مجله علمی- پژوهشی «عمـران مـــدرس» دوره دهم، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۹

# شبیهسازی ترک در ورقها و پوستهها با استفاده از روش اجزای محدود توسعهیافته

مجيد ميرزايي'\*، سيد جعف روزگار'

۱- دانشیار، بخش مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس ۲- دانشجوی دکتری، بخش مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

mmirzaei@modares.ac.ir تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۳/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۲/۲۹

چکیده- در این تحقیق، مدلسازی ویژهای برای ورقها و پوستههای دارای ترک با استفاده از روش اجزای محدود توسعهیافته انجام شده است. در ابتدا با استفاده از فرضیات سادهشونده کیرشهف فرمولبندی اجزای محدود استاندارد پوسته ارائه شده و پس از تدوین کد مربوط، با حل چند مثال از کارایی آن اطمینان حاصل شده است. برای ایجاد تأثیر حضور ترک، از توابع غنیساز جدید و متناسب با میدان تغییرمکان استفاده شد. با افزودن بردرجات آزادی گرههای اطراف ترک طی فرایند غنیسازی، شبیهسازی ترک در ورقها و پوستهها انجام شده است. این توابع از جوابهای تحلیلی مسئله شکست ورق کیرشهف تحت بارگذاریهای صفحهای و خمشی استخراج شدهاند. با حل چند مثال و مقایسه نتایج بهدست آمده با جوابهای تحلیلی موجود و نتایج حاصل از نرمافزارهای دیگر، اثبات میشود که نتایج کد دارای دقت قابل قبولی بوده و کارایی آن در تحلیل ورقها و پوستههای ترکدار مناسب است.

**کلیدواژ گان:** ورق کیرشهف، پوسته دارای ترک، اجزای محدود توسعهیافته، غنیسازی.

### ۱ – مقدمه

روش های رشد ترک به دو گروه کلی تقسیم می شوند. در گروه اول، ترک به شکل مستقیم در مدل در نظر گرفته می شود که در این حالت، در حین رشد ترک، نیاز به شبکهبندی مجدد است. در گروه دوم، تأثیر حضور ترک به صورت غیر مستقیم و در روابط حاکم دیده می شود. این تأثیر می تواند در روابط بنیادین تنش – کرنش و یا در روابط سینماتیک کرنش – تغییر مکان لحاظ شود. در حالت اول، ماتریس B تحت تأثیر قرار

می گیرد. (توضیح: ترتیب در فرمول بندی اجزای محدود، بهصورت تنش، کرنش و تغییر مکان است). [3][0]={۵} و [4][3]={٤} که {٥}، {٤} و {4} یکی از روشهایی که با تأثیر در روابط سینماتیک، حضور ترک را در نظر می گیرد، روش اجزای محدود توسعهیافته است. در این روش با افزودن درجه آزادی به گرههای اطراف ترک، حضور ترک مدل می شود. این روش بر مبنای روش تقسیم واحد شکل گرفته و به سرعت توسعه یافته

<sup>1.</sup> Partition of unity method

است. در سال ۱۹۹۸ بلیچکو و بلک<sup>۱</sup> برای اولین بار از این روش در مسائل مکانیک شکست استفاده کردند[۱]. با استفاده از این روش مدلسازی، رشد ترک میتواند بدون شبکهبندی مجدد اتفاق بیفتد[۲]. این روش در زمینههای مختلفی از جمله مسائل شکست سه بعدی [۳–٥]، مدلسازی ترکهای چسبنده<sup>۲</sup> [۲]، شکست مواد MG[۷] و مدلسازی رشد ترک در مواد ارتوتروپ[۸] استفاده شده است.

در خصوص استفاده از روش اجرای محدود توسعهیافته برای مدلسازی ورق ها و پوسته ها نیز تحقیقاتی انجام شده است که از آن جمله می توان به مراجع [۹–۱۱] اشاره کرد. این موارد به ورق های ماندلین – ریزنر معطوف است. تئوری ماندلین – ریزنر<sup>۳</sup> با در نظر گرفتن کرنش های برشی در آنالیز ورق های نازک و ضخیم، استفاده می شود. این تئوری نسبت به تئوری کیرشهف<sup>3</sup> که از کرنش های برشی صرفنظر می کند، فرمول بندی پیچیده تری داشته و دارای مشکلاتی از جمله قفل شدگی برشی<sup>6</sup> است. تئوری کیرشهف، با فرمول بندی ساده تر، در مورد ورق های نازک، جواب های قابل قبولی ارائه می دهد.

در این مقاله روش اجزای محدود توسعهیافته، برای مدلسازی ورقها و پوستههای کیرشهف دارای ترک، استفاده می شود. در ابتدا یک کد با قابلیت مدلسازی ورقها و پوستههای کامل (بدون ترک) آماده شده و با حل چند مثال کارایی کد تأیید می شود. برای مدلسازی ورقها و پوستههای ترکدار، لازم است که طی فرایند غنی سازی، درجه آزادی گرههای اطراف ترک افزایش یابد که بنابراین از تابع ناپیوستگی H و توابع غنی ساز نوک ترک متناسب با

- 1. Belytschko & Black
- 2. Cohesive
- 3. Mindlin-Reissner
- 4. Kirchhoff
- 5. Shear Locking

۲

میدان مورد نظر استفاده می شود. کـد بـه زبـان فرتـرن و بـا استفاده از المان مستطیلی چهارگرهی پوسـته آمـاده شـده و کارایی آن با حل چندین مثال بررسی شده است.

# ۲- تئوری ۲-۱- فرمولبندی ورق

در فرمول بندی خمش ورق ها، معمولاً دو فرض اولیه در نظر گرفته می شود، یکی این که صفحات عمود بر صفحه میانی، همواره صفحه باقی می مانند (دچار اعوجاج نمی شوند) و دیگری این که به علت پایین بودن میزان تنش عمودی  $_{2}\sigma$  در مقایسه با سایر تنش ها، می توان از این تنش صرفنظر کرد. در مورد ورق های نازک (کیر شهف) فرض سومی نیز در نظر گرفته می شود؛ بدین صورت که از فرض برنولی – اولر نیز مشهور است، معادل با این است که مفحات عمود بر صفحه میانی همواره عمود باقی می مانند. با در نظر گرفتن فرضیات بالا می توان به فر مول بندی ورق های نازک پرداخت. مطابق شکل ۱، چنان چه u و v تغییر مکان عمود بر صفحه در جهت z باشد و  $_{x}$  0 و  $_{y}$ 

$$u = -z\theta_x(x, y), v = -z\theta_y(x, y),$$
  

$$w = w_x(x, y)$$
(1)

که <sub>w</sub> تغییرمکان در جهت z صفحه میانی است. پس از اعمال فرضیات ورق های نازک، استفاده از روابط تعادل، فرض ایزوتروپ بودن ماده و ثابت بودن ماتریس سفتی خمشی D، به معادله دیفرانسیل مرتبه چهار زیر میرسیم:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - q = 0 \tag{(1)}$$

جله علمی – پژوهشی عمران مدرس

.[۱۲] است D = 
$$\frac{Et^3}{12(1-y^2)}$$



شکل (۱) درجات آزادی ورق با توجه به محورهای مختصات

### ۲-۲- فرمول بندی اجزای محدود ورق

برای مدلسازی ورق در اجزای محدود، المانهای متعددی معرفی شده است. در این تحقیق از المان مستطیلی چهارگرهی که یکی از انواع المانهای چهاروجهی است استفاده می شود. در المان مستطیلی ورق، چهار گره وجود دارد که هر گره، سه درجه آزادی دارد. شکل ۲ ابعاد، مختصات و سایر پارامترهای این المان را نشان می دهد. بردار تغییرمکان گرهی یک المان نوعی به شکل زیر در نظر گرفته می شود:



در پیوست ۱ جزئیات مربوط به فرمول بندی اجزای محدود این نوع المان آمده است که در نهایت به فرم گسسته زیر میرسد:

$$\mathbf{w}^{h} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{3} \mathbf{w}_{il} \mathbf{N}_{il} , \ \mathbf{w}_{il} = \begin{cases} \mathbf{w}_{i} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{x_{i}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{y_{i}} \end{cases}$$
(£)

که I مجموعه گرههای المان،  $w_i$  مقادیر گرهی تغییرمکان عمودی،  $\hat{\theta}_{x_i}$  و  $v_i$  به ترتیب چرخش حول محور x و y و N<sub>il</sub> توابع شکل تعریف شده در پیوست۱ است[۱۲].

#### ۲-۳- فرمول بندی اجزای محدود پوسته

پوسته اساساً ورقی است که صفحه میانی آن از ابتدا دارای انحنا است. فرضیاتی که در مورد ورق ها در نظر گرفته شد، در مورد پوسته ها نیز اعمال می شود. نحوه تحمل بارگذاری در پوسته ها با ورق ها متفاوت است. منتجه های تنش که بر صفحه میانی عمل می کنند، در پوسته شامل هر دو مؤلف مماسی و عمودی است؛ که به همین دلیل، پوسته ها در زمره سازه هایی به شمار می روند که قابلیت تحمل نیروهای نسبتاً بالایی را دارند.

در یک پوسته، المانها معمولاً تحت هر دو بارگذاری خمشی و صفحهای قرار دارند. در یک المان تخت، هر یک از این بارگذاریها بهصورت مستقل، سبب تغییرشکل هایی میشود. بنابراین ماتریس های سفتی مربوط به هر مؤلف و را می توان جداگانه و مستقل محاسبه کرد. ماتریس سفتی مربوط، به بارگذاری صفحهای را می توان با در نظر گرفتن یک المان تنش صفحهای و فرمول بندی های مربوط، به سادگی تعیین کرد. در مورد ماتریس سفتی خمشی نیز از تحلیل های خمشی ورق ها (بخش قبل) استفاده می شود. یک المان مستطیلی تخت در مختصات محلی  $\overline{z} \, \overline{z} \, \overline{z}$  مجید میرزایی و همکار

تحت بارگذاری همزمان خمشی و صفحهای را در نظر بگیرید. در بارگذاری صفحهای (تـنش صفحهای) حالت کرنش به صورت یکتا با در دست داشتن مقادیر گرهی تغییرمکانهای آو ⊽ قابل محاسبه است. با کمینهسازی انرژی پتانسیل کل، می توان ماتریس سفتی را تعیین کرد که این ماتریس می تواند نیروهای گرهی را به تغییرمکانهای گرهی مرتبط سازد:

$$(\overline{f}^{e})^{p} = (\overline{K}^{e})^{p} \overline{a}^{p} \quad \text{aS:} \quad \overline{f}_{i}^{p} = \begin{cases} F_{\overline{x}i} \\ F_{\overline{y}i} \end{cases} \quad \overline{a}_{i}^{p} = \begin{cases} \overline{u}_{i} \\ \overline{v}_{i} \end{cases}$$
(0)

در مورد بارگذاری خمشی نیز میتوان کرنشها را با استفاده از تغییرمکان گرهی آ (در راستای Z) و دو چرخش جَهُ و بَهُ بهدست آورد. بدین ترتیب ماتریس سفتی المانی به فرم زیر معرفی میشود:

$$(\overline{f}^{e})^{b} = (\overline{K}^{e})^{b} \overline{a}^{b} \checkmark \overline{f}^{i} = \begin{cases} \overline{\mathbf{w}}_{i} \\ \hat{\theta}_{\overline{\mathbf{y}}} \\ \hat{\theta}_{\overline{\mathbf{y}}} \end{cases} \quad \overline{f}^{b}_{i} = \begin{cases} \mathbf{F}_{\overline{\mathbf{z}}i} \\ \mathbf{M}_{\overline{\mathbf{y}}i} \\ \mathbf{M}_{\overline{\mathbf{y}}i} \end{cases}$$
(7)

همان طورکه دیده می شود چرخش  $\frac{1}{2}$  در هیچ یک از دو مود بارگذاری به عنوان یک پارامتر وارد نمی شود. پس می توان از آن صرف نظر کرد؛ اما به علت سهولت اعمال ماتریس تبدیل مختصات محلی به عمومی و بالعکس، این چرخش را نیز در ترکیب ماتریس سفتی در نظر می گیریم که متناظر با گشتاور خمشی غیر واقعی  $_{\rm Z}$ M در بردار نیرو است. عملاً تمامی مؤلفه های متناظر با این پارامتر را در مرگونه تأثیر این پارامتر در جواب های مسئله از بین خواهد رفت. بدین ترتیب در مورد المان مستطیلی پوسته مورد نظر، چهار گره داریم که هر گره شش درجه آزادی خواهد

$$\overline{\mathbf{a}}_{i} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_{i} & \overline{\mathbf{v}}_{i} & \overline{\mathbf{w}}_{i} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\overline{\mathbf{x}}i} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\overline{\mathbf{y}}i} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\overline{\mathbf{z}}i} \end{bmatrix}$$
(V)

 $\overline{K}^{e}\overline{a} = \overline{f}^{e} \tag{9}$ 

که ماتریس سفتی در این حالت از ترکیب زیر ماتریس هایی به شکل زیر بهدست می آید:

$$\bar{\mathbf{K}}_{rs} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{p}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{p}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{p}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{p}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & \bar{\mathbf{K}}_{rs}^{\mathfrak{b}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(1...)

در محاسبه ماتریس سفتی بالا از یک سیستم مختصات محلی به عنوان صفحه مرجع استفاده شده است و مؤلفه های نیروها و گشتاورهای خمشی نیز در همین سیستم مختصات به دست آمده است. در پوسته ها که جهت گیری المانها به صورت سه بعدی در فضا است، تبدیل مختصات محلی  $\overline{x} \ \overline{z} \ \overline{z}$  به یک سیستم مختصات عمومی که با x y x نشان داده می شود, ضروری است؛ چرا که مجتمع سازی المانها و اعمال معادله تعادل عمالاً در دستگاه عمومی انجام می شود. تبدیل نیروها و تغییر مکانهای یک گره از سیستم مختصات عمومی به محلی با استفاده از ماتریس T به شکل زیر انجام می شود:

$$\mathbf{f}_{i} = \mathbf{T}\mathbf{f}_{i} \quad \overline{\mathbf{a}}_{i} = \mathbf{T}\mathbf{a}_{i} \tag{11}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0\\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \tag{17}$$

که

شکل زیر ارائه می شود:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} = \begin{cases} A_1 \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + A_2 \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \\ B_1 \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + B_2 \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \\ A_3 \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) + A_4 \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \end{cases}$$
(17)
$$B_3 \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) + B_4 \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \end{cases}$$
$$w = \frac{(2r)^{3/2} (1 - v^2)}{2Eh(3 + v)} \Biggl\{ K_1 \Biggl[ \frac{1}{3} \Biggl( \frac{7 + v}{1 - v} \Biggr) \cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} \Biggr]$$
(17)

$$+K_{2}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5+3v}{1-v}\right)\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right]\right\}$$
(1V)

که h ضخامت ورق، E مدول الاستیسیته و K<sub>1</sub> و K<sub>2</sub> ضرایب شدت تنش خمشی و پیچشی<sup>۱</sup> است. مشابه رابط ه (۱۲) می توان رابطه (۱۷) را به شکل زیر نوشت:

$$w = C_1 r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + C_2 r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + C_3 r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + C_4 r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$
(1A)

برای شبیهسازی پوسته دارای ترک، از روش اجزای محدود توسعهیافته استفاده میکنیم. بدین شکل که درجات آزادی گرههای اطراف ترک با استفاده از توابع غنیسازی متناسب با میدان تغییرمکان افزایش مییابد. فرم گسسته تغییر مکان صفحهای به شکل زیر ارائه میشود[۲]:

$$u^{h} = \sum_{i=1}^{I} u_{i} \phi_{i} + \sum_{j=1}^{J} b_{j} \phi_{j} H(x) + \sum_{k=1}^{K} \phi_{k} \left( \sum_{l=1}^{4} c_{k}^{l} F_{i}(r, \theta) \right)$$
(14)

که I مجموعه تمامی گرهها، J مجموعه گرههایی که حداقل یکی از المانهای متصل به آنها کاملاً بهوسیلهی ترک قطع میشود و K مجموعه گرههایی که دست کم یکی از المانهای متصل به آنها شامل نوک ترک باشد، است. در

1. Twisting

ماتریس ۸ یک ماتریس ۳×۳ شامل کسینوس جهات بین محورهای سیستم مختصات محلی و عمومی است.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) & \cos(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) & \cos(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \\ \cos(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) & \cos(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) & \cos(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) \\ \cos(\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{x}) & \cos(\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{y}) & \cos(\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}$$
(1)"

$$\mathbf{f}_{i} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{f}_{i}}$$
,  $\mathbf{a}_{i} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{a}}_{i}$ ,  $\mathbf{K}_{rs}^{e} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}_{rs}^{e}\mathbf{T}$  (12)

#### ۲-۴- فرمول بندی اجزای محدود توسعه یافته

میدان تغییرمکان و تنش نوک ترک، در یک ورق بی نهایت دارای ترک توسط ویلیامز و با استفاده از روش eigenfunction بهدست آمد[۱۳]. برای ورق تحت بارگذاری های صفحه ای، میدان تغییر مکان عبارت است از:

$$\begin{cases} u_{1} \\ u_{2} \\ \end{pmatrix} = \frac{K_{1}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) + 2\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{4}{1+\nu} - 2\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{cases}$$

$$\left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{4}{1+\nu} + 2\cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{cases}$$

$$(16)$$

$$+\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1+\nu}{1+\nu}+2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right]\\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)-2\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{cases}$$

که  $\mu$  و v مدول برشی و ضریب پواسون و K<sub>1</sub> و K<sub>1</sub> مرایب شدت تنش کششی و برشی است. رابط ه (۱۵) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

که ضرایب A<sub>i</sub> و B<sub>i</sub> مستقل از مختصات r و θ است. بـا اسـتفاده از تعـاریف سـی و همکـاران [۱٤] بــرای

ضرایب شدت تنش خمشی، میدان تغییرمکان بهدست آمده توسط ویلیامز برای ورق تحت بارگذاری خمشی[۱۵]، بـه

شکل ۳ این مجموعهها برای یک ترک نمونـهای نشـان داده شده است.



در این رابط عبارت اول همان فرم گسسته تغییرمکان اجزای محدود کلاسیک است که ، هما توابع شکل و ، ۱۱ها مقادیر گرهی درجات آزادی مربوط است. تابع پلهای هویساید در عبارت دوم که در تغییر مکان ناپیوستگی ایجاد می کند، به شکل زیر تعریف می شود:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*).\mathbf{e}_n \succ \mathbf{o} \\ \\ -1 & \text{for } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*).\mathbf{e}_n \prec \mathbf{o} \end{cases}$$
(Y • )

که در این رابطه x یک نقطه انتگرالگیری گوسی نمونهای،  $x^*$  نزدیکترین نقطه به x روی مرز ترک و  $e_n$  بردار واحد عمود بر سطح است. توابع غنی ساز نوک ترک ( $F_L(r, \theta)$  از جواب های تحلیلی ورق ترک دار تحت بارگذاری صفحه ای استخراج شده و با توجه به رابطه (۱٦) به شکل زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\{F_{1}(r,\theta)\}_{1=1}^{4} = \left\{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\theta\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\theta\right)\right\}$$
(71)

از این چهار تابع تنها تـابع اول دارای پـرش بـوده و سـبب

ایجاد ناپیوستگی تغییرمکان در طول ترک میشود. بقیهی عبارات به علت سازگاری این توابع با میدان تغییرمکان و افزایش دقت جوابها استفاده میشود. مشابه رابطه (۱۹)، در مورد تغییرمکان عمودی w داریم:

$$\begin{split} & w^{h} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{3} N_{il} w_{il} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{3} N_{jl} d_{jl} H(x) \\ & + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{3} N_{kl} \Biggl[ \sum_{m=1}^{4} e_{kl}^{m} G_{m}(r, \theta) \Biggr] \end{split}$$
 (YY)

عبارت اول فرم گسسته اجزای محدود کلاسیک ورق، تحت بارگذاری خمشی است که در رابطه (٤) نیز ارائه شده. در عبارت دوم دوباره از تابع پلهای برای ایجاد ناپیوستگی و در عبارت سوم از توابع جدید (G<sub>m</sub>(r,θ که از رابطه (۱۸) استخراج شدهاند، برای غنی سازی گرههای نوک ترک استفاده شده است:

$$\left\{G_{1}(\mathbf{r},\theta)\right\}_{1=1}^{4} = \left\{r^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right\}$$
(YT)

لازم به ذکر است که در اینجا نیز تنها توابع اول و سـوم، ناپیوستگی تغییرمکان در امتداد تـرک را ایجـاد کـرده و دو تابع دیگر برای افزایش دقت به کار میروند.

۳- محاسبه ضرایب شدت تنش ضرایب شدت تنش، مهم ترین پارامترهای مسائل شکست است و روشهای متعددی برای محاسبه آنها ارائه شده. یکی از روشهای متداول محاسبه این ضرایب، روش انتگرال I است. این انتگرال روی یک منحنی بسته که ترک را احاطه کرده است تعریف می شود. ضرایب شدت تنش صفحهای و خمشی مستقل از یکدیگر است و جداگانه محاسبه می شوند. انتگرال I برای آنالیز صفحهای به شکل

مجله علمی – پژوهشی عمران مدرس

$$\mathbf{J}^{\mathrm{p}} = \frac{\mathbf{K}_{\mathrm{I}}^{2}}{\mathrm{E}} + \frac{\mathbf{K}_{\mathrm{II}}^{2}}{\mathrm{E}} \tag{(29)}$$

که در این رابطه K<sub>I</sub> و K<sub>I</sub> ضرایب شدت تنش صفحهای مود اول و دوم و E مدول الاستیسیته است. رابطه بالا برای مسائل تنش صفحهای کاربرد دارد. در مسائل کرنش صفحهای E جای خود را به (2v-1)/E میدهد. به طور مشابه رابطه بین ضرایب شدت تنش خمشی و انتگرال J خمشی به شکل زیر ارائه می شود:

$$J^{b} = \frac{\pi}{3E} \left( \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) (K_{1}^{2} + K_{2}^{2})$$
 (Y•)

که در این رابطه K<sub>1</sub> و K<sub>2</sub> ضرایب شدت تـنش خمشـی و پیچشی است[۱۷].

۴- حل چند مثال و بررسی نتایج در این بخش به بررسی کارایی کد اجزای محدود توسعهیافته پوسته پرداخته میشود. بدین منظور به حل چند مسئله پرداخته و نتایج بهدست آمده با جوابهای تحلیلی موجود و نتایج نرمافزاری دیگر مقایسه میشود.

# ۴-۱- مثال اول. ورق مستطیلی دارای ترک مرکزی تحت بارگذاری خمشی شکل ٤، مسئله شناخته شده خمش خالص را نشان میدهد که ضرایب شدت تنش آن به شکل زیر است.

$$K_{1} = \frac{6M_{0}}{h^{2}}\sqrt{a}$$
,  $K_{2} = 0$  (M)

در این مسئله یک ورق مستطیلی به ابعاد ۸۸ در ۷۰ میلیمتر و ضخامت ۱ میلیمتر با ماده همسانگرد همگن در نظر گرفته شده است [ E = 210000N/mm<sup>2</sup> ]. روی گرههای وجه پایینی گشتاور، 10N.mm/mm اعمال شده و در مورد گرههای وجه بالایی، چرخش حول وجه مذکور، زير تعريف ميشود:

$$J^{p} = \int_{\Gamma} (W^{p} dy - T_{i} \frac{\partial u_{i}}{\partial x} ds)$$
 (72)

که Ti بردار نیرو بر واحد طول روی منحنی بسته ۲ و ui تغییر مکانهای صفحهای است. W چگالی انرژی کرنشی صفحهای است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$W^{p} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$
(Y0)

انتگرال رابطه (۲٤) روی منحنی بسته ۲ تعریف شده که براورد آن در محاسبات عددی مشکل است. میتوان با استفاده از قضیه دیورژانس این انتگرال را به انتگرال ناحیه تبدیل کرد:

$$J^{p} = \int_{A} \left[ (\sigma_{ij} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{1}} - W^{p} \delta_{1i}) \frac{\partial q}{\partial x_{i}} \right] dA$$
 (Y7)

ناحیه A در این انتگرال، محصور بین دو منحنی بسته است که ترک را احاطه کردهاند و q تابع وزنی همواری است که روی منحنی داخلی، مقدار یک و روی منحنی بیرونی مقدار صفر را داراست[۲]. انتگرال <sup>d</sup>ل برای آنالیز خمشی عبارت است از:

$$J_{k}^{b} = \oint_{\Gamma} \left\{ W^{b} \delta_{k,\beta} - \left[ M_{\alpha\beta} \theta_{\alpha,k} \right] \right\} n_{\beta} d\Gamma \quad \alpha,\beta = 1,2$$
 (YV)

که در این رابطه W<sup>b</sup> چگالی انرژی کرنشی خمشمی است به شکل زیر تعریف میشود:

$$W = \frac{1}{2} \left[ M_{\alpha\beta} \theta_{\alpha,\beta} \right] \tag{YA}$$

رابطه (۲۷) را نیز می توان مشابه رابطه (۲٦) به فرم انتگـرال ناحیه تبدیل کرد. رابطه بین ضرایب شدت تـنش صـفحهای و مقادیر انتگرال J صفحهای به شکل زیر ارائه می شود:

صفر در نظر گرفته شده است به طوری که شرایط خمش خالص حاصل شود. مسئله برای ترک با طول های مختلف حل شده است. برای شبکهبندی مدل از ۱۵۰۵ المان مستطیلی استفاده شده است.



نتایج به دست آمده برای ضریب شدت تنش در جدول ۱ آمده است. لازم به ذکر است که برای محاسبه انتگرال J از یک سری دایره حول ترک استفاده شده و المانهای قطع شده به وسیله این دایره ها به عنوان ناحیه انتگرال گیری در نظر گرفته شده است. مقادیر K۱ به دست آمده دقیقاً یکسان نظر گرفته شده است. مقادیر ۱۸ به دست آمده دقیقاً یکسان بیست اما اختلاف بین بیشینه و کمینه مقادیر محاسبه شده هیچگاه از ۱۰ درصد مقدار واقعی تجاوز نمی کند. در جدول ۱ از میانگین مقادیر استفاده شده است. شعاع دایره ها بین ۱/۲ تا ۱/۲ طول ترک تغییر می کند.

۲-۴- مثال دوم. ورق مستطیلی یےک سـر گیـردار دارای ترک مرکزی تحت بارگذاری برشی

شکل ۵ ورق مثال قبل را نشان میدهد که وجه بالایی آن در تمامی جهات مقید شده وجه پایینی آن تحت بارگذاری برشی ۱N/mm است قرار دارد.



شکل (٥) ورق مستطیلی یک سر گیردار تحت بارگذاری برشی

در این مثال، تغییرمکانهای گرههای روی خط AB با نتایج بهدست آمده از نرمافزار انسیس مقایسه شده است. در تحلیل نرمافزار انسیس از المانهای پوسته SHELL93 استفاده شده و تکنیک المانهای منفرد برای شبیهسازی ترک بهکار گرفته شده است.

طول ترک (mm)	(۳۱) رابطه $K_1$ Analytical $\left(MPa\sqrt{mm}\right)$	$ \begin{array}{c} \mathbf{K}_{1} \ \textit{Code} \\ \left( \mathbf{MPa} \sqrt{\mathbf{mm}} \right) \end{array} $	$\frac{\mathbf{K}_{1} \ \textit{Code}}{\mathbf{K}_{1} \ \textit{A nalytical}}$
١٢	127/97	127/92	•/९९९९
١٦	179/1	179/7	•/٩٩٩
۲.	114/12	ΝΑΥ/Α	•/٩٩
٢٤	T · V/AO	T • E/V	•/٩٨
77	222/0	۲۲٦/•٦	•/٩٨

جدول (۱) ضرایب شدت تنش برای ورق مستطیلی با ترک مرکزی تحت بارگذاری خمشی

دوره دهم، شماره ٤/ زمستان ۱۳۸۹

شکلهای ۲ تا ۸ تغییرمکانهای عمودی w و چرخش حول محورهای x و y را مقایسه میکنند. بیشینه درصد خطا برای تغییرمکان عمودی و چرخش حول محور x به ترتیب 0.13% و 0.12% است که نشانگر انطباق خوب نتایج بهدست آمده است.



**شکل (٦)** تغییرمکان عمودی w برای گرههای منطبق بر خط y=26



شکل (۷)چرخش حول محور x برای گرههای منطبق برخط y=26



**شکل(۸)** چرخش حول محور y برای گرههای منطبق برخط y=26

# ۴-۳- مثال سوم. پوسته استوانه دارای ترک مرکزی در راستای محور، تحت فشار داخلی

در این مثال به بررسی یک استوانه تحت فشار داخلی مطابق شکل ۹ پرداخته شده است. برای سادگی و کاهش حجم محاسبات از <sup>4</sup>

لازم بر روی وجوه CD و EF، مدل اعمال شده است. بدین ترتیب که در مورد گرههای روی وجه EF، تغییرمکان در جهت z و چرخش حول محورهای x و y انجام شده و در مورد گرههای روی وجه CD تغییرمکان در جهت y و چرخش حول محورهای x و z انجام شده است. همچنین تغییرمکان در جهت x برای گرههای روی وجه CD و DF نیز انجام شده است. در ابتدا بدون در نظر گرفتن ترک، به مقایسه نتایج کد و نرمافزار انسیس پرداخته و سپس یک ترک مرکزی در راستای محور استوانه در نظر گرفته و



شکل (۹) پوسته استوانهای دارای ترک محوری تحت فشار داخلی



شکل (۱۰) تغییرمکان در جهت x نقاط واقع بر خط AB

شکلهای ۱۰ تا ۱۲ تغییرمکانهای بهدست آمده از کد و نرمافزار انسیس روی خط AB را مقایسه میکنند. نتایج بهدست آمده از حل کد پوسته، بدون در نظر گرفتن ترک و

نرمافزار انسیس بدون هیچ خطایی بر هم منطبق است. با در نظر گرفتن ترک در مدل، بیش ترین درصد خط برای تغییرمکانهای بهدست آمده در جهات x، y و z در مقایسه با نتایج نرمافزار انسیس به ترتیب ۲٪، ۷٪ و ۳٪ است.



شکل (۱۱) تغییرمکان در جهت y نقاط واقع بر خط AB



شکل (۱۲) تغییرمکان در جهت z نقاط واقع بر خط AB

### ۵- جمع بندی و نتیجه گیری

هدف این تحقیق، شبیهسازی ترک در ورقها و پوستههای نازک کیرشهف با استفاده از روش اجزای محدود توسعهیافته است. بدین منظور یک سری توابع جدید از حلهای تحلیلی موجود ورقهای دارای ترک استخراج شده و در فرایند افزایش درجات آزادی گرههای اطراف ترک (غنی سازی) از آنها استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان می دهد که کد حاضر در شبیه سازی پوسته های دوبعدی و سه بعدی بدون ترک، تحت انواع بارگذاری های

خمشی، کارایی مناسبی داشته و نتایج بهدست آمده کاملاً با نتایج سایر نرمافزارهای اجزای محدود مطابقت دارد؛ به نحوی که نمودارهای تغییرمکان در جهات مختلف کاملاً منطبق بر تغییرمکانهای بهدست آمده از نرمافزار انسیس است. سپس به بررسی کارایی کد در شبیهسازی ورقها و پوستههای دارای ترک پرداخته شده است. با حل چند مثال و مقایسه نتایج بهدست آمده با جوابهای تحلیلی موجود و نتایج نرمافزاری مشاهده شد که جوابهای بهدست آمده از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

## پیوست ۱ - فرمول بندی اجزای محدود ورق

همان طور که در رابطه (۲) دیده می شود، تنها پارامتر مجهول در معادله دیفرانسیل مرتبه چهار ۱۷ است. برای تقریب ۱۷ با توجه به وجود ۱۲ درجه آزادی گرهی در هر المان می توان از یک چندجملهای با ۱۲ پارامتر استفاده کرد. این چند جملهای یک چندجملهای درجه چهار ناقص خواهد بود، زیرا تعداد پارامترهای یک چندجملهای درجه چهار کامل بیشتر از ۱۲ است؛ پس مجبوریم برخی از عبارات را حذف کنیم. یکی از فرمهای مرسوم این

$$\begin{split} & w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{w}_{i} &= \alpha_{1} + \alpha_{2} \mathbf{x}_{i} + \alpha_{3} \mathbf{y}_{i} + \dots \\ & \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}}\right)_{i} = \hat{\theta}_{\mathbf{x}i} = \alpha_{3} + \alpha_{5} \mathbf{x}_{i} + \dots \\ & -\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{i} = \hat{\theta}_{\mathbf{y}i} = -\alpha_{2} - \alpha_{5} \mathbf{y}_{i} + \dots \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{r}! (\mathbf{n} - \mathbf{r})!} \end{split}$$

$$\theta_{y_i}$$
 و  $\theta_{x_i}$  ،w\_i با جایگذاری مقادیر گرهـی درجـات ازادی  $\theta_{x_i}$  و

- [3] Sukumar N., Mo¨es N., Moran B., and Belytschko T., *Extended finite element method for three-dimensional crack modeling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(11), (2000), 1549–1570.
- [4] Sukumar N., Chopp D. L., Mo<sup>-</sup>es N., and Belytschko T., Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (46–47), (2001), 6183–6200.
- [5] Chopp D. L. and Sukumar N., Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method, International Journal of Engineering Science, Volume 41, Issue 8, May (2003), 845-869
- [6] Mo"es N. and Belytschko T., *Extended finite element method for cohesive crack growth*, Engineering Fracture Mechanics 69(7), (2002), 813–833.
- [7] Dolbow J., Gosz M., On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials, International Journal of Solids and Structures, 39, (2002), 2557–2574
- [8] Asadpoure A., Mohammadi S. and Vafai A., Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method, Thin-Walled Structures, Volume 44, Issue 9, (2006), 1031-1038
- [9] Dolbow J., Mo<sup>°</sup>es N., Belytschko T., *Modeling* fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method, International Journal of Solids and Structures, 37, (2000), 7161-7183
- [10] Areias P.M.A., Belytschko T., Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM, Int. J. Numer. Methods Engrg., 62, (2005), 384–415.
- [11] Areias P.M.A., Song J.H., Belytschko T., Analysis of fracture in thin shells by overlapping paired elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195, (2006), 5343–5360.
- [12] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., *The Finite Element Method, volume 2: The Basis,* Butterwotrth Heinemann, (2000)
- [13] Williams M, On the stress distribution at the

مجله علمی – پژوهشی عمران مدرس

در چهار گره المان، می توان توابع شکل را تعیین کرد. یک دسته از توابع شکلی که به شکل بالا بهدست می آید توسط ملوش ارائه شد که در دستگاه مختصات نرمال شده به شکل زیر است[۱٦]:

$$\mathbf{N}_{i}^{T} = \frac{1}{8} (1 + \xi_{0})(1 + \eta_{0}) \begin{cases} 2 + \xi_{0} + \eta_{0} - \xi^{2} - \eta^{2} \\ b \eta_{i}(1 - \eta^{2}) \\ -a \xi_{i}(1 - \xi^{2}) \end{cases}$$
(Y'  $\boldsymbol{\xi}$ )

که

$$\xi_0 = \xi \xi_i$$
 جایی که:  $\xi = \frac{x - x_c}{a}$  (۳٥)  
 $\eta_0 = \eta \eta_i$  جایی که:  $\eta = \frac{y - y_c}{b}$ 

با درنظر گرفتن توابع شکل بـالا مــی تــوان مـاتریس سـفتی المانی را محاسبه کرد:

$$\mathbf{K}^{e} = \int_{\Omega^{e}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathrm{d} \mathbf{x} \mathrm{d} \mathbf{y} \tag{P1}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{i}] = [\mathbf{B}_{1}, \mathbf{B}_{2}, \mathbf{B}_{3}, \mathbf{B}_{4}] = (\mathbf{L}\nabla)\mathbf{N}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_{i1}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{i2}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{i3}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_{i1}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{i2}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{i3}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_{i1}}{\partial y \partial x} & 2\frac{\partial^2 N_{i2}}{\partial y \partial x} & 2\frac{\partial^2 N_{i2}}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}$$
(TV)

$$\mathbf{f}_{i} = \int_{a}^{b} \int_{a}^{a} \mathbf{N}^{T} \mathbf{q} dx dy$$
 (YA)

#### ۶- منابع

- Belytschko T. and Black T., *Elastic crack growth* in finite elements with minimal remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering 45 (5), (1998), 601–620.
- [2] Dolbow J., An Extended Finite Element with Discontinuous enrichment, for Applied Mechanics PhD thesis, Northwestern University, 1999

*base of a stationary crack,* Journal of Applied Mechanics 24, (1957), 109-114.

- [14] Sih G, Paris P, and Erdogan F, Crack-tip stressintensity factors for plane Extension and plate bending problems, Journal of Applied Mechanics 29, (1962), 306-312.
- [15] Williams M, *The bending stress distribution at the base of a stationary crack*, Journal of Applied Mechanics 28, (1961), 78-82.
- [16] Melosh R.J., *Structural analysis of solids,* ASCE Structural Journal, 4, (1963), 205-23.
- [17] Hui C.Y., Zehnder A, *A theory for the fracture* of thin plates subjected to bending and twisting moments, International Journal of Fracture 61, (1993), 211-229.