مجله علمی – پژوهشی
مهندسی عمران مدرس
دوره ۲۳، شماره ۵، سال ۱۴۰۲
صفحات ۱۳۹ تا ۱۴۹

تحلیل تصادفی مسائل الاستواستاتیک دارای عدم‌قطعیت مصالح با روش سلول طیفی

پویا زکیان*

دانشیار مهندسی زلزله، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک.

* p-zakian@araku.ac.ir

تاریخ دریافت ۱۴۰۲/۰۳/۰۵ تاریخ پذیرش ۱۴۰۲/۰۷/۲۷

چکیده

روش سلول طیفی ترکیبی از مفهوم دامنه موهومی و روش المان طیفی است که با استفاده از شبکه‌های کارتزین موجب آسانی شبکه‌بندی می‌شود. این مقاله روشی نوین با نام سلول طیفی تصادفی را برای لحاظ عدم‌قطعیت در مسائل الاستواستاتیک توسعه می‌دهد. روش پیشنهادی همزمان شامل تمام ویژگی‌های روش سلول طیفی و روش المان محدود تصادفی است. روش سلول طیفی تصادفی از توابع درون‌یابی مرتبه بالای المان‌های طیفی از نوع لوباتو استفاده می‌کند. استفاده از این توابع درون‌یابی با توجه به انتگرال‌گیری عددی گاوس–لوباتو–لژاندر، منجر به افزایش کارآمدی این روش عددی می‌شود. بسط‌های کارهیونن‌لو و چندجمله‌ای‌های آشوبی در روش سلول تصادفی طیفی به‌کار گرفته می‌شوند. همچنین این روش معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم ناشی از بسط کارهیونن‌لو میدان تصادفی را با سلول‌های طیفی حل می‌کند. استفاده از شبکه کارتزین، توانمندی محاسباتی در حل معادله انتگرالی فردهلم و نیز لحاظ توابع شکلی مرتبه بالا از ویژگی‌های موثر روش پیشنهادی است. نمونه‌های عددی فراهم‌شده در این پژوهش نمایانگر دقت مناسب روش سلول طیفی تصادفی برای حل مسائل مبنای الاستواستاتیکی است.

کلید واژگان: روش سلول طیفی تصادفی، تحلیل احتمالاتی سازه، مسائل الاستواستاتیک، معادله انتگرالی فردهلم، عدم‌قطعیت مصالح.

۱- مقدمه

روش المان محدود تصادفی تعمیم روش المان محدود تعینی سنتی به چارچوب تصادفی است که برای حل مسائل استاتیکی و دینامیکی با مشخصات فیزیکی تصادفی به کار می‌رود. از دیدگاه ریاضی، المان محدود تصادفی یا احتمالاتی به‌عنوان یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی تصادفی به‌شمار می‌رود.

در دو دهه اخیر، روش المان محدود تصادفی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرارگرفته است؛ به ویژه با توجه به پیشرفت‌های روبه‌رشد در فناوری رایانه‌ای. از جنبه تجزیه تصادفی، روش المان محدود تصادفی را می‌توان به رویکردهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو، اغتشاشی [1] و تجزیه طیفی [2] تقسیم‌بندی کرد [3]. رویکرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو از حل مسئله به ازای بارها تحقق فضای نمونه‌ای بهره می‌جوید. بنابراین این روش با وجود توانایی زیاد در حل مسائل تصادفی، به تعداد زیادی تحلیل نیاز دارد که منجر به تلاش محاسباتی بالا می‌شود. رویکرد اغتشاشی از بسط تیلور ماتریس‌های المان محدود تصادفی استفاده می‌کند که به دلیل نیاز به محاسبه مشتق جزئی

[DOI: 10.22034/23.5.10]

این ماتریس‌ها، این روش نیز هزینه محاسباتی بالایی (به ویژه برای مسائل بزرگ‌مقیاس) دارد. رویکرد تجزیه طیفی از بسط کارهیونن‌لو و بسط چندجمله‌ای آشوبی به ترتیب برای توصیف میدان تصادفی و پاسخ استفاده می‌کند. این رویکرد دقت بالایی دارد اما، همچون دو رویکرد دیگر، هزینه محاسباتی بالایی برای مسائل بزرگ‌مقیاس دارد. بنابراین تلاش محاسباتی بالای روش‌های المان محدود تصادفی در مقایسه با روش المان محدود تعینی اجتناب‌ناپذیر است [3]. به همین دلیل، همواره توسعه‌هایی در زمینه کاهش هزینه محاسباتی و افزایش دقت روش‌های المان محدود تصادفی انجام شده است. در این زمینه، به تازگی روش المان محدود طیفی تصادفی (یا روش المان طیفی تصادفی) توسط زکیان و خاجی برای مسائل مکانیک سازه‌ها و انتشار امواج پیشنهاد شده است [4–8]. این روش، مانند روش المان محدود تصادفی سنتی در منبع [2]، از رویکرد تجزیه طیفی استفاده می‌کند. البته کلمه "طیفی" در نام‌گذاری روش المان طیفی تصادفی با کلمه "طیفی" در نام‌گذاری رویکرد طیفی تفاوت دارد. اولی به روش المان طیفی بازمی‌گردد اما دومی بسط‌های تصادفی همچون کارهیونن‌لو را در بر می‌گیرد. حل‌گر سریع برای بسط کارهیونن‌لو، ماتریس جرم قطری، کارایی محاسباتی و دقت مناسب از ویژگی‌های اصلی روش المان طیفی تصادفی است.

از میان روش‌های موجود برای تحلیل سازه‌های با هندسه‌های پیچیده، روش سلول محدود توسط پرویزیان و همکاران [9] پیشنهاد شد که از ترکیب روش المان محدود و مفهوم دامنه موهومی بهره می‌جوید. این روش تلاش لازم برای تولید شبکه را به یک انتگرال‌گیری وفقی تبدیل می‌کند تا مرزهای فیزیکی یک مسئله لحاظ شود. روش سلول محدود از شبکه کارتزین استفاده می‌کند که منجر به کاهش دشواری تولید شبکه و افزایش دقت حل می‌شود. این ویژگی موجب کارایی روش سلول محدود در طراحی برپایه رایانه (CAD) می‌شود که در شاخه‌های گوناگون مهندسی به‌کار می‌رود. از سوی دیگر، از میان روش‌های عددی موجود برای کاهش خطای پراکندگی می‌توان روش المان طیفی را نام برد که از المان‌های مرتبه بالای طیفی استفاده می‌کند [10, 11].

با وجود توسعه شگرف روش‌های عددی برای مواجه با چالش هندسه‌های CAD، مطالعات اندکی در زمینه توسعه روش‌های تصادفی برای چنین هندسه‌هایی انجام شده است چنان‌که تنها می‌توان روش تحلیل ایزوژئومتریک تصادفی [12, 13] و روش سلول محدود تصادفی [14] را نام برد. روش تحلیل ایزوژئومتریک تصادفی توسعه روش تحلیل ایزوژئومتریک [15] در فضای تصادفی است. روش تحلیل ایزوژئومتریک تصادفی، که از توابع پایه T-spline و B-spline بهره می‌جوید، نخست برای تحلیل استاتیکی خطی سازه با رفتار الاستیک توسعه داده شد [12]. در گام بعدی، روش نامبرده برای تحلیل ارتعاش آزاد سازه‌ها با مشخصات مصالح تصادفی و الاستیک به کار رفت که بر پایه حل یک مسئله مقدار ویژه تصادفی تعمیم یافته است [13]. از سویی دیگر، روش سلول محدود تصادفی توسعه روش سلول محدود در فضای تصادفی برای مسائل الاستیسیته خطی است که تنها توسعه روش سلول محدود در فضای تصادفی به‌شمار می‌رود. این روش برای حل مسائل استاتیکی مکانیک سازه‌ها به‌کار رفته است اما تاکنون توسعه روش سلول طیفی برای اینگونه مسائل انجام نشده است.

در این مقاله، روش سلول طیفی تصادفی توسعه داده می‌شود که نه تنها برای تحلیل احتمالاتی هندسه‌های CAD قابل استفاده است بلکه در این روش، حل عددی معادله انتگرالی فردهلم[۱] از نوع دوم نیز برای چنین دامنه‌هایی انجام می‌شود که خود یک توسعه در زمینه ریاضیات کاربردی محسوب می‌شود. روش پیشنهادی بر پایه روش سلول طیفی است و از توابع درون یابی مرتبه بالا بهره می‌جوید، بنابراین دقت مناسبی دارد. همچنین این روش از تعداد سلول کمتری برای گسسته‌سازی معادله انتگرالی فردهلم استفاده می‌کند که به دلیل فرایند تجمیع دوگانه در این مرحله، کارایی محاسباتی را بالاتر می‌برد. افزون بر این، استفاده از توابع شکل طیفی می‌تواند منجر به فرم استاندارد مسئله مقدارویژه ناشی از آن معادله انتگرالی شود و از سویی دیگر،

۱ Fredholm

[DOI: 10.22034/23.5.10]

نیازی به تشکیل تابع ویژه نخواهد بود و بردار ویژه به طور مستقیم برای محاسبات قابل کاربرد است چراکه نقاط انتگرال‌گیری سلول طیفی بر نقاط گرهی آن منطبق است.

۲- روش سلول طیفی

روش سلول محدود برای نخستین بار توسط پرویزیان و همکاران معرفی شد و سپس روش سلول طیفی توسعه داده شد [9, 16]. شبکه‌بندی مسائل با استفاده از روش‌های سلول محدود و طیفی نسبتاً ساده است و در نتیجه این روش‌ها می‌توانند به خوبی آثار هندسه پیچیده و برخی از ناپیوستگی‌ها را با دقت و کارایی محاسباتی مناسب مدل‌سازی کنند. روش سلول طیفی براساس تعریف دو دامنه اصلی و موهومی در مسئله استوار است.

در این بخش معادلات حاکم بر مسئله الاستواستاتیک بررسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \\ &\mathbf{u}=\mathbf{u}^{\mathbf{D}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{D}} \\ &\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{f}^{\mathbf{N}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{N}} \end{aligned} \qquad (۱)$$

که این معادله در دامنه‌ی Ω مسئله الاستیک خطی برقرار است؛ $\mathbf{b}$ نیروی حجمی و $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش است. $\mathbf{f}^{\mathbf{N}}$ بار سطحی برای شرایط مرزی نیرویی ($\Gamma_{\mathrm{N}}\subset\Gamma$) است؛ شرایط مرزی جابه‌جایی ($\Gamma_{\mathrm{D}}\subset\Gamma$) نیز روی مرز اعمال می‌شود، $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر سطح دامنه (مرز Γ_{N}) است. همچنین رابطه تنش-کرنش و رابطه کرنش- جابه‌جایی برابر هستند با:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (۲)$$

که در این معادله $\mathbf{C}$ ماتریس الاستیسیته است. فرم تضعیف شده معادله (۱) به‌گونه زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}}\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۳)$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی، $\bar{\mathbf{u}}$ بردار جابه‌جایی مجازی، و $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ بردار کرنش مجازی است.

برای گسسته‌سازی مسئله با استفاده از روش سلول محدود، دامنه Ω به دامنه Ω_{ed} تعمیم داده می‌شود که در شکل (۱) نشان داده شده است. سپس دامنه جدید را با سلول‌های مستطیلی‌شکل منظم می‌توان گسسته‌سازی کرد.

شکل ۱. دامنه اصلی Ω، دامنه موهومی Ω_{fd} و دامنه تعمیم‌یافته Ω_{ed}

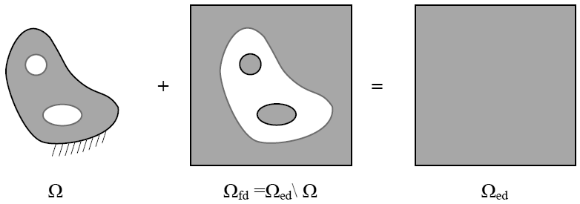

Fig. 1. Physical domain, fictitious domain, and extended domain

درنتیجه معادله (۳) را می‌توان به‌گونه زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{ed}}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\alpha\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega_{\mathrm{ed}}}\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\alpha\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}}\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۴)$$

که

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{in} \quad \Omega\\ 0 & \text{in} \quad \Omega_{\mathrm{fd}}\end{cases} \qquad (۵)$$

اکنون با سه نوع سلول روبرو هستیم:

– سلول‌هایی که کاملا بیرون از ناحیه Ω قرار گرفته‌اند و برای آن‌ها α برابر صفر است؛

– سلول‌هایی که کاملا درون ناحیه Ω قرارگرفته‌اند و برای آن‌ها α برابر یک است؛

– سلول‌هایی که توسط مرز ناحیه Ω قطع می‌شوند که در توابع انتگرال‌گیری ناپیوستگی ایجاد می‌کنند، بنابراین برای آن‌ها از الگوریتم چاردرختی در گسسته‌سازی فضای دوبعدی استفاده می‌شود، همچون شکل (۲).

دامنه تعمیم‌یافته با اجتماع تمامی سلول‌ها تشکیل می‌شود:

$$\Omega_{\mathrm{ed}}=\bigcup_{c=1}^{m}\Omega_{\mathrm{c}} \qquad (۶)$$

که در آن Ω_{c} دامنه یک سلول است و دامنه تعمیم‌یافته توسط m سلول تقسیم‌بندی می‌شود. بنابراین ماتریس سختی و بردار نیروی هر سلول از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{K}^{c}=\int_{\Omega^{c}}\alpha\mathbf{B}^{c\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}^{c}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (۷)$$

$$\mathbf{F}^{c}=\int_{\Omega^{c}}\alpha\mathbf{H}^{c\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma^{c}}\mathbf{H}^{c\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma \qquad (۸)$$

با استفاده از روش گسسته‌سازی چاردرختی[۱]، ماتریس سختی یک سلول را می‌توان با انتگرال‌گیری ترکیبی روی زیر سلول‌ها به‌دست آورد. همانند روش المان طیفی، از فرمول‌بندی

۱ Quadtree

[DOI: 10.22034/23.5.10]

ایزوپارامتریک برای استخراج معادلات و ماتریس‌های هر سلول، استفاده می‌شود. آنگاه از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس–لوباتو–لژاندر همراه با الگوریتم چاردرختی استفاده می‌شود.

برای دستیابی به مقادیر جابه‌جایی در هر سلول از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{HU} \tag{۹}$$

که $\mathbf{H}$ نمایانگر ماتریس توابع شکل و $\mathbf{U}$ بردار جابه‌جایی گرهی است. برای نمونه، در تشکیل توابع درون‌یابی و انتگرال‌گیری عددی برای سلول طیفی مرتبه سوم، از مقادیر مختصاتی $\mathbf{x}_3$ و وزنی $\mathbf{w}_3$ زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{x}_3=[-1.0000,\ -0.4472,\ 0.4472,\ 1.0000],\quad \mathbf{w}_3=[0.1667,\ 0.8333,\ 0.8333,\ 0.1667] \tag{۱۰}$$

توابع شکل روش سلول طیفی بر اساس چندجمله‌ای‌های لاگرانژ همراه با نقاط گاوس–لوباتو–لژاندر است. برای نمونه، یک سلول طیفی دوبعدی مرتبه ۳ دارای ۱۶ گره است که تابع درون‌یابی یکی از این گره‌ها برابر است با:

$$h_1= 0.3906\,(r+0.4472)(s+0.4472)\times(r-0.4472)(s-0.4472)(r-1.0)(s-1.0) \tag{۱۱}$$

چنان‌که r و s مختصه‌های ایزوپارامتریک هستند.

پس از تجمیع ماتریس‌های تمام سلول‌ها، به رابطه تعادل حاصل از روش سلول طیفی می‌رسیم:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{۱۲}$$

که $\mathbf{F}$ بردار نیرو و $\mathbf{K}$ ماتریس سختی کل سازه است.

شکل ۲. نمونه‌ای از گسسته‌سازی با روش چاردرختی

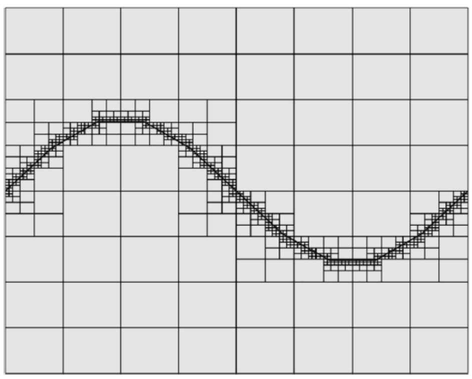

Fig. 2. A partitioning with quadtree method

در الگوریتم گسسته‌سازی چاردرختی، هر سلول اصلی که توسط مرز ناحیه قطع می‌شود به چهار زیرسلول یکسان تقسیم می‌شود. هر زیرسلول نیز، در صورت تقاطع، دوباره به چهار زیر سلول تقسیم می‌شود. این مرحله تا دستیابی به دقت مورد نظر یا تعداد سطح تقسیمات از پیش تعریف‌شده، مداوم تکرار خواهد شد تا هندسه دامنه فیزیکی با دقت مناسبی پیاده‌سازی شود.

۳- روش سلول طیفی تصادفی

۳-۱- فرمول‌بندی

در این بخش نخست فرمول‌بندی روش سلول طیفی تصادفی (روش پیشنهادی) برای مسائل الاستواستاتیک توسعه داده می‌شود. سپس حل عددی معادله انتگرالی فردهلم با استفاده از روش سلول طیفی توسعه می‌یابد چراکه در بسط کارهیونن‌لو برای روش سلول طیفی تصادفی استفاده خواهد شد.

چنانچه ضریب الاستیسته یک میدان تصادفی باشد، ماتریس الاستیسیته تصادفی را می‌توان به‌گونه زیر نشان داد:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x},\theta) = E(\mathbf{x},\theta)\mathbf{C_0} \tag{۱۳}$$

که در آن ماتریس الاستیسیته مضربی از یک ماتریس ثابت $\mathbf{C_0}$ است. با تجزیه میدان تصادفی با بسط کارهیونن‌لو، می‌توان نوشت:

$$E(\mathbf{x},\theta) = \alpha_0\bar{E}(\mathbf{x}) + \alpha_f\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\,\varphi_i(\mathbf{x})\xi_i(\theta) \tag{۱۴}$$

به گونه‌ای که نخستین جمله بخش میانگین و جمله دوم بخش نوسانی میدان تصادفی را نشان می‌دهد. مقادیر ویژه و توابع ویژه با حل عددی معادله انتگرالی فردهلم به‌دست می‌آید. مقادیر α_0 و α_f به‌ترتیب متناظر با مقادیر میانگین و نوسانی دامنه فیزیکی هستند. بنابراین ماتریس سختی هر سلول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{K}_0^c + \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{K}_i^c\,\xi_i(\theta) \tag{۱۵}$$

که در آن

$$\mathbf{K}_0^c = \int_{\Omega^c}\alpha_0\bar{E}(\mathbf{x})\mathbf{B}^{c\mathrm{T}}\mathbf{C}_0\mathbf{B}^c\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۶}$$

و

$$\mathbf{K}_i^c = \sqrt{\lambda_i}\int_{\Omega^c}\alpha_f\varphi_i(\mathbf{x})\mathbf{B}^{c\mathrm{T}}\mathbf{C}_0\mathbf{B}^c\,\mathrm{d}\Omega \tag{۱۷}$$

بدیهی است که از الگوریتم چاردرختی با انتگرال‌گیری عددی گاوس–لوباتو–لژاندر برای محاسبه این انتگرال‌ها استفاده می

[DOI: 10.22034/23.5.10]

شود. بنابراین با استفاده از معادله تعادل استاتیکی، داریم:

$$\left(\sum_{i=0}^{M}\mathbf{K}_i\xi_i(\theta)\right)\mathbf{U}(\theta)=\mathbf{F} \qquad (۱۸)$$

از سوی دیگر، جابه‌جایی‌ها را می توان با چندجمله‌ای‌های آشوبی تعمیم داد:

$$\mathbf{U}(\theta)=\sum_{j=0}^{P}\mathbf{U}_j\psi_j(\boldsymbol{\xi}) \qquad (۱۹)$$

اکنون چنانچه M جمله از بسط کارهیونن‌لو و P جمله از بسط چندجمله‌ای آشوبی برداشته شود، به مانده زیر می‌رسیم:

$$\left(\sum_{i=0}^{M}\mathbf{K}_i\xi_i(\theta)\right)\left(\sum_{j=0}^{P}\mathbf{U}_j\psi_j(\boldsymbol{\xi})\right)-\mathbf{F}=\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۰)$$

برای کمینه‌سازی این مانده، باید طرفین معادله بر فضای ایجادشده با بسط چندجمله‌ای آشوبی متعامد باشد. بنابراین با ضرب جمله kام در طرفین و گرفتن امید ریاضی، خواهیم داشت:

$$\langle\psi_k(\theta)\left(\sum_{i=0}^{M}\mathbf{K}_i\xi_i(\theta)\right)\left(\sum_{j=0}^{P}\mathbf{U}_j\psi_j(\boldsymbol{\xi})\right)\rangle=\langle\psi_k(\theta)\mathbf{F}\rangle \qquad (۲۱)$$

درنتیجه همتای تصادفی معادله (۱۲) برابر است با:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{st}}\mathbf{U}_{\mathrm{st}}=\mathbf{F}_{\mathrm{st}} \qquad (۲۲)$$

به‌گونه‌ای که

$$\mathbf{K}_{\mathrm{st}}^{k}=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{P}\langle\xi_i(\theta)\psi_j(\theta)\psi_k(\theta)\rangle\mathbf{K}_i \qquad (۲۳)$$

و

$$\mathbf{F}_{\mathrm{st}}^{k}=\langle\psi_k(\theta)\mathbf{F}\rangle \qquad (۲۴)$$

که $\mathbf{K}_{\mathrm{st}}$ و $\mathbf{F}_{\mathrm{st}}$ به ترتیب ماتریس سختی و بردار نیرو در فضای تصادفی هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، دستگاه معادلات تصادفی در رابطه (۲۲) به اندازه P+1 برابر دستگاه معادلات تعینی همتای خود است:

$$P+1=\frac{(M+p)!}{M!\,p!} \qquad (۲۵)$$

چنان‌که در آن p مرتبه چندجمله‌ای آشوبی است.

برای محاسبه آمار پاسخ، میانگین و واریانس جابه‌جایی با روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}]=\mathbf{u}_0 \qquad (۲۶)$$

و

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\sum_{j=1}^{P}\langle\psi_j^2\rangle\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^T \qquad (۲۷)$$

۲-۳- حل عددی معادله انتگرالی فردهلم

روش‌های گوناگونی برای حل عددی معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم پیشنهاد شده است که از میان آن‌ها می‌توان روش‌های المان محدود، المان طیفی، تحلیل ایزوژئومتریک و سلول محدود را نام برد [4, 6, 12, 14, 17]. با توجه به اینکه روش سلول طیفی تصادفی از روش سلول طیفی برای حل این معادله استفاده می‌کند، نیاز است تا روابط ریاضی با این رویکرد نیز توسعه یابد. برای حل به روش سلول طیفی باید معادله انتگرالی فردهلم به صورت زیر نوشته شود:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{ed}}}\alpha_C(\mathbf{x},\mathbf{x}')C_{\hat{H}\hat{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\ \varphi_n(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{x}'}=\alpha_B(\mathbf{x})\lambda_n\varphi_n(\mathbf{x}) \qquad (۲۸)$$

که در آن λ_n و $\varphi_n(\mathbf{x})$ به ترتیب مقدار ویژه و تابع ویژه مود nام است. همچنین می‌توان تابع ویژه را با توابع شکلی طیفی به صورت زیر بسط داد:

$$\varphi_n(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{\infty}h_i(\mathbf{x})d_i^n \qquad (۲۹)$$

که با استفاده از آن، ضرب طرفین معادله در تابع شکلی jام و گرفتن امید ریاضی از طرفین، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}}\sum_{i=1}^{N}\left[\left[\int_{\Omega_{\mathbf{x}'}}\alpha_C(\mathbf{x},\mathbf{x}')C_{\hat{H}\hat{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}')h_i(\mathbf{x}')\mathrm{d}\Omega_{\mathbf{x}'}-\alpha_B(\mathbf{x})\lambda_n h_i(\mathbf{x})\right]d_i^n\ h_j(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{x}}=0\right. \qquad (۳۰)$$

چنان‌که

$$\alpha_C(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\begin{cases}1 & (\mathbf{x}\in\Omega)\wedge(\mathbf{x}'\in\Omega)\\ 0 & (\mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{ed}}\backslash\Omega)\vee(\mathbf{x}'\in\Omega_{\mathrm{ed}}\backslash\Omega)\end{cases} \qquad (۳۱)$$

و

$$\alpha_B(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \mathbf{x}\in\Omega\\ \varepsilon_0 & \mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{ed}}\backslash\Omega\end{cases} \qquad (۳۲)$$

پس از انجام گسسته‌سازی و عملیات جبری، مسئله مقدار ویژه گسسته زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{CD}=\mathbf{BD\Lambda} \qquad (۳۳)$$

[DOI: 10.22034/23.5.10]

که $\mathbf{D}$ و $\mathbf{\Lambda}$ به ترتیب ماتریس بردارهای ویژه و ماتریس مقادیر ویژه هستند.

حل به این روش موجب می‌شود که نیازی به تشکیل توابع ویژه نباشد زیرا در روش سلول طیفی نقاط انتگرال‌گیری روی نقاط گرهی قرار دارند؛ در نتیجه مزیت بیشتری نسبت به حل با روش سلول محدود خواهد داشت.

٤- نمونه‌های عددی

در این بخش، دو نمونه عددی مبنا برای ارزیابی روش سلول طیفی تصادفی و حل عددی معادله انتگرالی فردهلم بررسی می شوند. این مسائل مبنا پیش از این با روش‌های المان محدود تصادفی، المان طیفی تصادفی، و سلول محدود تصادفی حل شده‌اند [5, 14, 18]. تابع همبستگی به صورت نمایی فرض می شود. همچنین ضریب الاستیسیته با میدان تصادفی گاوسی و تابع کواریانس نمایی توصیف شده است. تعداد جملات بسط کارهیونن‌لو و چندجمله‌ای آشوبی به ترتیب ٦ و ٣ هستند. از سلول طیفی مرتبه سوم استفاده شده است.

٤-١- غشای کوک

این نمونه عددی به تحلیل تصادفی سازه کوک می‌پردازد که در شکل (٣) نشان داده شده است. مقدار متوسط ضریب ارتجاعی و انحراف معیار آن برای این سازه تنش مسطح به ترتیب ١ و ٠/١ است. طول همبستگی در راستای دو محور اصلی x و y به ترتیب برابر ٤٨ و ٦٠ است. برایند بار سطحی وارد شده برابر مقدار واحد، و ضریب پواسن برابر ٠/٣٣ است.

از دو نوع شبکه با دو سطح پالایش چاردرختی برای مقایسه استفاده شده است. همان‌گونه که در جدول (١) مشاهده می‌شود، مقادیر ویژه حاصل از روش سلول طیفی با هر دو شبکه نسبت به حل با روش‌های دیگر دقت مناسبی دارد. افزون بر این، با توجه به مقادیر ویژه، مشاهده می‌شود که دقت حل این معادله انتگرالی بیشتر وابسته به تعداد درجات آزادی است تا سطح پالایش چاردرختی. همچنین در جدول (٢) میانگین و انحراف معیار جابه‌جایی نقطه A با نتایج روش‌های دیگر مقایسه شده است، که همخوانی مناسبی با نتایج پژوهش‌های گذشته [4, 5, 14] مشاهده می‌شود. گفتنی است که روش‌های المان محدود تصادفی و المان طیفی تصادفی از شبکه مورب[1] برای حل این مسئله استفاده می‌کنند، اما روش پیشنهادی از شبکه کارتزین بهره می‌جوید.

شکل ٣. غشای کوک

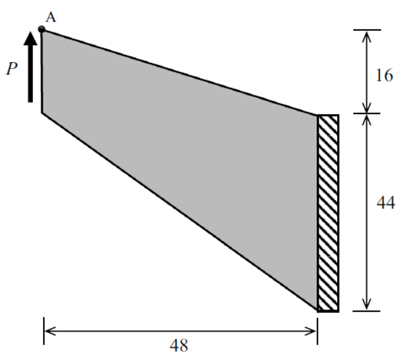

Fig. 3. Cook's membrane

جدول ١. مقادیر ویژه محاسبه‌شده برای غشای کوک

Mode number	Eigenvalues									
	FEM [5]	SFEM [5]	FCM [14]				SCM			
	Mesh 12×8 (distorted)	Mesh 3×2 (distorted)	Mesh 6×8		Mesh 12×16		Mesh 3×4		Mesh 6×8	
			$k = 3$	$k = 4$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 4$	$k = 5$
1	875.2335	879.3547	879.4268	877.4833	877.3155	876.3058	880.5349	878.5941	879.9246	877.9817
2	202.1285	205.7641	203.2473	202.7703	202.6721	202.4204	204.1946	203.7173	203.6388	203.1626
3	66.7507	69.7813	67.2191	67.0017	66.9690	66.8723	68.1686	67.9561	67.6220	67.4083
4	58.9065	60.9066	59.4620	59.1859	59.1921	59.0531	59.8930	59.6143	59.6481	59.3703
5	31.7229	34.4315	31.9590	31.7897	31.9002	31.8204	32.8349	32.6783	32.3437	32.1763
6	28.0920	30.9499	28.1728	28.0567	28.1858	28.1432	29.5829	29.4661	28.7513	28.6349

Table 1. Eigensolutions obtained for the Cook's membrane

١ Distorted mesh

[DOI: 10.22034/23.5.10]

جدول ۲. جابه‌جایی قائم نقطه A برای غشای کوک

Point	Measure	StFEM [5]	StSFEM [5]	SFCM [14]				SSCM			
		Mesh 12×8 (distorted)	Mesh 3×2 (distorted)	Mesh 6×8		Mesh 12×16		Mesh 3×4		Mesh 6×8	
				$k = 3$	$k = 4$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 4$	$k = 5$
A	Mean	23.7773	24.9384	24.5173	24.5789	24.2455	24.3210	24.9199	25.0605	25.4724	25.4840
	Standard deviation	1.8806	1.9997	1.9351	1.9403	1.9131	1.9191	1.9620	1.9723	2.0023	2.0018

Table 2. Vertical displacement at point A on the Cook's membrane

شکل ٤. میدان‌های جابه‌جایی میانگین برای غشای کوک

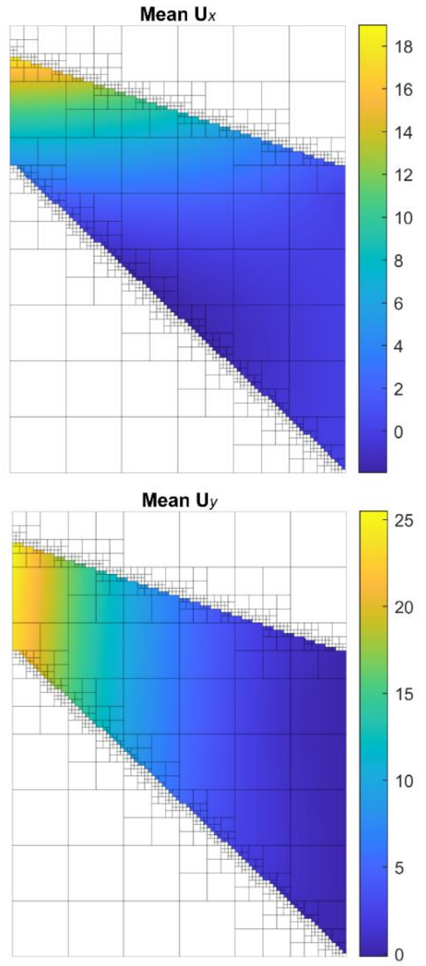

Fig. 4. Mean of displacement fields for the Cook's membrane

شکل ۵. میدان‌های جابه‌جایی انحراف معیار برای غشای کوک

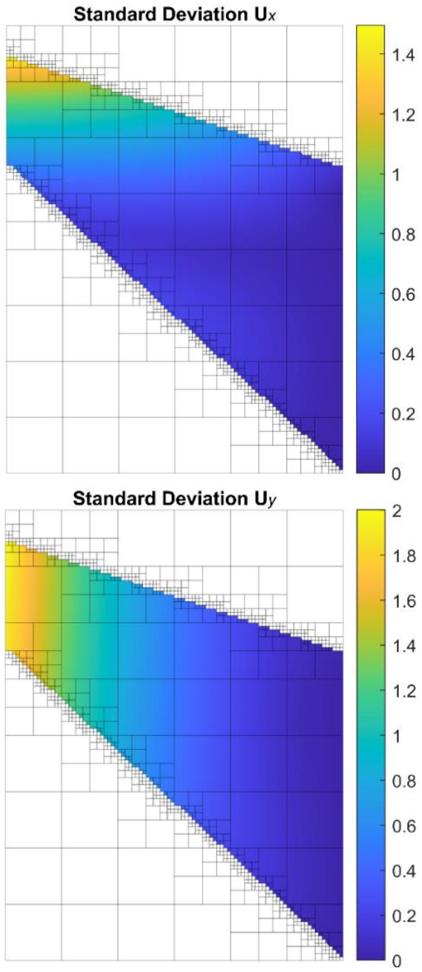

Fig. 5. Standard deviation of displacement fields for the Cook's membrane

شکل‌های (٤ و ۵) میدان‌های میانگین و انحراف معیار جابه‌جایی، حاصل از نتایج شبکه ریزتر با سطح پالایش بالاتر (شبکه 8×6 با سطح پالایش 5)، را نمایش می‌دهند. مقایسه این شکل‌ها با نتایج منابع [5, 14] نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دقت مناسبی دارد. در این شکل‌ها، خطوط خاکستری کمرنگ شبکه انتخابی را همراه با زیرسلول‌های حاصل از الگوریتم چاردرختی نشان می‌دهند.

۲-٤- صفحه حفره‌دار

این نمونه مبنا شامل تحلیل یک صفحه تنش‌مسطح دارای بارهای گسترده کششی با روش سلول طیفی تصادفی است که جزئیات بارگذاری آن در منبع [18] آمده است. مبدأ مختصات مرکز حفره بوده و جابه‌جایی قائم گره A در حاشیه حفره به مختصات (۲، ۰) مدنظر است. مقدار متوسط و انحراف معیار ضریب ارتجاعی به‌ترتیب $۱۰^{٤}$ و $۲×۱۰^{۳}$ تعریف شده‌اند. صفحه با ضخامت واحد

[DOI: 10.22034/23.5.10]

درنظر گرفته شده و طول همبستگی در هر دو راستای اصلی ۱۲ واحد است. جدول (۳) مقادیر ویژه بسط کارهیونن‌لو را با دو نوع شبکه دارای دو سطح پالایش چاردرختی مقایسه می‌کند. مقادیر ویژه حاصل از روش سلول طیفی با هر دو شبکه نسبت به حل روش‌های دیگر دقت مناسبی دارد.

شکل ٦. صفحه حفره‌دار

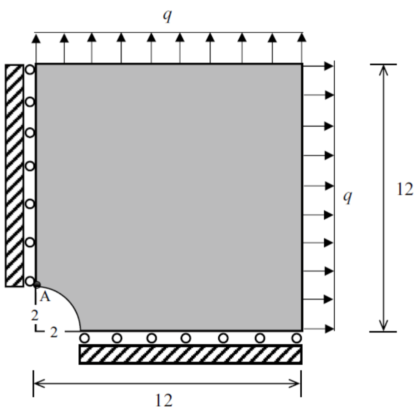

Fig. 6. A Plate with hole

البته بدیهی است که برای شبکه درشت‌تر دقت کمتری مشاهده می‌شود اما این دقت کمتر در رقم‌های اعشاری بالاتر مشهود است. همچنین جابه‌جایی قائم نقطه A (شکل ٦، در همسایگی حفره) در جدول (٤) مقایسه شده است که سازگاری مناسبی با نتایج پژوهش گذشته (روش سلول محدود تصادفی [14]) دارد. میدان‌های جابه‌جایی متوسط و انحراف معیار در شکل‌های (۷ و ۸) آمده‌اند. برای اختصار، تنها میدان‌های جابه‌جایی ناشی از شبکه ریزتر با سطح پالایش بالاتر (شبکه ٦×٦ با سطح پالایش ٦) نمایش داده شده‌اند.

در شکل‌های (۹ و ۱۰) به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی برای جابه‌جایی قائم گره A محاسبه و ترسیم شده‌اند، که براساس نتایج تحلیل با شبکه ٦×٦ و دو سطح پالایش ٥ و ٦ هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در مقایسه با روش سلول محدود تصادفی [14] و روش المان محدود تصادفی [18]، روش سلول طیفی تصادفی دقت خوبی در محاسبه این توابع احتمالاتی دارد.

شکل ۷. میدان‌های جابه‌جایی میانگین برای صفحه حفره‌دار

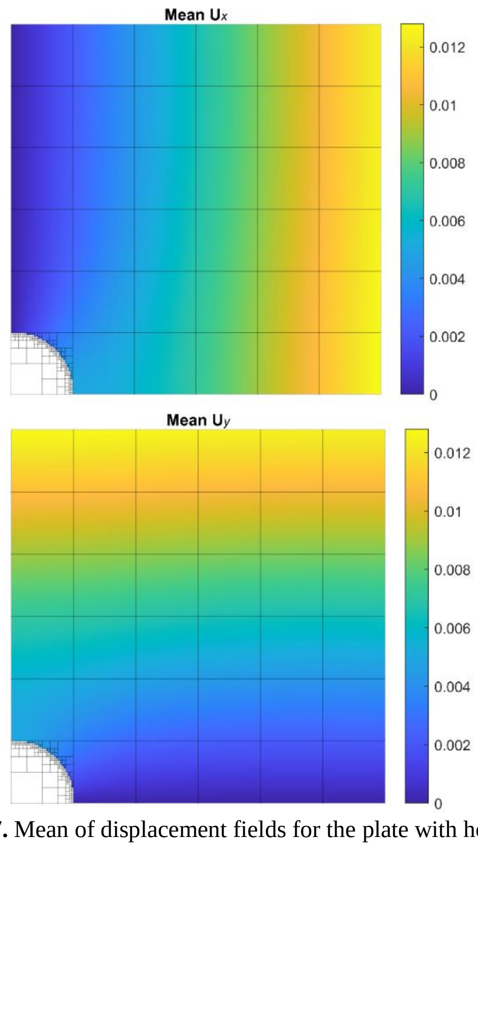

Fig. 7. Mean of displacement fields for the plate with hole

شکل ۸. میدان‌های جابه‌جایی انحراف معیار برای صفحه حفره‌دار

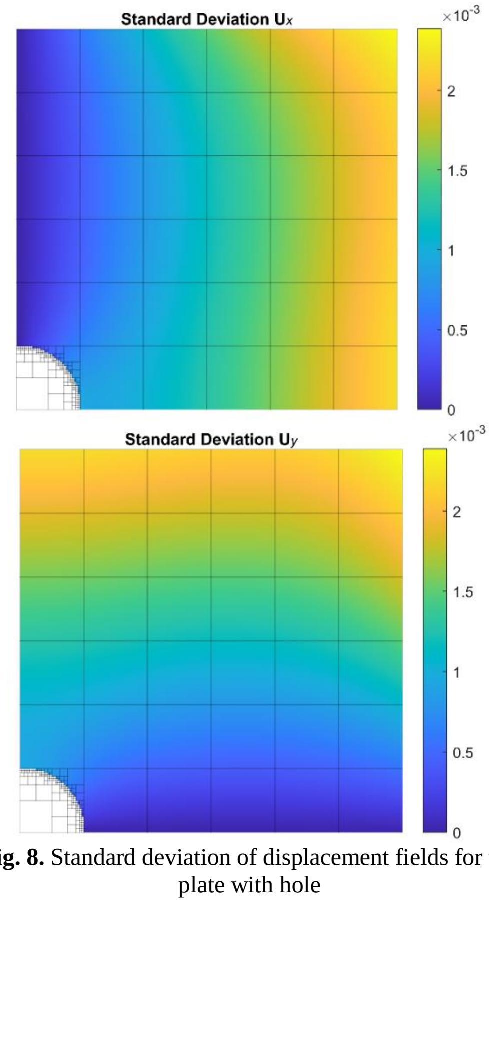

Fig. 8. Standard deviation of displacement fields for the plate with hole

[DOI: 10.22034/23.5.10]

جدول ۳. مقادیر ویژه محاسبه‌شده برای صفحه حفره‌دار

Mode number	Eigenvalues							
	FCM [14]				SCM			
	Mesh 6×6		Mesh 12×12		Mesh 4×4		Mesh 6×6	
	$k=5$	$k=6$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=5$	$k=6$
1	77.5171	77.5190	77.4781	77.4800	77.7774	77.7833	77.6039	77.6116
2	14.7097	14.7097	14.6889	14.6889	14.8829	14.8829	14.7703	14.7703
3	13.8498	13.8511	13.8307	13.8320	13.9823	13.9863	13.9011	13.9064
4	4.8087	4.8088	4.7995	4.7995	4.9751	4.9751	4.8735	4.8735
5	4.5599	4.5601	4.5519	4.5522	4.7073	4.7082	4.6201	4.6212
6	2.6031	2.6033	2.5988	2.5990	2.6740	2.6746	2.6292	2.6299

Table 3. Eigensolutions obtained for the plate with hole

جدول (٤) جابه‌جایی قائم نقطه A برای صفحه حفره‌دار

Point	Measure	Collocation-based StFEM [18]	SFCM [14]				SSCM			
			Mesh 6×6		Mesh 12×12		Mesh 4×4		Mesh 6×6	
			$k=5$	$k=6$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=5$	$k=6$
A	Mean	0.4891E-2	0.4990 E-2	0.4985 E-2	0.5095 E-2	0.5094 E-2	0.5636 E-2	0.5543 E-2	0.5123 E-2	0.5105 E-2
	Standard deviation	0.08E-2	0.0920 E-2	0.0919 E-2	0.0937 E-2	0.0936 E-2	0.1013 E-2	0.0998 E-2	0.0944 E-2	0.0941 E-2

Table 4. Vertical displacement at point A on the plate with hole

شکل ۹– تابع چگالی احتمال برای جابه‌جایی قائم نقطه A برای صفحه حفره‌دار

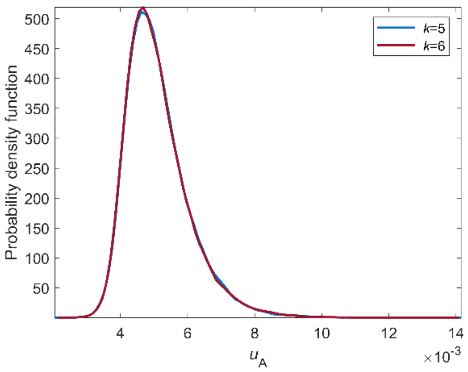

Fig. 9. Probability density function for vertical displacement at point A on the plate with hole

شکل ۱۰. تابع توزیع تجمعی برای جابه‌جایی قائم نقطه A برای صفحه حفره‌دار

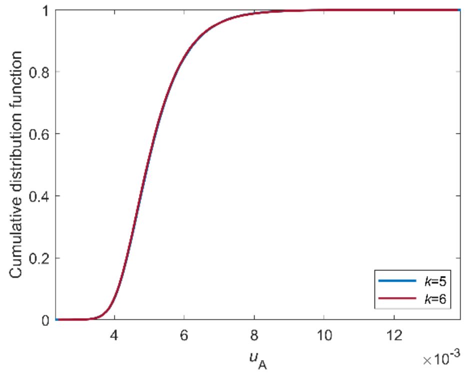

Fig. 10. Cumulative distribution function for vertical displacement at point A on the plate with hole

۵- نتیجه‌گیری

این پژوهش روش سلول طیفی تصادفی را برای حل مسائل الاستواستاتیک توسعه می‌دهد. در این راستا، ابتدا فرمول‌بندی حل عددی معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم ناشی از بسط کارهیونن‌لو با روش سلول طیفی ارائه شده است، و سپس روش سلول طیفی تصادفی برای حل مسئله الاستواستاتیک با لحاظ عدم‌قطعیت مصالح توسعه داده شده است. روش سلول طیفی تصادفی از توابع درون‌یابی لاگرانژ و نقاط گاوس–لوباتو–لژاندر، که منجر به توابع شکل مرتبه بالا می‌شود، بهره می‌جوید. روش پیشنهادی دارای مزیت‌های قابل‌توجهی نسبت به المان محدود تصادفی سنتی است که ازجمله می‌توان استفاده از تعداد المان کمتر، حل عددی کارآمد بسط کارهیونن‌لو، دقت مناسب در مسائل استاتیکی، تحلیل موثر سازه دارای هندسه پیچیده، و استفاده از شبکه کارتزین را نام برد. همچنین برخلاف روش سلول محدود تصادفی، روش پیشنهادی نیازی به تشکیل توابع ویژه ندارد که این ویژگی منجر به افزایش سرعت حل عددی

[DOI: 10.22034/23.5.10]

معادله انتگرالی فردهلم می‌شود و در کاهش زمان کل تحلیل تصادفی نقش دارد. از سویی دیگر، محاسبات نشان می‌دهد که حل عددی معادله انتگرالی فردهلم وابستگی چندانی به سطح پالایش نداشته و بیشتر به تعداد درجات آزادی بستگی دارد (وابسته به تعداد سلول‌های طیفی). با توجه به نمونه‌های عددی حل‌شده، مشاهده می‌شود که روش سلول طیفی تصادفی می‌تواند دقت و کارایی مناسبی در حل مسائل الاستواستاتیک ارائه دهد.

٦- سپاسگزاری

این اثر تحت پشتیبانی مادی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) برگرفته از طرح شماره ٤٠٠٣٤١٠ انجام شده است.

۷- منابع

[1] Kaminski M. The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics Hoboken: Wiley; 2013.

[2] Ghanem RG, Spanos PD. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach: Dover Publications; 2003.

[3] Stefanou G. The stochastic finite element method: Past, present and future. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2009;198:1031-51.

[4] Zakian P, Khaji N. A novel stochastic-spectral finite element method for analysis of elastodynamic problems in the time domain. Meccanica. 2016;51:893-920.

[5] Khaji N, Zakian P. Uncertainty analysis of elastostatic problems incorporating a new hybrid stochastic-spectral finite element method. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2017;24:1030-42.

[6] Zakian P, Khaji N, Kaveh A. Graph theoretical methods for efficient stochastic finite element analysis of structures. Computers & Structures. 2017;178:29-46.

[7] Zakian P, Khaji N. A stochastic spectral finite element method for wave propagation analyses with medium uncertainties. Applied Mathematical Modelling. 2018;63:84-108.

[8] Zakian P, Khaji N. A stochastic spectral finite element method for solution of faulting-induced wave propagation in materially random continua without explicitly modeled discontinuities. Computational Mechanics. 2019;64:1017-48.

[9] Parvizian J, Düster A, Rank E. Finite cell method. Computational Mechanics. 2007;41:121-33.

[10] Komatitsch D, Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. Geophysical Journal International. 1999;139:806-22.

[11] Komatitsch D, Vilotte J-P, Vai R, Castillo-Covarrubias JM, Sánchez-Sesma FJ. The spectral element method for elastic wave equations—application to 2-D and 3-D seismic problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999;45:1139-64.

[12] Li K, Gao W, Wu D, Song C, Chen T. Spectral stochastic isogeometric analysis of linear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018;332:157-90.

[13] Li K, Wu D, Gao W, Song C. Spectral stochastic isogeometric analysis of free vibration. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019;350:1-27.

[14] Zakian P. Stochastic finite cell method for structural mechanics. Computational Mechanics. 2021;68:185-210.

[15] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005;194:4135-95.

[16] Joulaian M, Duczek S, Gabbert U, Düster A. Finite and spectral cell method for wave propagation in heterogeneous materials. Computational Mechanics. 2014;54:661-75.

[17] Oliveira SP, Azevedo JS. Spectral element approximation of Fredholm integral eigenvalue problems. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014;257:46-56.

[18] Huang S, Mahadevan S, Rebba R. Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems. Probabilistic Engineering Mechanics. 2007;22:194-205.

[DOI: 10.22034/23.5.10]

Stochastic analysis of elastostatic problems with material uncertainty using spectral cell method

P. Zakian*

Associate Professor of Earthquake Engineering, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, Iran

p-zakian@araku.ac.ir*

Abstract

Nowadays, advances in numerical methods have led to model real-life physical problems effectively. One of the difficulties in modelling the real-life physical problems is the geometric creation, because the mesh definition for a complex geometry is hard. In order to overcome this issue, one can use the spectral cell method due to employing a Cartesian mesh even for a complex geometry, such that constant Jacobian is considered for cells in the mesh. Spectral cell method is a combination of the spectral element method and the fictious domain concept, which uses an adaptive integration employing the quadtree or octree partitioning for the cells intersecting arbitrary boundaries as well as the cells including nonuniform material distribution. The interpolation functions of Lobatto family of spectral elements are utilized in spectral cell method. The spectral cell method is an efficient numerical method to solve the governing equations of continuum structures with complicated geometries. On the other hand, uncertainty naturally exists in the parameters of an engineering system (e.g., elastic modulus) and the input of that system (e.g., loading). Thus, the effects of those uncertainties are important in the response calculation of the engineering system. There are two types of uncertainty: aleatoric and epistemic. Aleatoric uncertainty is defined as an intrinsic variability of certain quantities, while epistemic uncertainty is defined as a lack of knowledge about certain quantities. An alternative to a deterministic modelling is a stochastic modelling, but analysing such a stochastic model is harder than a deterministic model having deterministic material properties and configuration. This is because the behaviour of the stochastic model is inevitably stochastic. Traditionally, Monte-Carlo simulation analyses a stochastic model by generating numerous realizations of the stochastic problem, and then solves each one like a deterministic problem. Nevertheless, Monte-Carlo simulation needs very high computational cost, particularly for large-scale problems. A systematic technique for uncertainty quantification is the stochastic finite element method providing a variety of statistical information. However, the method is computationally expensive with respect to the finite element method, and thus there are many developments for stochastic methods. Consequently, this paper presents stochastic form of spectral cell method to solve elastostatic problems considering material uncertainties. Therefore, uncertainty quantification of an elastostatic problem with geometrically complex domain can be modelled more efficiently than the traditional stochastic finite element method. In the proposed method, Fredholm integral equation is discretised using spectral cell method to solve Karhunen-Loève expansion used for the random field decomposition. Also, this method uses fewer cells than the stochastic finite cell method, and does not require formation of the eigenfunctions. In addition, Karhunen-Loève and polynomial chaos expansions are used to decompose the random field and to consider the response variability, respectively. Simple mesh generation, desirable accuracy and computational cost are the main features of the present method. In this study, two benchmark numerical examples are provided to demonstrate the efficiency and capabilities of the proposed method in the solution of elastostatic problems. The results are compared to those of stochastic finite element method and stochastic spectral element method.

Keywords: Elastostatic problem, Stochastic spectral cell method, Probabilistic structural analysis, Fredholm integral equation, Material uncertainty.

[DOI: 10.22034/23.5.10]