیین‌کننده ابعاد پی نیست، می‌توان ابعاد پی را بدون توجه به قید تنش مجاز خاک کاهش داد و المان‌های قابل حذف را در هر مرحله حذف کرد. در این حالت در تعیین پی بهینه، قیود برش پانچ و لنگرهای خمشی، فعال می‌شوند؛ چرا که در جریان تعیین توپولوژی بهینه پی، کاهش ضخامت و یا عرض پی، میزان مقاومت آن را در برابر قیود یادشده کاهش می‌دهد. پس کاهش ضخامت و حذف المان‌ها تا آنجا ممکن است که قیود بالا نقض نشود. بنابراین در نمونه‌های ۱ و ۲، حذف المان‌ها تا آخرین مرحله مشکلی ایجاد نکرده و در نتیجه توپولوژی بهینه بر توپولوژی نهایی ممکن منطبق شده است.

• در نمونه‌های ۳ و ۴، تنش مجاز خاک کم بود و در نتیجه قید فعال مسئله به شمار می‌آمد. در چنین شرایطی، کاهش ابعاد پی باید به گونه‌ای انجام شود که در هیچ حالتی تنش زیر پی از تنش مجاز خاک بیشتر نشود پس لازم است که ابعاد پی با توجه به قید بالا تعیین شود. در این نمونه‌ها حذف دسته‌ای از المان‌های پی، منجر به کاهش بیش از حد ابعاد پی شد که در نتیجه ضخامت پی افزایش یافته و به تبع آن هزینه نسبت به مرحله قبل، بالا رفت.

• در نمونه‌های ۳ و ۴، تنش مجاز خاک کم بود و در نتیجه قید فعال مسئله به شمار می‌آمد. در چنین شرایطی، کاهش ابعاد پی باید به گونه‌ای انجام شود که در هیچ حالتی تنش زیر پی از تنش مجاز خاک بیشتر نشود پس لازم است که ابعاد پی با توجه به قید بالا تعیین شود. در این نمونه‌ها حذف دسته‌ای از المان‌های پی، منجر به کاهش بیش از حد ابعاد پی شد که در نتیجه ضخامت پی افزایش یافته و به تبع آن هزینه نسبت به مرحله قبل، بالا رفت.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش طراحی پی بهینه پی به صورت تلفیقی از

## ۸- مراجع

[1] Hassani B, Hilton E., *Homogenization and Structural Topology Optimization*, Department of Civil Engineering, University of Wales, 1999.

[2] Boweles J.E., *Foundation analysis and design*, McGraw – Hill, NewYork, 1982

[۳] پهلوان، ب؛ "مطالعه تغییر شکل پذیری آبرفت درشت دانه تهران با استفاده از پرسیمتر"، پایان‌نامه دکتری زمین‌شناسی مهندسی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس تهران، ۱۳۸۱.

[4] Kocak S. and Mengi, Y., "A Simple soil-structure interaction model", *Applied Mathematical modeling*, Vol. 24, PP. 607-635, 2000.

[5] Yokoyama T., "Vibration Analysis of Timoshenko

- [۱۳] غیرتمند، چ؛ محرمی، ح؛ فاخر، ع؛ "طراحی بهینه قاب‌های خمشی فولادی دوبعدی با پی انعطاف‌پذیر با در نظرگیری اثر اندرکنش خاک + پی + روسازه" هفتمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی عمران، تهران، ایران، ۱۳۸۵.
- [۱۴] غیرتمند، چ؛ "بهینه‌سازی پی‌های انعطاف‌پذیر و روسازه با در نظرگیری اندرکنش خاک و سازه" رساله دکتری مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ۱۳۸۶.
- [15] Zienkiewicz O.C. and Taylor, R.L., "The Finite Element Method", McGraw-Hill Book Co., Vol. 1, Fourth Edition, England, 1982.
- [۱۶] محرمی، ح؛ ریاضی، س.م.، "روش جدید تحلیل سازه‌ها با عناصر خرابایی فقط کششی"، نشریه مهندسی دانشگاه صنعتی اصفهان، جلد ۲۰، شماره ۱، صفحات ۶۹ تا ۸۱، شهریور ۱۳۸۰.
- [۱۷] مقررات ملی ساختمان ایران، مبحث نهم، "طرح و اجرای ساختمان‌های بتن آرمه"، وزارت مسکن و شهرسازی
- [18] Haftka R.T., Gurdal Zafer; Elements of structural optimization (Solid Mechanics and its applications), 1992
- [19] Kirsh Uri; Optimum Structural Design; Mc Graw-Hill, 1981
- Beam-columns on Two-parameter Elastic Foundation", computer and structures, Vol. 61, No. 6, PP. 995-1007, 1996.
- [6] Dempsey J.P. and Li, H., "A Flexible rectangular footing on a Gibson soil: Required rigidity for full contact", International Journal of solids and structures, Vol. 32, No.3/4, PP. 357-373, 1995.
- [7] Choi, C.K. and Chung, G.T., "A gap element for three- dimensional elasto-plastic contact problems", computers and structures, Vol.61, No. 6, PP1155-1167, 1996.
- [8] Kohli J.P., "Optimum Design of Concrete Spread Footing by Computer", ACI Journal, Title No. 95-28, PP. 384-389, 1968.
- [9] Sienkiwicz Z. and Wilczynski, B., "Minimum Weight Design of Machine Foundation Under Vertical Load", Journal of engineering mechanics, Vol. 119, No. 9, PP. 1781-1797, 1993.
- [10] Villaggio P., "How to Design a Foundation", International Journal of Solids and Structures, Vol.38, PP.8899-8906, 2001.
- [11] Kim K.N., Lee, S.H., Kim, K.S., Chung, C.K., Kim, M.M. and Lee, H.S., "Optimal Pile Arrangement for Minimizing Differential Settlements in Piled Raft Foundation", Computers and Geotechnics, Vol. 28, PP. 235-253, 2001.
- [12] Silva M.A., Arora, J.S., Swan, C.C. and Brasil, R.M., "Optimization of Elevated Concrete Foundation for Vibrating Machines", Journal of Structural engineering, Vol. 128, No. 11, PP. 1470-1479, 2002.

# Foundation Design Using Topology Optimization

H. Moharrami<sup>1</sup>, F. Zahedi Tajrishi<sup>2\*</sup>

1-Associate Professor, Department of Civil Engineering, Tarbiat Modares University, Iran

2- Ph.D student of Civil Engineering, Babol University of Technology, Iran

f.zaheditajrishi@stu.nit.ac.ir

## Abstract:

In this paper a methodology for optimal design of foundation of structures has been proposed. The structural model consists of foundation, soil and foundation-soil connectors. The 3D finite element model comprises three different finite elements, i.e. homogeneous and isotropic plate elements with three degrees of freedom for each node for mat foundation, brick elements with three degrees of freedom for each node for soil and some compression-only members for connection of foundation to soil named Gap elements which connect the foundation to the soil in three ways. To facilitate the optimization algorithm, a 3D analysis is performed in the elastic range under one design loading. Due to numerous finite elements and accordingly considerable number of design variables, the classical topology optimization algorithms become inefficient for solution of the problem. Therefore in this paper an innovative topology optimization algorithm, which does work based on efficiency of foundation elements, is proposed. This new algorithm cuts out the foundation elements that do not bear (or bear low value) compression under design load(s). The overall optimization methodology consists of two phase optimization: namely topology optimization and size optimization which are carried out in 12 steps. Objective function is determined as minimizing the cost of the foundation consisting of concrete and reinforcement costs. Design variables are existence or nonexistence of the foundation elements, thickness of the foundation and the percentage of the reinforcement. Some of the foundation elements are indicated as constant elements during the elimination process. Each of the other foundation elements should be removed if the gap element connecting the element to soil is recognized as nonbearing element under the design loading. Constraints of the optimization problem are bending moment and shear force in foundation and compression stress of the soil. After every topology optimization, an analysis is done and a size optimization algorithm is used to proportion the thickness of the foundation and corresponding reinforcement. The consequent topology and size optimization processes are repeated until no enhancement is obtained in the design. The capabilities of the proposed method have been shown by four design examples. Results show that, depending on the constraints of the optimization problem, the optimal topology of the initial mat foundation varies from common topologies such as strip foundation to unusual topology of foundation. Based on the results, the optimal topology of the foundation depends on the design loading(s) and constraints of the optimization problem.

**Keywords:** Foundation design, topology optimization, feasible direction, gap elements