مجله علمی- پژوهشی
«عمـــران مـــدرس»
دوره یازدهم، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰

ارائه براورد کننده خطا در روش بدون شبکه کمینه مربعات گسسته همپوش

محمد هادی افشار[1*]، محسن لشکربلوک[2]

۱- دانشیار دانشکده عمران دانشگاه علم و صنعت ایران ، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه علم و صنعت ایران ، تهران

mhafshar@iust.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۸٦/۰۲/۱۲ **تاریخ پذیرش: ۱۳۸٦/۰۷/۲۲**

چکیده- استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل مستلزم آگاهی از اندازه خطاهای احتمالی است. براوردکننده‌ی خطا در روش‌های عددی ابزاری کارامد برای اطمینان از جهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. در این مقاله در ابتدا یک براوردکننده خطا در روش بدون شبکه کمینه مربعات گسسته همپوش[1] ارائه‌شده است. براوردکننده خطای ارائه شده از نظر محاسباتی به‌گونه‌ایست که به‌راحتی قابل کاربرد در برنامه‌های موجود در روش CDLS است. سپس با استفاده از این براوردکننده خطا به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جواب‌های روش CDLS پرداخته شده است. بدین منظور مسائل متعددی در حوزه مکانیک سیالات از نوع هذلولوی به وسیله‌ی روش CDLS حل شده است.

کلیدواژگان: روش‌های بدون شبکه، براوردکننده خطا، نقاط همپوش، معادلات هذلولوی

۱- مقدمه

تحلیل مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک و مسائلی که حین تحلیل دچار تغییر در هندسه حوزه می‌شود با استفاده از روش اجزاء محدود نیاز به یک فرایند مداوم شبکه‌بندی حوزه مسئله برای جلوگیری از انحراف فرایند حل به دلیل کج‌شکلی[2] شدید المان‌ها دارد. تولید شبکه فرایندی پرهزینه و مشکل است، به‌طوری‌که در بسیاری از مسائل دو یا سه‌بعدی با هندسه پیچیده، هزینه این فرایند قابل مقایسه با هزینه گسسته‌سازی معادلات و حل معادلات حاکم بر مسئله است.

بهترین راه حل برای تحلیل مسائل با ناپیوستگی‌های متحرک در روش‌های متکی بر شبکه استفاده از شبکه‌بندی مجدد با استفاده از نتایج تحلیل در مرحله قبل است. شبکه‌بندی مجدد در روش‌های متکی به شبکه با تغییر در بعد جزء و یا افزایش مرتبه تابع تقریب و گاهی نیز با اعمال هر دو انجام می‌شود. به‌کارگیری هریک از روش‌های تظریف[3] بعد از هر مرحله از تحلیل نیازمند براورد میزان خطا[4] در هر جزء است که به‌وسیله‌ی براوردکننده‌های خطا

1- Collocated Discreet Least Square (CDLS)
2- distortion
3- Refinement
4- Error Estimate

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

محاسبه می‌شود. مقادیر جواب یا مشتقات آن در روش‌های متکی به شبکه برای حصول دقت کافی نیازمند هموارسازی است که فرایندی پرهزینه به‌خصوص در مسائلی مانند اجزاء محدود سه‌بعدی و جریانات سطح آزاد است. برای رفع مشکلاتی از این نوع امروزه توجه بسیاری از محققین به روش‌های بدون شبکه معطوف شده‌است. اگرچه سابقه این روش‌ها بیش از یک دهه نیست ولی در سال‌های اخیر پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است.

اولین ایده استفاده از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار[1] (SPH) به‌وسیله‌ی گینگولد و مونگان [۱] برای مدل‌سازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده‌ابرهای غباری به‌کار گرفته شد. تحقیقات در زمینه روش‌های بدون شبکه بسیار فعال بوده است. به‌طوری‌که پس از انتشار مقاله روش جزئی پخش[2] به‌وسیله‌ی نایرول و توروت[۲] روش‌های زیادی به نام روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش بدون شبکه گالرکین[3] (EFG) به‌وسیله‌ی بلیتسکو و همکاران [۳]، روش باز تولید کرنل ذرات[4](RKPM) لیو و جان[٤]، روش اجزائ محدود افراز واحد[5] (PUFEM) بابوسکا و میلنک[۵] ، روش ابرهای HP[6] به‌وسیله‌ی دورت و اودن[٦] روش[7](MLPG) به وسیله‌ی آلتوری [۷] ، روش حداقل مربعات گسسته[8] (DLS) یه وسیله‌ی ارزانی و افشار [۸] و ....

براوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی ابزاری کارامد برای اطمینان ازجهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. اگر قسمت‌هایی از مسئله که نیاز به دقت بیشتری دارند مشخص شوند می‌توان با یک فرایند مناسب حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرد. لیو و تیو [۹] یک روش اقتباسی براساس سلول‌های زمینه‌ای برای براورد خطا در روش‌های بدون شبکه ارائه کرده‌اند. هسته اصلی این روش یک سلول برآورد کننده خطا است. در این روش مقدار خطا به جای یک نقطه در یک سلول محاسبه می‌شود. معیار خطای یک سلول از اختلاف بین نرم انرژی سلول مورد نظر و نرم انرژی در یک سلول مرجع که از انتگرال‌گیری گوسی محاسبه شده است به‌دست می‌آید. این روش در روش‌های بدون شبکه‌ای که از شبکه‌بندی زمینه‌ای استفاده می‌کنند کاربرد دارد. در این راستا گاویت [۱۰] نیز یک شاخص خطا برای روش بدون شبکه EFG ارائه داد. در این روش از این اصل که جواب‌ها در نقاط گوس دارای دقت بیشتری استفاده شده است. ایسک و همکارانش[۱۱] براورد کننده خطایی بر پایه درون‌یابی ارائه داده‌اند. در این روش از تفاضل بین جواب‌های هموار شده و جواب در نقاط گرهی به‌عنوان معیاری برای محاسبه خطا استفاده شده است. الانساری و اوزر [۱۲] براوردکننده خطایی برای روش‌های بدون شبکه اجزاء مرزی ارائه داده‌اند. در این روش از اختلاف بین مقادیر محاسبه‌شده گرهی و مقادیر نقاط گرهی در تابع برازش‌شده به روش[9] RBF به عنوان خطا در نقاط گرهی استفاده شده است.

از کارهای دیگری که در زمینه براورد خطا در روش‌های بدون شبکه انجام شده است می‌توان به اونگ جون و یامین چنگ [۱۳] برای روش FPM[10] ، هیوانگ و همکاران [۱٤] در روش MQ[11] و براورد کننده خطای ژیجی [۱۵] برای روش EFG اشاره کرد.

استفاده از نقاط همپوش[12] تکنیکی جدید و مؤثر در

1- Smooth Particle Hydrodynamic
2- Diffuse Element
3- Element Free Galerkin
4- Reproducing Kernel Particle Method
5- Partition of Unity Finite Element
6- HP-clouds
7- Meshless Local Petrov Galerkin
8- Discrete Least square
9- Radial Basis Function
10- Finite Point Method
11- Multiquadratic
12- Collocation

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

بهبود جواب‌ها در روش‌های بدون شبکه‌ای که در روند حل خود از انتگرال‌گیری استفاده نمی‌کنند، است. این نقاط فقط در گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند و ابعاد دستگاه معادلات نهایی و در نتیجه هزینه محاسباتی را افزایش نخواهند داد. بااین‌که افزایش این نقاط در بهبود جواب‌ها مؤثر است ولی تا به حال معیاری برای تعیین تعداد و موقعیت این نقاط ارائه نشده است. در این مقاله با استفاده از براوردکننده خطای ارائه‌شده به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جوابهای روش CDLS پرداخته شده است. بدین منظور مسائل متعددی در حوزه مکانیک سیالات از نوع هذلولوی به‌وسیله‌ی روش CDLS حل شده و خطای آن‌ها محاسبه شده است.

۲- فرمول‌بندی روش بدون شبکه CDLS

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$A(u)+q=0 \qquad in \quad \Omega \tag{۱}$$

شرط مرزی مشتقی به‌صورت زیر تعریف می شود:

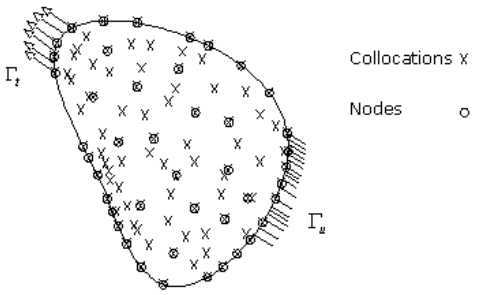
$$B(u)=\bar{t} \qquad in \quad \Gamma_t \tag{۲}$$

شرط مرزی طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$u=\bar{u} \qquad in \quad \Gamma_u \tag{۳}$$

که در آن A, B عملگرهای دیفرانسیلی است. q نیز نیروهای خارجی یا منابعی است که بر حوزه مسئله عمل می‌کند.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است حوزه مسئله و مرزهای آن به‌وسیله‌ی N نقطه گرهی گسسته‌سازی شده است. نقاط همپوش نیز به‌صورت کاملاً دلخواه در حوزه مسئله و در مرزها قرار گرفته است. باید توجه داشت که در هر نقطه گرهی حتماً یک نقطه همپوش نیز باید قرار گیرد. فرض کنید M_d تعداد نقاط همپوش در حوزه مسئله و M_u تعداد نقاط همپوش در مرز طبیعی و M_t تعداد نقاط همپوش در مرز مشتقی و M تعداد کل نقاط همپوش است.



شکل (۱) گسسته‌سازی حوزه مسئله در روش CDLS

مقدار تابع تقریب زننده u در یک نقطه همپوش مانند x_k را می‌توان رابطه زیر تعیین کرد:

$$u(x_k)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x_k)u_i \qquad (k=1\sim M) \tag{٤}$$

در رابطه بالا $\phi_i(x_k)$ مقدار تابع شکل نقطه iام به ازای x_k و n تعداد نقاط گرهی زیر حوزه‌ایست که x_k در آن قرار دارند. شکل این زیر حوزه به نوع تابع وزن به کاررفته در تولید توابع شکل، بستگی دارد. با جای‌گذاری رابطه (٤) در معادلات (۱)، (۲) و (۳) می‌توان مقدار باقیمانده‌ها را در حوزه مسئله $R^{(d)}$ و مرز مشتقی $R^{(t)}$ و مرز طبیعی $R^{(u)}$ به‌صورت زیر یافت.

$$\begin{aligned} R_k^{(d)} &= A(u_k)+q(x_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(\phi_j)u_j + q(x_k) \qquad (k=1\sim M_d) \end{aligned} \tag{٥}$$

$$\begin{aligned} R_k^{(t)} &= B(u_k)-\bar{t}(x_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} B(\phi_j)u_j - \bar{t}(x_k) \qquad (k=1\sim M_t) \end{aligned} \tag{٦}$$

$$\begin{aligned} R_k^{(u)} &= u_k-\bar{u} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\phi_j)u_j - \bar{u} \qquad (k=1\sim M_u) \end{aligned} \tag{٧}$$

تابعک J به‌عنوان مجموع مربعات باقی‌مانده‌ها

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{M_d}[R_k^{(d)}]^2+\alpha.\sum_{k=1}^{M_t}[R_k^{(t)}]^2+\beta.\sum_{k=1}^{M_u}[R_k^{(u)}]^2\right) \qquad (۸)$$

در رابطه (۸) k نشان‌دهنده شماره نقطه همپوش است. در حقیقت تابعک J مجموع مربعات باقی‌مانده‌ها در نقاط همپوش است.ضرایب α,β نشان‌دهنده اهمیت بزرگی باقی‌مانده‌های مرزی در مقایسه با باقی مانده‌های حوزه است. با مشتق گرفتن از تابعک J نسبت به پارامترهای مجهول به‌راحتی می‌توان به یک دستگاه معادلات متقارن $n\times n$ دست یافت و با استفاده از روش‌های معمول حل دستگاه معادلات پارامترهای مجهول را یافت. همان‌طور که مشاهده می‌شود ابعاد ماتریس ضرایب در روش CDLS به تعداد نقاط همپوش بستگی ندارد.

تمام روش‌های بدون شبکه نیازمند یک روش تقریب‌زننده تابع برای تولید توابع شکل است. روش‌های متعددی برای محاسبه توابع شکل در روشهای بدون شبکه ارائه شده است. برای مثال می‌توان به روش‌های تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک[1] (MLS) به‌وسیله‌ی لندکستر و سالکاسکا [۱۶]، روش درون‌یابی شعاعی[2] (RPIM) به‌وسیله‌ی لیو و جیو [۱۷] و درون‌یابی رایگینگبه وسیله‌ی لی و جیو [۱۸] اشاره کرد. در روش بدون شبکه CDLS از روش کمینه‌ی مربعات متحرک وزنی برای تولید توابع شکل استفاده می‌شود. در ادامه نحوه تولید توابع شکل MLS ارائه می‌شود.

۳-کمینه‌ی مربعات متحرک وزنی برای محاسبه توابع شکل

در روش کمینه مربعات متحرک، تابع تخمین‌زننده $u^h(x)$ به‌وسیله‌ی حاصل‌ضرب داخلی یک بردار چندجمله‌ای $p(x)$ در یک بردار ضرایب $a(x)$ حاصل می‌شود.

$$u^h(x)=p^T(x).a(x)=\sum_{i=1}^{m}p_i(x).a_i(x) \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، m تعداد تک‌جمله‌ای‌های است که داخل بردار چند جمله‌ای $p(x)$ به‌کار رفته‌اند. برای تعیین ضرایب مجهول $a(x)$ ابتدا تابعک وزن‌دار $J(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(x)=\sum_{i=1}^{n}w_i(x).\left[p^T(x_i).\alpha(x)-u_i\right]^2 \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا $w_i(x)$ نشان‌دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گرهی i و مقدار داخل کلوشه اختلاف بین مقدار تخمین زده‌شده در نقطه i و مقدار داده‌شده در همان نقطه می باشد. همچنین n تعداد نقاط در حوزه اثر تابع w است. تابع وزن $w_i(x)=w(x-x_i)=w(d)$ مقادیر غیرصفری در حوزه تأثیر خود خواهد داشت.

برای هر نقطه، $d_{\max}$ باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که تعداد وزن‌های غیرصفر، بزرگ‌تر از تعداد تک‌جمله‌های موجود در چند جمله‌ای باشند. در این پژوهش از تابع وزنی اسپیلاین مرتبه سوم که در رابطه (۱۱) آمده است به‌عنوان تابع وزنی استفاده شده است.

$$w(x-x_j)=w(\bar{d})=\begin{cases}\frac{2}{3}-4\bar{d}^2+4\bar{d}^3 & \text{for } \bar{d}\le\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4\bar{d}+4\bar{d}^2-\frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2}\le\bar{d}\le 1\\ 0 & \text{for } \bar{d}>1\end{cases} \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)، $\bar{d}=\|x-x_j\|/d_{\max}$ و $d_{\max}$ شعاع تأثیر نقطه گرهی x_j است.

رابطه (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

1- Moving Least Square
2- Radial Point Interpolation Method

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

$$J = (P.a - u)^T W.(P.a - u) \tag{۱۲}$$

$$u^T = (u_1, u_2, ..., u_n)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|) \end{bmatrix} \tag{۱٤}$$

برای پیدا کردن ضرایب نقاط کافیست اکسترمم تابعک J محاسبه شود.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial a} = A(x).a(x) - B(x)u = 0 \tag{۱۵}$$

$$A(x) = P^T W.P \tag{۱٦}$$

$$B(x) = P^T W \tag{۱۷}$$

بنابراین می توان ضرائب $a(x)$ را طبق رابطه زیر یافت:

$$a(x) = A^{-1}(x).B(x)u \tag{۱۸}$$

حال تابع تخمین‌زننده $u^h(x)$ را می‌توان طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) u_i \tag{۱۹}$$

$$\phi = P^T(x).A^{-1}(x).B(x) \tag{۲۰}$$

$$\phi = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x).....\phi_n(x)]. \tag{۲۱}$$

که در آن ϕ_iها توابع شکل MLS است.

همچنین مشتقات توابع شکل با معلوم بودن خود توابع به راحتی به‌دست می‌آیند.

۴- الگوریتم گسسته‌سازی معادلات هذلولوی

شکل دیورژانس دستگاه معادلات دیفرانسیلی هذلولوی تحت شرایط مرزی و آغازین به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\underline{U}_{,t} + \underline{F}_{,x} = \underline{\underline{G}}\,\underline{U} \tag{۲۲}$$

در این‌جا $\underline{U}$ بردار مجهولات، $\underline{F}$ بردار مقادیر شار به‌صورت تابعی از $\underline{U}$، و $\underline{\underline{G}}$ ماتریس ضرایب ثابت در سمت راست است. شکل شبه‌خطی معادله بالا به‌صورت زیر است.

$$\underline{U}_{,t} + \underline{\underline{A}}\,\underline{U}_{,x} = \underline{\underline{G}}\,\underline{U} \tag{۲۳}$$

که در آن $\underline{\underline{A}} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}}$ ماتریس ژاکوبین است. با به‌کارگیری گسسته‌سازی پسر و در زمان برای معادله بالا داریم:

$$\underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n + \Delta t \begin{bmatrix} \theta(\underline{\underline{A}}^{n+1}\underline{U}_{,x}^{n+1} - \underline{\underline{G}}\,\underline{U}^{n+1}) + \\ (1-\theta)(\underline{\underline{A}}^n\underline{U}_{,x}^n - \underline{\underline{G}}\,\underline{U}^n) \end{bmatrix} = 0 \tag{۲٤}$$

$$\Delta\underline{U} = \underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n \tag{۲۵}$$

$$\Delta\underline{U}(x_k) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_k).\Delta U_i \tag{۲٦}$$

با جای‌گذاری $\underline{\underline{A}}^n$ به‌جای $\underline{\underline{A}}^{n+1}$ بمنظور خطی‌سازی و جای‌گذاری رابطه (۲٦) در (۲٤)، میزان باقی‌مانده در گام زمانی $n+1$ در یک نقطه همپوش به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \underline{R}^{n+1} = \Delta U + \Delta t \Big[\theta(\underline{\underline{A}}^n.(U_{,x}^n + \Delta U_{,x}) - \\ \underline{\underline{G}}.(U^n + \Delta U)) + (1-\theta)(\underline{\underline{A}}^n\underline{U}_{,x}^n - \underline{\underline{G}}\,\underline{U}^n)\Big] \neq 0 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

تابعک J برای کلیه نقاط حوزه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{M_d}[R_k^{(d),(n+1)}]^2 + \alpha.\sum_{k=1}^{M_t}[R_k^{(t),(n+1)}]^2 + \\ \beta.\sum_{k=1}^{M_u}[R_k^{(u),(n+1)}]^2\Big) \end{aligned} \tag{۲۸}$$

در رابطه بالا M_d تعداد نقاط همپوش در حوزه مسئله،

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

و M_u تعداد نقاط همپوش در مرز طبیعی M_t تعداد نقاط همپوش در مرز مشتقی و R_k^{n+1} مقدار باقی‌مانده در نقطه همپوش kام است. با مشتق گرفتن از تابعک J نسبت به Δu_i به‌راحتی می‌توان به یک دستگاه معادلات متقارن $n \times n$ دست یافت و مجهولات را در گام زمانی $n+1$ام یافت.

۵- براورد خطا

استفاده از روش‌های تقریبی مستلزم آگاهی از بزرگی خطاهای احتمالی است. شرایط مطلوب آن است که بتوان اطمینان حاصل کرد که مقدار خطا به‌ازای هر جواب فرضی از میزان معینی که قابل محاسبه است، فراتر نمی‌رود و در واقع این مقدار محاسبه‌شده، خود تخمین معقولی از خطای واقعی است. این امر امکان تظریف نتایج تا رسیدن به یک دقت فرضی از پیش تعیین شده را فراهم می‌کند و در عین حال اعتماد کاربر را به فرایندهای تقریب افزایش می‌دهد.

این هدف در آغاز ایده‌ال به نظر می‌رسد؛ ولی پیشرفت‌های قابل توجهی در این زمینه حاصل شده است و امروزه می‌توان عملاً از فرایند براورد خطا در محاسبات عددی واقعی استفاده کرد. با چنین براوردی امکان تصمیم‌گیری در مورد توقف و یا ادامه محاسبات برای تظریف بیشتر نتایج فراهم می‌شود.

۵-۱- منابع خطا در روش CDLS

جواب‌های تقریبی حاصل از یک روش تقریبی دو نوع خطا دارد ، اولین و مهم‌ترین آن‌ها خطایی است که با استفاده از تقریب توابع آزمونی به‌وجود می‌آید و خطای گسسته‌سازی نامیده می شود. این خطا در حقیقت ناشی از تأمین نشدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر حوزه مسئله و شرایط مرزی آن به‌وسیله تقریب توابع آزمونی است.

خطای دوم خطای گرد کردن است. این خطا ناشی از محدودیت ذخیره‌سازی اطلاعات در هر مرحله از فرایند محاسبات است. خطای دوم را می‌توان با توجه به پیشرفت روز افزون کامپیوترها حداقل کرد. در این بخش خطای گسسته‌سازی حاصل از به‌کارگیری فرایند تقریبی بررسی می‌شود.

اولین منبع خطا در روش بدون شبکه CDLS، خطای حاصل از تقریب تابع با استفاده توابع آزمونی است.

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_k)\bar{u}_i \qquad (۲۹)$$

طبق رابطه بالا در روش CDLS و سایر روش‌های بدون شبکه برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه فرضی مانند x_k از درون‌یابی مقادیر گره‌ای استفاده می‌شود که این امر یکی از مهم‌ترین منابع به‌وجود آورنده خطا است. واضح است که هرچه تعداد نقاط گره ای افزایش یابد مقدار این خطا کمتر خواهد شد. دومین عامل خطا در روش CDLS از رابطه (۸) به‌دست‌می‌آید. مشاهده می‌شود که تنها تعداد محدودی از نقاط تحت عنوان نقاط همپوش در تشکیل تابعک J نقش دارند. بنابراین محدود بودن تعداد نقاط همپوش در تشکیل تابعک J را نیز می‌توان به‌عنوان یکی دیگر از عوامل به‌وجودآورنده خطا نام برد. برای کاهش خطا در این حالت باید تعداد نقاط همپوش را افزایش داد.

۵-۲- براوردکننده خطا در روش CDLS

براورد کننده‌های خطا ابزاری مهم در هر فرایند تظریف تطبیقی است. با آگاهی از چگونگی توزیع خطاها می‌توان فرایند تظریف را به‌طور مناسب و خودکار انجام داد. این فرایند تظریف تطبیقی خوانده می‌شود. در روش بدون شبکه CDLS از مقدار تابعک J که در رابطه (۲۸) آورده شده است در هر نقطه همپوش به عنوان معیاری برای خطا در آن نقطه استفاده می‌شود. واضح است که هرچه مقدار J کمتر باشد مقدار خطا نیز کمتر خواهد بود. برای بررسی

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

کارایی این براورد کننده خطا، مسائل برگر غیرخطی، شکست سد و پشته کردن امواج، ابتدا با روش CDLS حل شده، سپس خطای براوردشده برای لحظاتی خاص نشان داده شده است. تعریف پارامترهای به‌کاررفته در حل مسائل به‌صورت زیر است:

n: تعداد نقاط گرهی است که به‌صورت یکنواخت در حوزه مسئله قرار گرفته‌اند.

col: تعداد نقاط همپوش است. در این پژوهش همواره فرض می‌شود n نقطه از نقاط همپوش روی نقاط گرهی قرار دارد.

dm: شعاع تأثیر نقاط گرهی است.

p: درجه تابع پایه به‌کاررفته برای محاسبه توابع شکل است. به عنوان مثال $p=2$ یعنی $P=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}$.

θ: پارامتر استفاده‌شده در گسسته‌سازی زمانی است و مقدار آن بین ۰/۵ تا ۱ است.

dt: فواصل زمانی برای گسسته‌سازی زمانی است.

مسئله اول: معادله غیرخطی برگر

معادله دیفرانسیل حاکم بر این مسئله به‌صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad 0\le x\le 1 \qquad (۳۰)$$

شرایط مرزی و آغازین به‌صورت زیر آمده است

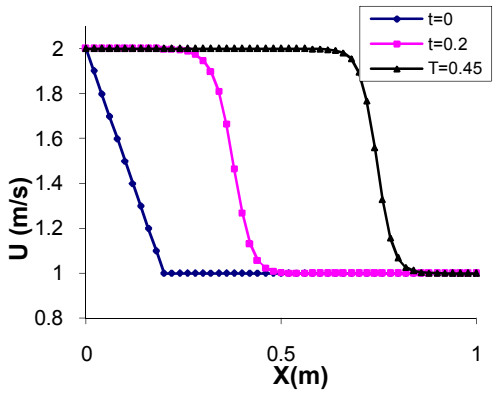
$$u(x,t=0)=2-5x \qquad 0\le x\le 0.2$$

$$u(x,t=0)=1 \qquad 0.2\le x\le 1$$

پارامترهای حل مسئله در ادامه آمده است.

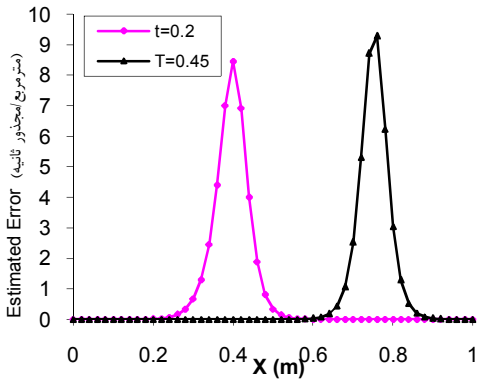
$$col=51,\ \ n=81,\ \ dm=0.05,$$
$$p=1,\ \ \theta=1,\ \ dt=0.02$$

جواب‌های مسئله در زمان‌های ۰/۲ و ۰/۴۵ ثانیه به صورت زیر است:



شکل(۲) جواب‌های روش CDLS برای مسئله اول

در شکل زیر خطای براوردشده برای جواب‌های مسئله بالا آمده است.



شکل(۳) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله اول به‌وسیله‌ی براوردکننده خطای ارائه‌شده

در شکل (۳) بیشترین مقدار خطا در حل معادله برگر در زمان‌های ۰/۲ و ۰/۴۵ ثانیه به‌ترتیب در نقاط ۰/٤ و ۰/۷۵ مشاهده می‌شود. با توجه به جواب‌های روش عددی که در شکل (۲) آمده است می‌توان صحت این جواب‌ها را دریافت.

مسئله دوم: مسئله شکست سد

معادله دیفرانسیل حاکم بر این مسئله با معادله آب‌های کم عمق بیان می‌شود که در ادامه آمده است.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{A}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+\mathbf{D}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}=\mathbf{Q}(\mathbf{u})$$
$$\text{on}\quad \Omega:\quad 0<x<40$$

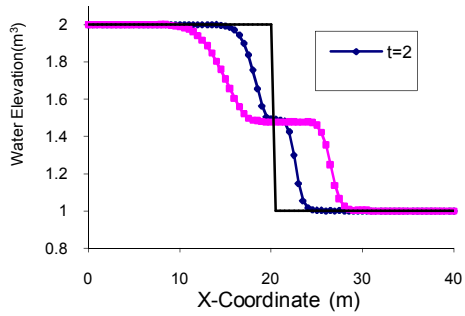
[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} H+\eta \\ (H+\eta)u \end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2+g(H+\eta) & 2u \end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 0 \\ g(H+\eta)dH/dx \end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

در رابطه بالا H عمق، η تراز سطح آب، u سرعت و g شتاب ثقل است. مقادیر H و g برابر واحد و $\frac{dH}{dx}$ که معرف شیب بستر است برابر صفر فرض می شود. پارامترهای حل مسئله به‌صورت زیراست:

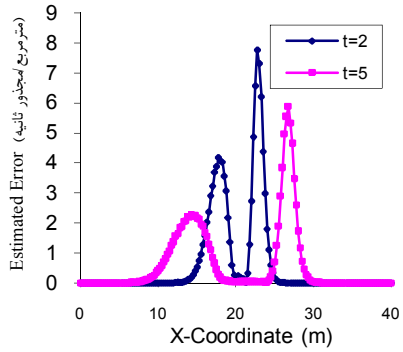
$$col=81,\ n=81,\ dm=1.5$$
$$p=1,\ \theta=1,\ dt=025$$

جواب‌های مسئله در زمان‌های ۲ و ۵ ثانیه برای عمق آب به صورت زیر است:



شکل(٤) جواب‌های روش CDLS برای مسئله دوم

در شکل زیر خطای براوردشده در زمان‌های ۲ و ۵ ثانیه آمده است.

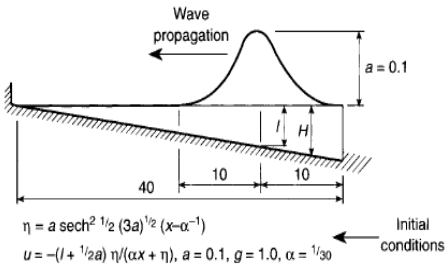


شکل(۵) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله دوم به‌وسیله‌ی براوردکننده خطای ارائه‌شده

در شکل (۵) مشاهده می‌شود براوردکننده خطا مقدار خطا را ۵ ثانیه بعد از شکست سد، بین فواصل ۲۵ تا ۳۰ متری و ۷/۵ تا ۲۰ متری بیشتر از سایر مناطق نشان می‌دهد. با مشاهده جواب‌های مسئله شکست سد می‌توان دریافت بعد از ۵ ثانیه در ۲۵ تا ۳۰ متری یک موج مثبت و در فواصل ۷/۵ تا ۲۰ متری یک موج منفی تشکیل خواهد شد. بنابراین منطقی به‌نظر می‌رسد که حل عددی در این فواصل خطای بزرگ‌تری نسبت به سایر مناطق داشته باشد.

مسئله سوم: مسئله پشته کردن امواج

در این مسئله معادله امواج نزدیک‌شونده به ساحل بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر این مسئله مشابه مسئله شکست سد است و تنها تأثیر شیب بستر در مقدار سمت راست دستگاه معادلات دیفرانسیل لحاظ شده است. شرایط آغازین و همچنین سایر پارامترها در شکل (٦) آمده است.



شکل(٦) شرایط آغازین مسئله پشته کردن امواج

پارامترهای حل مسئله به این صورت است:

$$col=81,\ n=81,\ dm=1.5$$
$$p=1,\ \theta=1,\ dt=0.25$$

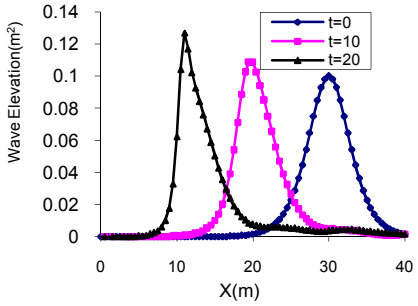
جواب‌های مسئله در زمان‌های ۱۰ و ۲۰ ثانیه برای عمق آب به‌صورت شکل (۷) است:

در شکل (۸)، خطای براوردشده برای عمق آب در زمان‌های ۱۰ و ۲۰ ثانیه نشان داده شده است.

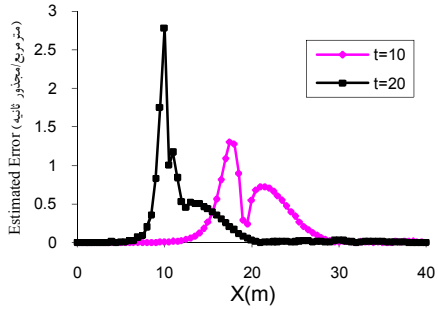
در شکل (۸) مشاهده می‌شود براوردکننده خطا مقدار خطا را بعد از ۲۰ ثانیه از شکل‌گیری موج اولیه، بین فواصل

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

۲۰ تا ۵ متری بیشتر از سایر مناطق نشان می‌دهد. با مشاهده جواب‌های مسئله پشته کردن امواج که در شکل (۷) آمده است، می‌توان دریافت ۲۰ ثانیه بعد از شکل‌گیری موج اولیه، موج به ناحیه ۲۰ تا ۵ متری می‌رسد. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد همان‌طور که براورد کننده خطا نشان داده است، حل عددی در این فواصل خطای بزرگ‌تری نسبت به سایر مناطق داشته باشد.



شکل(۷) جواب‌های روش CDLS برای مسئله سوم



شکل(۸) خطاهای تخمین‌زده شده برای مسئله سوم به وسیله‌ی براوردکننده خطای ارائه‌شده

۶- بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در نتایج جواب‌های روش CDLS با استفاده از براوردکننده خطای معرفی‌شده

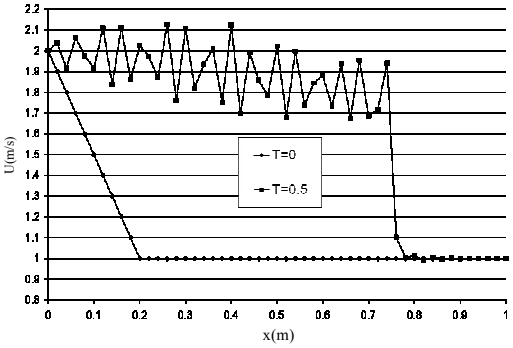
در این قسمت با استفاده از براوردکننده خطای ارائه‌شده به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در روش CDLS، پرداخته شده است. در مثال‌های زیر مساحت زیر نمودار خطا به‌عنوان معیاری کمی از خطای روش در کل حوزه آورده شده است. با استفاده از فرایندی که در این بخش شرح داده شده است، می‌توان معیاری برای انتخاب تعداد نقاط همپوش کافی به‌دست آورد.

مسئله چهارم:

در این مسئله معادله غیرخطی برگر تا زمان t =0.5 s و ایجاد پدیده شوک بررسی می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله و شرایط مرزی و اولیه در مسئله اول در بخش قبل آمده است. پارامترهای حل به‌صورت زیر است.

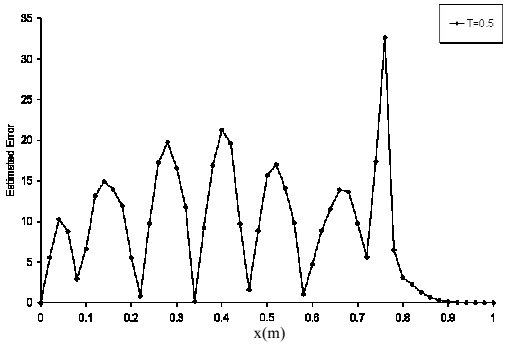
$$col = 51,\ \ n = 51,\ \ dm = 0.025$$
$$p = 1,\ \ \theta = 0.5,\ \ dt = 0.01$$

جواب‌های مسئله در این مرحله در شکل (۹) آمده است.



شکل(۹) جواب‌های مسئله چهارم در مرحله اول

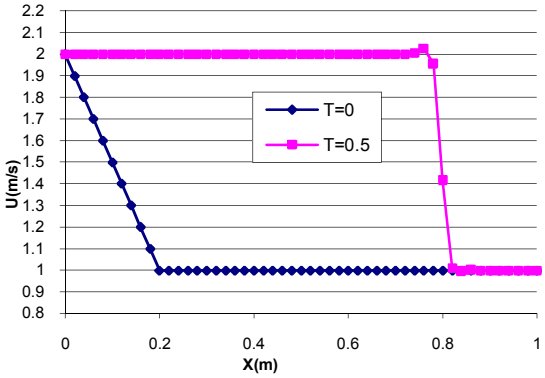
همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب دارای نوسانات شدیدی است. خطای براوردشده برای نقاط گرهی در این مرحله در لحظه ۰/۵ ثانیه در شکل (۱۰) آمده است.



شکل(۱۰) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله چهارم در مرحله اول

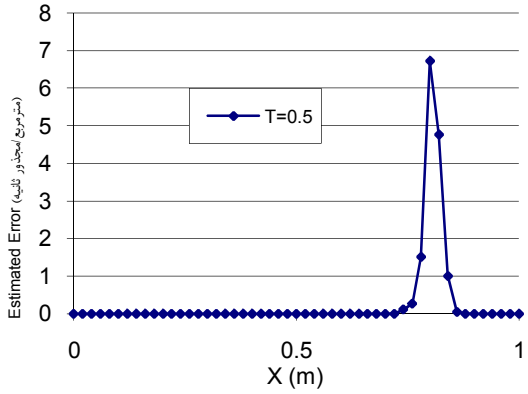
[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

مقدار خطای روش در این مرحله که همان سطح زیر نمودار تابعک خطا است برابر ۸/۸۵ محاسبه شده است. برای بررسی اثر نقاط همپوش بر جواب‌ها، در مرحله بعد از ۳۰۱ نقطه همپوش که ۵۱ نقطه از آنها منطبق بر نقاط گرهی است و به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته است استفاده شد. نتایج اعمال این نقاط همپوش در شکل (۱۱) آمده است.



شکل(۱۱) جواب‌های مسئله چهارم در مرحله دوم

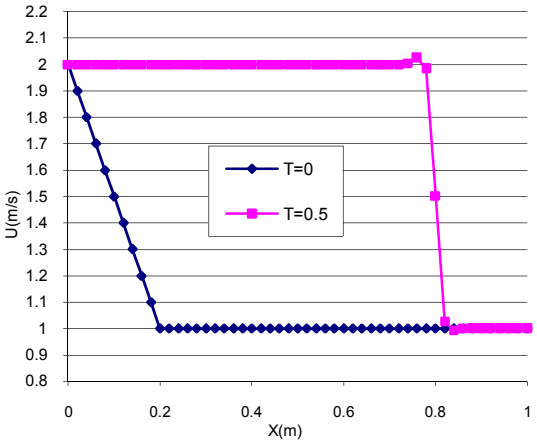
خطای براوردشده برای نقاط گرهی در این مرحله در لحظه ۰/۵ ثانیه در شکل (۱۲) آمده است.



شکل(۱۲) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله چهارم در مرحله دوم

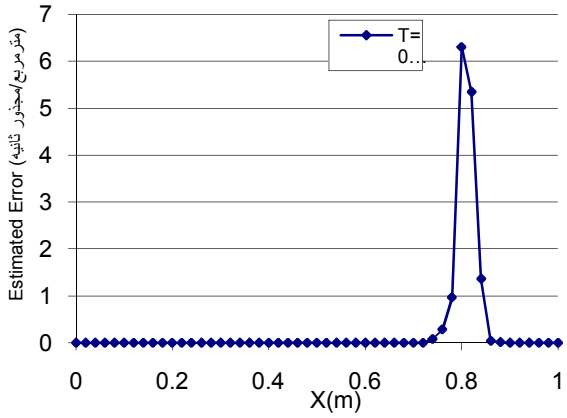
مقدار خطای روش در این مرحله که همان سطح زیر نمودار تابعک خطا است ۰/۲۹ محاسبه شده است. همان‌طور که مشاهده میشود جواب‌های مسئله بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته‌اند که براوردکننده خطا نیز مؤید این مطلب است.

در مرحله بعد از ۵۰۱ نقطه همپوش که ۵۱ نقطه از آنها منطبق بر نقاط گرهی است و به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته است استفاده شده و نتایج اعمال این نقاط همپوش در شکل (۱۳) آمده است.



شکل(۱۳) جواب‌های مسئله چهارم در مرحله سوم

در شکل(۱٤) نتایج براورد کننده خطا برای این مرحله آمده است.



شکل(۱٤) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله چهارم در مرحله سوم

مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۲۸ محاسبه شده است.

در جدول زیر مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

نقاط همپوش به‌کار گرفته‌شده آورده شده است.

جدول (۱) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله چهارم

Collocation Number	Estimated Error
51	8.85
301	0.29
501	0.28

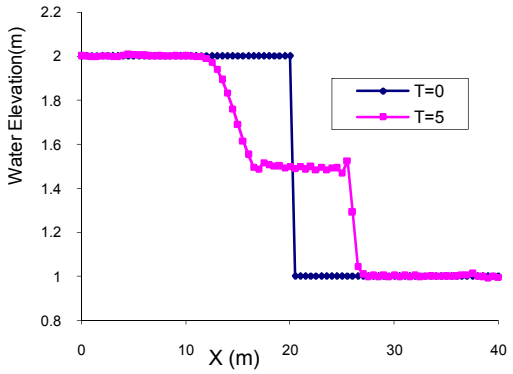
با توجه به جدول بالا می‌توان دریافت افزایش نقاط همپوش تا حدی بسیار مؤثر بوده و بعد از آن هرچه تعداد آن‌ها بیشتر شود، دیگر تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر جواب‌ها ندارند. به‌طوری که با افزایش تعداد این نقاط از ۳۰۱ به ۵۰۱ جواب‌های این مسئله تنها اندکی بهبودیافته است که با مقایسه بین شکل‌های (۱۱) و (۱۳) می‌توان صحت این امر را یافت.

مسئله پنجم:

در این مسئله معادله شکست سدی که قبلا در مسئله دوم حل شده است بررسی می‌شود. در ابتدا برای حل مسئله از پارامترهای زیر استفاده شده است:

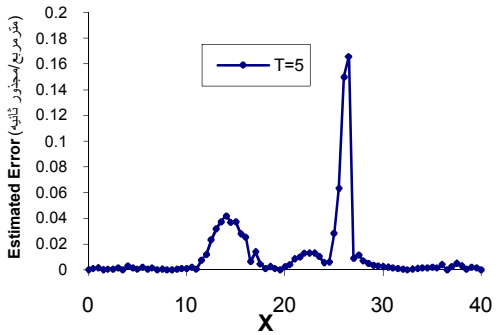
$$col = 81,\ n = 81,\ dm = 1.5$$
$$p = 1,\quad \theta = 0.6,\quad dt = 0.25$$

در شکل (۱۵) جواب‌ها به ازای این پارامترها آمده است.



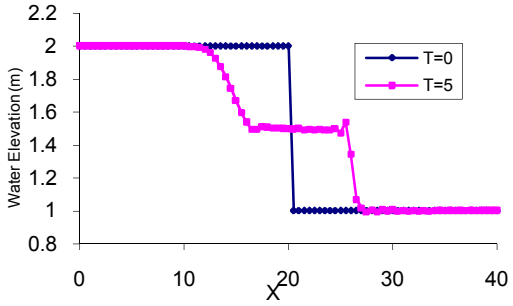
شکل(۱۵) جواب‌های مسئله پنجم در مرحله اول

در شکل (۱۶) خطاهای براوردشده برای حل بالا آمده است.



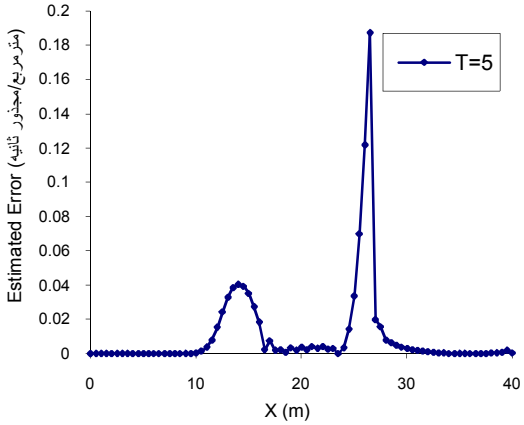
شکل(۱۶) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله پنجم در مرحله اول

مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۴۵۲ محاسبه شده است. حال برای حل مسئله از ۱۶۱ نقطه همپوش ($col = 161$) استفاده شده است. نتایج اثر اعمال این نقاط همپوش نتایج، در شکل (۱۷) آمده است.



شکل(۱۷) جواب‌های مسئله پنجم در مرحله دوم

خطای براوردشده برای این مرحله در شکل (۱۸) آمده است.

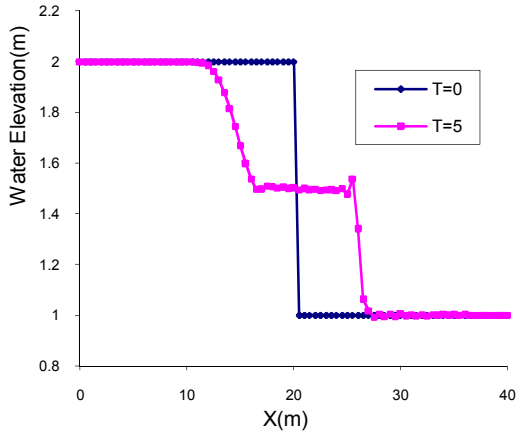


شکل(۱۸) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله پنجم در مرحله دوم

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

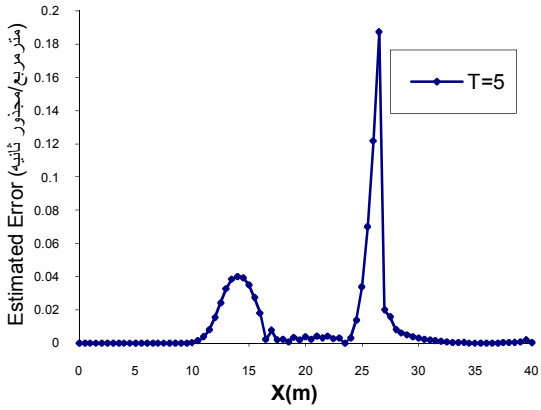
مقدار خطای روش ۰/٤١٩ محاسبه شده است.

در مرحله سوم از ۳۲۱ نقطه همپوش که به فواصل مساوی در حوزه مسئله قرار گرفته استفاده شده است. جواب‌های این مرحله در شکل (۱۹) آمده است.



شکل(۱۹) جواب‌های مسئله پنجم در مرحله سوم

خطای براوردشده برای این مرحله به‌صورت شکل زیر است.



شکل(۲۰) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله پنجم در مرحله سوم

مقدار خطای روش ۰/٤١٦ محاسبه شده است.

در جدول (۲)، مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد نقاط همپوش به‌کارگرفته شده آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط همپوش، جواب‌های این مسئله اندکی بهبود یافته ولی انتظار نمی‌رود با افزایش بیشتر نقاط همپوش، کاهش چشم‌گیری در مقدار خطای حل عددی حاصل شود.

جدول (۲) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله پنجم

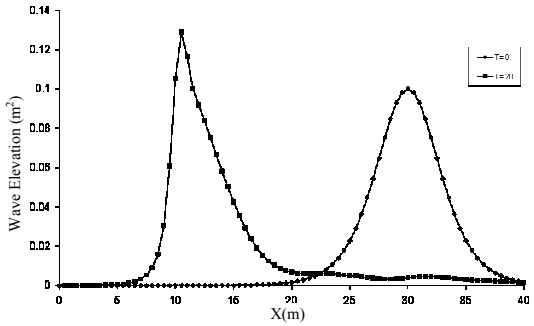
Collocation Number	Estimated Error
81	0.452
161	0.419
321	0.416

مسئله ششم:

در این مسئله معادله امواج نزدیک‌شونده به ساحل بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر این مسئله و شرایط آغازین و مرزی آن در مسئله سوم آمده است.

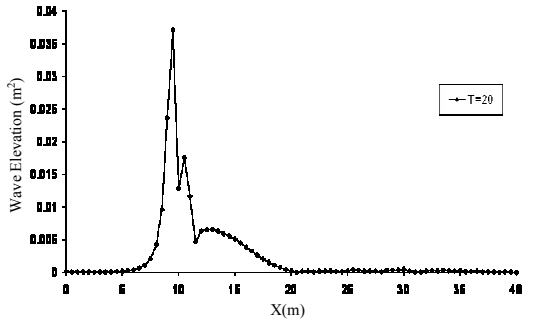
در ابتدا برای حل مسئله از پارامترهای زیر استفاده شده است.

$$col = 81,\ \ n = 81,\ \ dm = 1.5$$
$$p = 1,\ \ \theta = 0.5,\ \ dt = 0.5$$



شکل(۲۱) جواب‌های مسئله ششم در مرحله اول

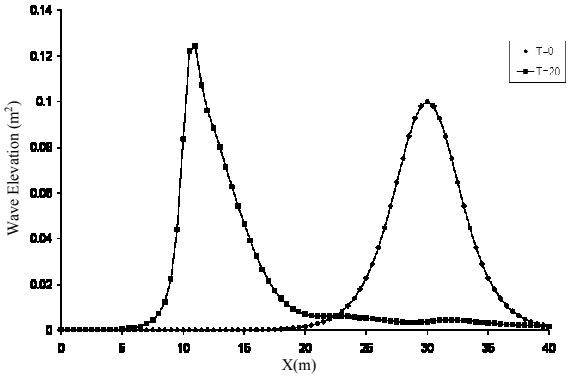
خطای براوردشده برای مرحله اول به‌صورت شکل زیر است.



شکل(۲۲) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله ششم در مرحله اول

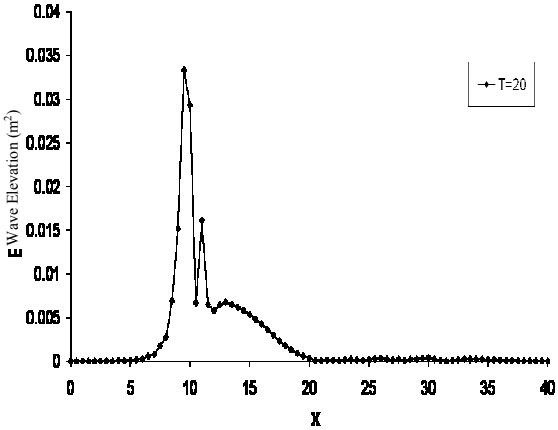
[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

مقدار خطای روش در این مرحله ۰/۹۷۳ محاسبه شده است. در مرحله بعد، از ۱۶۱ نقطه همپوش استفاده شده است. جواب‌های مسئله بعد از اضافه کردن این نقاط همپوش در شکل (۲۳) آمده است.



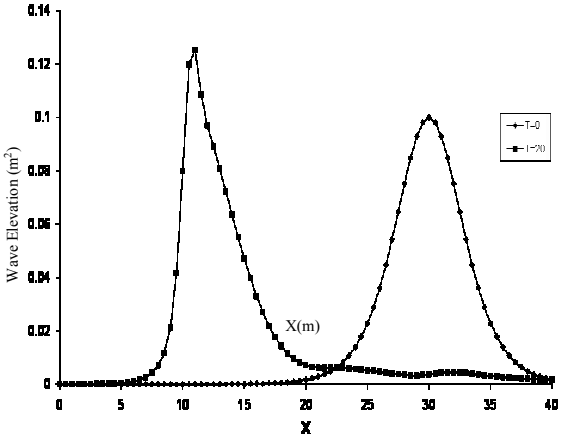
شکل(۲۳) جواب‌های مسئله ششم در مرحله دوم

خطای براوردشده برای مرحله اول در شکل (۲٤) آمده است.



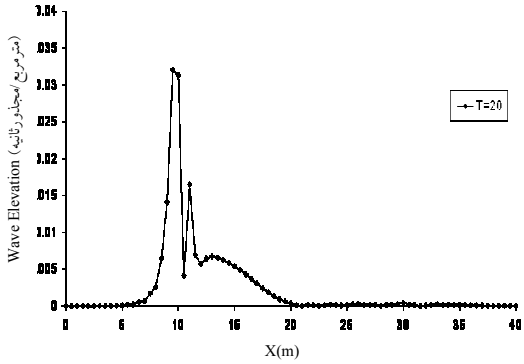
شکل (۲٤) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله ششم در مرحله دوم

مقدار خطای روش در این مرحله برابر ۰/۰۹٦۳ محاسبه شده است. در مرحله سوم از ۳۲۱ نقطه همپوش استفاده شده است. اثر اعمال این نقاط همپوش در نتایج در شکل (۲۵) آمده است.



شکل(۲۵) جواب‌های مسئله ششم در مرحله سوم

خطای براوردشده برای این مرحله به‌صورت شکل زیر است.



شکل(۲٦) خطاهای تخمین‌زده‌شده برای مسئله ششم در مرحله سوم

مقدار خطای روش ۰/۰۹۵۲ محاسبه شده است. در جدول زیر مقدار خطا برای هر مرحله به ازای تعداد نقاط همپوش به‌کار گرفته‌شده آمده است.

جدول (۳) اثر تعداد نقاط همپوش بر مقدار خطا در مسئله پنجم

Collocation Number	Estimated Error
81	0.0973
161	0.0963
321	0.0952

۶- نتیجه‌گیری

روش‌های بدون‌شبکه به‌عنوان نوین‌ترین روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل، در سال‌های اخیر توجه

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. هدف این مقاله اضافه کردن یک قابلیت پرکاربرد و مؤثر دیگر به این روش بدون شبکه است که همان براورد کردن خطا است براورد کننده‌های خطا در روش‌های عددی ابزاری کارامد برای اطمینان ازجهت‌گیری صحیح حل و تخمین دقت نتایج حاصل است. برای این منظور از مقدار باقی‌مانده در هر نقطه گرهی به عنوان معیاری برای خطای آن نقطه استفاده شده است. به همین دلیل این براوردکننده خطا تقریباً نیاز به هیچگونه هزینه محاسباتی اضافی ندارد. برای نشان دادن صحت عملکرد این براوردکننده خطا سه مسئله نمونه (برگر غیرخطی، شکست سد و پشته کردن امواج) ابتدا با روش CDLS حل شده و سپس خطای تخمین‌زده‌شده برای هر نقطه محاسبه شده و نشان داده شده است. نتایج نشان‌دهنده صحت عملکرد براوردکننده خطای ارائه‌شده است. در بخش بعدی این مقاله با استفاده از براوردکننده خطای ارائه‌شده، به بررسی اثر تعداد نقاط همپوش در جواب‌های مسئله پرداخته شده است. نتایج نشان‌دهنده بهبود جواب‌ها و کاهش مقدار خطا با افزایش تعداد نقاط همپوش است. همچنین نتایج مؤید این مطلب است که افزایش نقاط همپوش تا حدی در بهبود جواب‌ها مؤثر است ولی برای کم کردن محسوس مقدار خطا، باید از روش‌های دیگری استفاده کرد. برای مثال می‌توان با استفاده از فرایند تظریف تطبیقی از نقاط گرهی بیشتری در نواحی که خطای بیشتری دارند استفاده کرد.

۷- منابع

[1] Gingold R.A., Moraghan J.J. "Smooth Particle Hydrodynamics: theory and application to non spherical stars." Man.Not.Roy.Astron.Soc. Vol.181, 375-389 (1977)

[2] Nayroles B., Touzot. G., Villon.P "Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element" Coput. Mech. Vol.10, 307-318 (1992)

[3] Belytschko T, Lu YY, Gu L "Element-free Galerkin methods." Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol 37, 229–256 (1994)

[4] Liu WK, Jun S, Zhang Y "Reproducing kernel particle Methods."Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol.20,1081–1106 (1995)

[5] Melenk J.M., Babuska I. " The partition of unity finite element method: basic theory and applications." Comput. Methods Appl.Mech. Engrg. Vol.139, 289–314 (1999)

[6] Duarte C.A., Oden J.T. "HP clouds a meshless method to solve boundary-value problems." Technical Report 95-05, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Texas at Austin, (1996).

[7] Atluri SN, Kim HG, Cho JY "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods." Comput. Mech. Vol. 24, 348–372 (1999)

[۸] حامد ارزانی، محمد هادی افشار و محمد نجمائی "روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل جابجائی-پخش" نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، دانشگاه علم و صنعت ایران، ویژهنامه مهندسی عمران شماره۲، جلد ۱۸، تابستان ۱۳۸٦، صص ۱-۹.

[9] Liu G.R., Tu Z.H "An adaptive procedure based on background cells for meshless methods" Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 191, 1923–1943 (2002)

[10] Gavete L. , Falcon S. , Ruiz A. " An error indicator for the element free Galerkin method" Eur.J.Mech.A/solids. Vol. 20, 327-341 (2000)

[11] Behrens, A. Iske and M. Kaser, Adaptive meshfree method of backward characteristic for non linear transport equations. In: M. Gribel and M.A. Schweitzer, Editors, Meshfree Methods for Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Heidelberg pp. 21–26. (2002)

[12] Elansari M., Ouazar D. " On the a-priori error analysis and convergence of meshless BEM "

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 30, 588–597 (2006)

[13] Cheng R., Cheng Y. " Error estimates for the finite point method" Applied Numerical Mathematics. Article in press

[14] Huang C. S., Lee C.F., Cheng A.H. D. "Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method" Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 31, 614–623 (2007)

[15] Zhijie C. "Convergence and error estimates for meshless Galerkin methods " Applied Mathematics and Computation Vol. 184, 908–916 (2007)

[16] Lancaster P, Salkauskas K." Curve and Surface Fitting Introduction." Academic Press. (1986)

[17] Liu GR, Gu YT . " A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analyses of 2-D solids." J. Sound Vibration 246(1): 29–46 (2001)

[18] Gu Lei "Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method." Int.J. Numerical. Meth. Eng. Vol. 56:1– 11 (2003)

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]

Proposing an Error Estimator for Collocated Discreet Least Square (CDLS) Meshless Method

M.H. Afshar[1*], M. Lashckarbolok[2]

1- Assistant Professor, Civil Eng. Faculty, Iran University of Science and Technology
2- M.Sc. Student of Civil Eng. Faculty, Iran University of Science and Technology

mhafshar@iust.ac.ir

Abstract:
The error estimation should be a main tool in every adaptivity process. This is the reason for the great importance of the estimation. It allows us to know the quality of the solution, and hence, if it is acceptable or not. Moreover, it provides some information about the changes that are necessary to be made in the mathematical model to reach, in an economic way, the desired solution. In this paper, a new error estimator for solving the hyperbolic problems to be used in conjunction with the Collocated Discreet Least Square Meshless (CDLS) method is presented. The error estimator is shown to be naturally related to the least-squares method, providing a suitable measure of the errors in the solution. The estimator is easily calculated by the use of already existing matrices of the least-squares computation, hence, it is very cheap.
The proposed error estimator was implemented with CDLS method to solve three benchmark examples from the literature and the effect of collocation points on them was investigated. These examples are nonlinear burgers equation, dam break problem and the problem of shoaling a wave on sloping shallow waters. The results showed that the error estimator works very well in all numerical examples.

Keywords: Meshless method, Error estimator, Collocation points, Hyperbolic equations.

[Downloaded from mcej.modares.ac.ir on 2024-10-12]