

# ارزیابی احتمالاتی ظرفیت باربری پی‌های نواری مستقر بر شیروانی‌های ناهمگن با استفاده از تحلیل حدی المان محدود و روش سطح پاسخ

مقداد پایان<sup>۱</sup>

۱- استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

payan@guilan.ac.ir

تاریخ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۰

تاریخ دریافت ۱۴۰۱/۰۶/۲۲

## چکیده

در این مقاله، از روش سطح پاسخ<sup>۱</sup> برای ارزیابی احتمالاتی ظرفیت باربری پی‌های سطحی که در نزدیکی شیروانی‌های ناهمگن طبیعی قرار دارند استفاده شده است. این روش به طور قابل توجهی تعداد شبیه‌سازی‌های مونت کارلوی<sup>۲</sup> مورد نیاز برای انجام تحلیل‌های احتمالاتی را کاهش می‌دهد. بر این اساس، ابتدا یک مدل تحلیل حدی المان محدود<sup>۳</sup> طبق قضیه حد پایین ایجاد می‌شود. رفتار خاک در این تحلیل حدی از معیار تسلیم پلاستیک کامل موهر-کولمب با هماهنگی بر قانون جریان همراه تبعیت می‌کند. برای تولید یک پایگاه داده مصنوعی بزرگ، از نتایج عددی ظرفیت باربری پی‌های سطحی روی شیروانی‌های طبیعی ذاتا متغیر استفاده می‌شود. برای این منظور، جایگشتی از پارامترهای کلیدی تأثیرگذار روی ظرفیت باربری شکل گرفته و بارهای حدی گسیختگی مبتنی بر روش آنالیز حدی و از طریق بهینه‌سازی در متلب<sup>۴</sup> جستجو می‌شوند. بر این اساس، یک راه-حل تحلیلی با استفاده از چندجمله‌ای‌های مبتنی بر روش سطح پاسخ فرموله می‌شود. این معادلات که از تحلیل‌های رگرسیون حداقل مربعات بدست می‌آیند، برای انجام شبیه‌سازی‌های احتمالاتی مونت کارلو استفاده شده و نتایج به صورت توابع توزیع تجمعی ارائه می‌شوند. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که زاویه شیروانی ۷۵ درجه باعث کاهش چشمگیر ضریب اطمینان یا به عبارت دیگر، افزایش احتمال گسیختگی در مقایسه با زاویه شیب‌های کمتر می‌شود. از طرف دیگر، زاویه شیب ۴۵ درجه نسبت به زاویه شیب ۶۰ درجه، ضریب اطمینان بالاتر و احتمال خرابی کمتری را نشان می‌دهد. همچنین مشاهده شد که افزایش فاصله پی تا شیروانی باعث می‌شود که احتمال گسیختگی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد و در عین حال منجر به افزایش شاخص قابلیت اطمینان برای اکثر مقادیر ضریب اطمینان طراحی می‌شود. در واقع، برای هدف قراردادن یک احتمال خاص برای گسیختگی یا یک شاخص قابلیت اطمینان خاص، ضریب اطمینان کمتری برای فواصل بیشتر پی با شیروانی مورد نیاز است.

**واژگان کلیدی:** پایداری شیروانی؛ ظرفیت باربری؛ روش سطح پاسخ؛ تحلیل حدی المان محدود؛ شاخص قابلیت اطمینان.

1 Response Surface Method  
2 Monte-Carlo Simulations  
3 Finite Element Limit Analysis  
4 MATLAB

## ۱- مقدمه

ظرفیت باربری پی‌های سطحی موضوعی است که در علم مهندسی ژئوتکنیک اهمیت زیادی دارد. ظرفیت باربری باید به گونه‌ای تعیین شود که پی بار روسازه را بدون هیچ‌گونه آسیبی به خاک زیرین منتقل کند. مساله ظرفیت باربری پی‌های سطحی در ادبیات فنی عموماً برای حالت پی مستقر روی زمین صاف مورد بررسی قرار گرفته است. این مساله کلاسیک زمانی پیچیده‌تر می‌شود که پی روی یک شیروانی قرار گیرد. تاکنون مطالعات زیادی با تمرکز بر ارزیابی ظرفیت باربری پی‌های سطحی مستقر بر شیروانی‌ها انجام شده است [1-6]. در یکی از این مطالعات، کشاورز و همکاران (۲۰۱۹) ظرفیت باربری زهکشی‌نشده پی نواری روی شیروانی‌های رسی را با استفاده از آنالیز المان محدود مورد ارزیابی قرار دادند. در مطالعه دیگری، ینگ و همکاران (۲۰۲۱) اثر سازوکار گسیختگی روی ضرایب ظرفیت باربری پی‌های سطحی مستقر بر شیروانی‌ها را بررسی کردند.

با این حال، بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه ظرفیت باربری پی‌های سطحی مستقر بر شیروانی‌ها به شیروانی‌های همگن اختصاص یافته است و سهم قابل‌توجه ناهمگنی پارامترهای مقاومت برشی خاک معمولاً نادیده گرفته شده است. رسوبات طبیعی خاک دارای درجات خاصی از تغییرپذیری ذاتی<sup>۱</sup> هستند که این امر موجب بروز عدم قطعیت در هنگام مواجهه با مسائل پایداری ژئوتکنیکی می‌شود [7-9]. ارزیابی احتمالاتی ظرفیت باربری پی‌های سطحی که روی شیروانی‌های خاکی قرار دارند در برخی از مطالعات قبلی در ادبیات فنی با در نظر گرفتن ناهمگنی و تغییرپذیری مکانی<sup>۲</sup> خاک انجام شده است [10-12]. با این حال، این مطالعات محدود به پارامترهای خاص ژئوتکنیکی و هندسی بوده و از روش‌های مرسوم حدی تعیین ظرفیت باربری از جمله روش آنالیز حدی المان محدود استفاده نکرده‌اند. در این مطالعه، از قضیه حد پایین در تحلیل حدی المان محدود<sup>۳</sup> به همراه روش

سطح پاسخ (RSM) برای ارزیابی تأثیر تغییرپذیری تصادفی<sup>۴</sup> پارامترهای مقاومت برشی خاک رس بر ظرفیت باربری پی‌های سطحی واقع بر روی شیروانی‌های ناهمگن استفاده شده است. روش سطح پاسخ در این مطالعه به کار گرفته شده است تا از نیاز به استفاده از شبیه‌سازی‌های متعدد و زمانبر مونت‌کارلو جلوگیری کند.

## ۲- آنالیز حدی المان محدود (FELA)

دلیل اصلی استفاده از روش حد پایین جواب‌های محافظه‌کارانه این روش در تخمین ظرفیت باربری پی‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر، مطالعات گسترده پیشین در این زمینه نشان داده است که روش حد پایین نسبت به روش‌های مرسوم دیگر، از قبیل حد بالا، تعادل حدی و ...، جواب‌هایی در جهت اطمینان برای طراحی ارائه می‌دهد. علاوه بر این، در این مطالعه، هدف اصلی بررسی اثر پارامترهای مختلف یقینی و تصادفی روی روند تغییرات ظرفیت باربری پی روی شیروانی است و مقدار این ظرفیت باربری موضوع اصلی بحث در این مطالعه نیست.

هندسۀ مسئله مورد مطالعه در شکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، یک پی سطحی با عرض B در فاصله a از یک شیروانی خاکی به ارتفاع ۴ متر قرار دارد که رفتار خاک آن از معیار تسلیم پلاستیک کامل<sup>۵</sup> موهر-کولمب<sup>۶</sup> با تطابق بر قانون جریان همراه<sup>۷</sup> تبعیت می‌کند. در این مطالعه، از قضیه حد پایین آنالیز حدی المان محدود برای ارزیابی ظرفیت باربری این پی سطحی استفاده می‌شود. در این رویکرد، با در نظر گرفتن یک میدان تنش قابل‌قبول در محیط خاک زیر پی با استفاده از تکنیک برنامه‌نویسی غیرخطی<sup>۸</sup>، حد پایین بار گسیختگی واقعی پی بدست می‌آید [13-26]. مراجع ذکرشده، مراجع پایه‌ای و مطالعات اصلی روش حد پایین هستند که کلیه معادلات این روش به همراه کلیه جزئیات در

4 Random Variability

5 Perfectly-plastic

6 Mohr-Coulomb

7 Associated Flow Rule

8 Second-order Cone Programming

1 Inherent Variability

2 Spatial Variability

3 Lower Bound Finite Element Limit Analysis

$$A^e = \frac{1}{2} |\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1| \quad (5)$$

$$\xi_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2;$$

$$\eta_1 = y_2 - y_3; \quad (6)$$

$$\zeta_1 = x_3 - x_2$$

$$\xi_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3;$$

$$\eta_2 = y_3 - y_1; \quad (7)$$

$$\zeta_2 = x_1 - x_3$$

$$\xi_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

$$\eta_3 = y_1 - y_2; \quad (8)$$

$$\zeta_3 = x_2 - x_1$$

علاوه بر این، تئوری آنالیز حدی حد پایین بیان می‌کند که چهار محدودیت باید در مش المان محدود محیط خاک زیر شالوده رعایت شود تا میدان تنش قابل قبول مطلوب بدست آید. این محدودیت‌ها شامل تعادل المان، تعادل ناپیوستگی، شرایط مرزی و معیار تسلیم هستند که در ادامه این محدودیت‌ها به طور مختصر شرح داده خواهند شد.

بر اساس محدودیت تعادل المان، تمام المان‌های مثلثی در مش‌بندی مساله باید در حالت تعادل استاتیکی باشند که در راستای X و Y به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (10)$$

محدودیت تعادل ناپیوستگی بیان می‌کند که تنش‌های نرمال و برشی باید در سرتاسر محیط مسئله، از جمله ناپیوستگی‌های مجاز در امتداد فصل مشترک المان‌های مثلثی مجاور، پیوسته باشند. لازم به ذکر است که در روش آنالیز حدی المان محدود، هر گره با توجه به المان‌های درگیر مختلف ممکن است چند شماره داشته باشد. بر اساس محدودیت شرایط مرزی، تنش‌های القایی مقید به داشتن مقادیر خاصی در لبه‌های مرزی حوزه مساله و همچنین سطح مشترک خاک و پی هستند. در این

آن‌ها ارائه شده است و توصیه می‌شود خواننده برای جزئیات فرمولاسیون به این مقالات رجوع کند. برای تکمیل بحث در این مطالعه، معادلات اصلی روش آنالیز حدی المان محدود به روش حد پایین در ادامه ارائه می‌شوند.

شکل ۱: تصویر شماتیک هندسه مساله مورد مطالعه

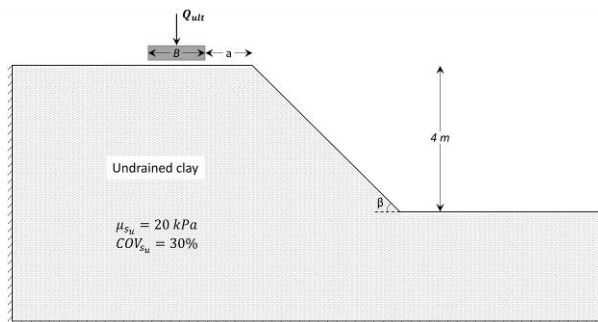


Fig. 1. Schematic illustration of the problem under study

بر اساس تئوری‌های روش المان محدود برای یک مسئله کرنش مسطح، سه متغیر تنش برشی و نرمال مجهول ( $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  و  $\tau_{xy}$ ) به هر گره در شبکه المان محدود اختصاص داده می‌شود. تنش‌های داخل المان‌های مثلثی از طریق توابع شکل خطی شناخته شده با استفاده از دستگاه مختصات کارتزین و قانون دست راست ارزیابی می‌شوند. میدان تنش در محیط خاکی به صورت زیر در گره‌ها تعریف می‌شود:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{x,i} \quad (1)$$

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{y,i} \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xy,i} \quad (3)$$

که توابع شکل در آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_i = (\xi_i + \eta_i x + \zeta_i) / 2A^e \quad (4)$$

که در این رابطه ضرایب شکل و مساحت المان به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

روند مرحله به مرحله مدل‌سازی تحلیل حدی المان محدود در مطالعه حاضر در فلوچارت شکل (۲) نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که کلیه فرمولاسیون تحلیل حدی المان محدود در مطالعات پیشین به تفصیل بیان شده است [26-13].

شکل ۲. روند مرحله به مرحله مدل‌سازی تحلیل حدی المان محدود در

مطالعه حاضر

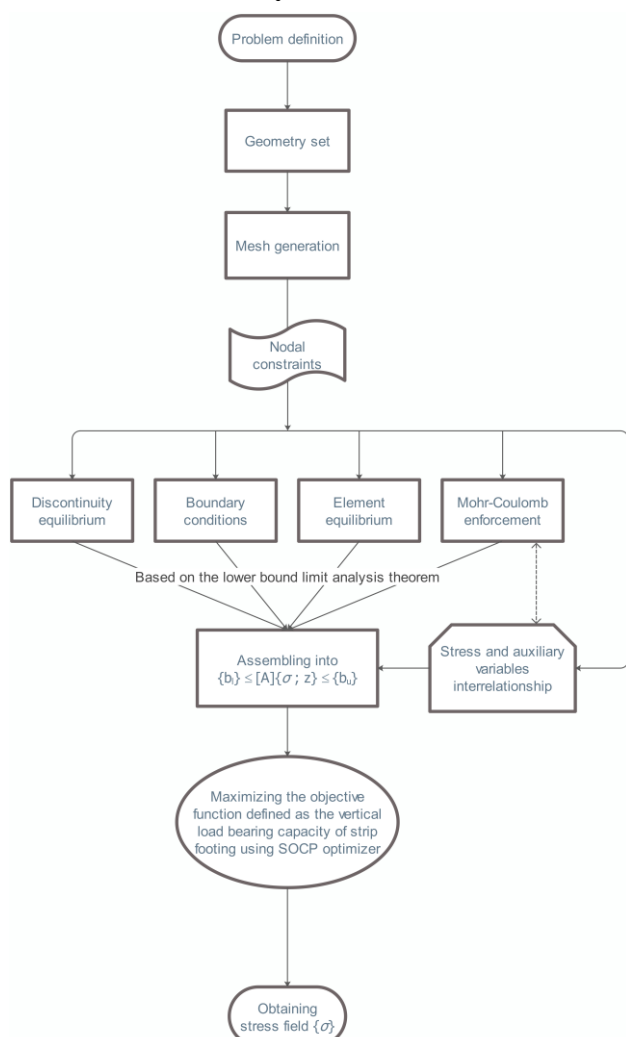


Fig. 2. Step-by-step procedure for the finite element limit analysis simulations in the current study

### ۳- تغییرپذیری ذاتی پارامترهای مقاومت برشی خاک

تغییرپذیری ذاتی پارامترهای مقاومت برشی خاک ناشی از فرآیند و تاریخچه رسوب‌گذاری است. این ویژگی یکی از ویژگی‌های مهم نهشته‌های خاکی است که باید در هنگام انجام تحلیل‌های پایداری مورد توجه قرار گیرد. رویکرد رایج برای در

مسئله، شرایط مرزی تنش آزاد در اطراف پی روی سطح زمین برقرار است؛ یعنی:

$$\sigma_n = 0 \quad (11)$$

$$\tau = 0 \quad (12)$$

در سطح تماس بین خاک و پی نیز شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\tau_{xy}| \leq -\sigma_y \tan \delta_{sr} \quad (13)$$

به عنوان محدودیت چهارم، معیار تسلیم بیان می‌کند که حالت تنش در تمامی نقاط داخل محیط خاک زیر پی سطحی نباید از پوش گسیختگی موهر-کولمب با معادله زیر تجاوز کند:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [-(\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi]^2 \leq 0 \quad (14)$$

برای تبدیل تابع تسلیم مربوطه به فرم استاندارد غیرخطی مرسوم در محاسبات آنالیز حدی، سه متغیر کمکی شامل  $z_3 = 2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi$  و  $z_2 = 2\tau_{xy}$  و  $z_1 = (\sigma_x - \sigma_y)$  با در نظر گرفتن قید مرتبه دوم مخروطی ( $Q_c^3$ )، که به صورت زیر تعریف می‌شود، به فرمول‌های آنالیز حدی المان محدود معرفی می‌شوند:

$$Q_c^3 = \left\{ z \in R^3 : \sqrt{z_{1,i}^2 + z_{2,i}^2} \leq z_{3,i} \right\} \quad (15)$$

که در این رابطه  $i$  برابر با ۱، ۲، ۳، ... (تعداد نقاط) می‌باشد.

محدودیت‌های فوق همه در یک ماتریس کلی  $\{b_l\} \leq [A]\{X\} \leq \{b_u\}$  سرهم‌بندی می‌شوند و سپس از بهینه‌ساز مخروطی مرتبه دوم (SOCP) برای تعیین بردار مجهول  $\{X\}$  که شامل تمام تنش‌های گرهی در سراسر محدوده مساله است، استفاده می‌شود. تنش‌های نرمال وارد شده در امتداد فصل مشترک خاک و پی تابع هدف در این مساله هستند که انتگرال این تنش‌ها بیشینه شده تا ظرفیت باربری نهایی پی سطحی به صورت زیر تعیین شود:

$$V = \text{Maximize} \left\{ - \int_S \sigma \, dx \right\} \quad (16)$$

ذکر است که پارامترهای انتخاب شده در این مطالعه، کلیه پارامترهای تاثیرگذار روی ظرفیت باربری پی مستقر بر شبروانی بوده که مقادیر آنها در در محدوده‌های مرسوم برای شرایط مختلف ژئوتکنیکی انتخاب شده‌اند. به عنوان نمونه، نسبت فاصله پی از شبروانی به عرض پی معمولاً بین صفر تا یک متغیر است و در فواصل بیشتر، عملاً شبروانی تاثیر روی پی ندارد. همچنین با توجه به جدول، مقادیر متوسط مقاومت برشی زهکشی نشده بین ۲۰ تا ۸۰ کیلوپاسکال انتخاب شده است که مقادیر مرسوم متوسط این پارامتر در محل است. همچنین زاویه شیب بین ۴۵ تا ۷۵ درجه انتخاب شده است که محدوده وسیعی از شیب‌های معمول برای شبروانی‌های خاکی را دربرمی‌گیرد.

شایان ذکر است که در این مطالعه نیز تغییرات خطی مقاومت برشی زهکشی نشده با عمق در فرمولاسیون پیاده شده در متلب و محاسبات احتمالاتی با روش سطح پاسخ لحاظ شده است. در واقع، توزیع تصادفی مقاومت برشی زهکشی نشده در محدوده خاک مورد بررسی به شکلی تغییر می‌کند که برای همه حالات این پارامتر به صورت خطی با عمق افزایش یابد. شایان ذکر است که با توجه به مطالعات متعدد قبلی، مقدار ظرفیت باربری پی با در نظر گرفتن تغییرات خطی مقاومت برشی زهکشی نشده با عمق تقریباً برابر با مقدار ظرفیت باربری با در نظر گرفتن مقدار ثابت متوسط مقاومت برشی زهکشی نشده در عمق خاک است.

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مربوطه برای محاسبات مبتنی بر قابلیت اطمینان ظرفیت باربری نهایی پی سطحی مستقر بر روی شبروانی

Parameter	Values
Undrained shear strength ratio ( $s_u/\gamma B$ )	1, 2, 3, 4
Slope angle, $\alpha$ (°)	45, 60, 75
Distance ratio of foundation to slope (a/B)	0, 1

**Table 1.** Values of the relevant parameters considered for the reliability-based calculations of the ultimate bearing capacity of a shallow foundation resting on an earth slope

نظر گرفتن این ویژگی مهم در شبیه‌سازی‌های آنالیز حدی المان محدود حد پایین، پیاده‌سازی<sup>۱</sup> تغییرپذیری مکانی از طریق انجام تعداد زیادی از تحلیل‌های پایداری یقینی است. در این مورد، معمولاً از شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو به همراه تئوری میدان تصادفی برای ایجاد پیاده‌سازی‌های ذکر شده استفاده می‌شود. برای بیان روشن‌تر، باید تعداد کافی تحلیل پایداری با در نظر گرفتن تغییرات یک پارامتر تصادفی/احتمالی معمولی انجام شود تا توصیف روشنی از عدم قطعیت‌های موجود در محاسبات ارائه شود. با توجه به ماهیت زمان‌بر روش مونت‌کارلو برای انجام شبیه‌سازی‌های تصادفی متعدد، روش سطح پاسخ (RSM) به تازگی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است؛ زیرا این روش تکنیک بسیار کارآمدی برای تجزیه و تحلیل سریع پایداری تصادفی انواع مختلف سازه‌های ژئوتکنیکی می‌باشد. روش سطح پاسخ در بخش بعدی توضیح داده خواهد شد.

تغییرپذیری ذاتی پارامترهای مقاومت برشی خاک، همانطور که در بالا توضیح داده شد، در شبیه‌سازی‌های این مطالعه به شکل پارامترهای متغیر مکانی نشان داده می‌شود. ویژگی‌های آماری هر پارامتر تصادفی خاک شامل ضریب تغییرات<sup>۲</sup>، طول همبستگی<sup>۳</sup> و تابع توزیع احتمال<sup>۴</sup> می‌باشد. در این مطالعه، یک طول همبستگی بی‌نهایت با ضریب تغییرات برابر با ۳۰٪ ( $COV=30\%$ ) برای مقاومت برشی زهکشی نشده خاک در نظر گرفته شده است تا طراحی به صورت محافظه‌کارانه صورت پذیرد. محدوده تغییرات پارامترهای مختلف در نظر گرفته شده در تجزیه و تحلیل آنالیز حدی المان محدود مطابق با جدول (۱) انتخاب شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، دو پارامتر یقینی، یعنی زاویه شیب زمین ( $\alpha$ ) و نسبت فاصله پی تا شبروانی ( $a/B$ )، و همچنین یک پارامتر تصادفی یعنی مقاومت برشی زهکشی نشده رس ( $S_{II}$ )، برای محاسبات جامع طراحی مبتنی بر قابلیت اطمینان اتخاذ شده است. لازم به

- 1 Realizations
- 2 Coefficient of Variation
- 3 Correlation Length
- 4 Probability Distribution Function

#### ۴- روش سطح پاسخ (RSM)

از جمله مفاهیم طراحی آزمایشات (Design of Experiments)، روش سطح پاسخ (RSM) می‌باشد. این روش برای تحلیل آزمایش‌هایی کاربرد دارد که در آن یک یا چند متغیر مستقل به عنوان پاسخ تحت تاثیر متغیرهای زیادی قرار داشته و هدف بهینه‌یابی آن پاسخ است. از جمله برتری‌های استفاده از این روش (در کنار کاهش یافتن تعداد آزمایش‌ها) امکان ارائه‌کردن یک رابطه ریاضیاتی بین متغیر مستقل و متغیرهای وابسته است. همچنین در این روش امکان بررسی اثر متغیرهای کیفی (علاوه بر متغیرهای عددی) نیز وجود دارد. روش سطح پاسخ مجموعه‌ای از روش‌های آماری و ریاضی است که برای توسعه، بهبود و بهینه‌سازی فرآیندها مفید است. همچنین طراحی، توسعه و فرموله کردن محصولات جدید در بهبود طرح‌های موجود از اهم کاربردهای آن می‌باشد. گسترده‌ترین کاربرد روش سطح پاسخ در دنیای صنعتی است، به ویژه در موقعیت‌هایی که چندین متغیر ورودی به طور بالقوه بر عملکرد اندازه‌گیری‌ها یا ویژگی‌های کیفی محصول یا فرآیند تولید آن اثر می‌گذارند. این عملکرد اندازه‌گیری‌ها یا ویژگی‌های کیفی محصول پاسخ و متغیرهای ورودی متغیرهای مستقل نامیده می‌شوند.

در مطالعه حاضر، از یک روش ساده و در عین حال کارآمد مبتنی بر رگرسیون برای بدست آوردن معادله روش سطح پاسخ (RSM) برای ارزیابی ظرفیت باربری نهایی پی‌های سطحی روی شیروانی‌ها استفاده شده است. در این راستا، مایرز و مونتگومری (۲۰۰۲) [27] یک چندجمله‌ای درجه دوم شامل "m" متغیر ارائه کردند. این چندجمله‌ای، که به نوبه خود نیاز به انجام تعداد زیادی شبیه‌سازی مونت کارلو را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد، در معادله (۱۷) نشان داده شده است. به بیان دقیق‌تر، استفاده از تعداد بسیار کمی از تحلیل‌های آنالیز حدی المان محدود بر اساس محدوده پارامترهای نشان داده شده در جدول (۱) منجر به استخراج یک فرمول مطلوب و دقیق می‌شود که برای تحلیل‌های پایداری مبتنی بر قابلیت اطمینان بعدی مورد نیاز است. برای این منظور، یک پایگاه داده کامل از ۶۴ شبیه‌سازی آنالیز حدی المان محدود (FELA) حد

پایین در این مطالعه گردآوری شده است. جدول (۲) مقادیر ضرایب مجهول را که از طریق آنالیزهای عددی انجام شده در نرم‌افزار متلب (MATLAB) برآورد شده‌اند، نشان می‌دهد.

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \beta_{ij} x_i x_j \quad (17)$$

جدول ۲. ضرایب معادله سطح پاسخ برای پیش‌بینی ظرفیت باربری نهایی پی سطحی مستقر روی شیروانی

Value	Coefficient	Number
-1.41617945505430	$\beta_0$	1
2.10270759262114	$\beta_1$	2
6.53391232395470	$\beta_2$	3
1.60659150092700	$\beta_3$	4
-1.15572368367210	$\beta_4$	5
0.169208783492190	$\beta_5$	6
-0.71738897319637	$\beta_6$	7
1.44390783610134	$\beta_7$	8
0.295530082565465	$\beta_8$	9
-0.19237760268905	$\beta_9$	10

**Table 2.** Coefficients of the response surface equation for the prediction of the ultimate bearing capacity of shallow foundations resting on earth slopes

معادله (۱۷) فرم کلی معادلات پیشنهاد شده توسط مایرز و مونتگومری (۲۰۰۲) [27] می‌باشد که ضرایب آن در این مطالعه از رگرسیون داده‌های مربوط به ظرفیت باربری پی روی شیروانی در ۶۴ تحلیل آنالیز حدی انجام شده بدست آمده‌اند. در معادله بالا،  $y$  ظرفیت باربری پی روی شیروانی،  $x$  ها پارامترهای مستقل و  $\beta$  ها ضرایب معادله هستند که با استفاده از رگرسیون بدست آمده‌اند.  $x$ ها در این مطالعه، مقاومت برشی زهکشی‌نشده خاک، زاویه شیروانی و فاصله پی از شیروانی می‌باشند. در این مطالعه، معادله (۱۷) با ضرایب معین که از تحلیل‌های احتمالاتی و رگرسیون داده‌های آنالیز حدی المان محدود بدست آمده‌اند، برای بررسی و مقایسه نتایج بکار می‌رود. در واقع، ابتدا با تحلیل‌های محدود، یک معادله با

## ۵- طراحی پی سطحی مستقر روی شيروانی بر اساس قابلیت اطمینان

تحلیل احتمالاتی ظرفیت باربری پی یا تحلیل مبتنی بر قابلیت اطمینان کاربردهای زیادی در تحلیل و طراحی پی‌ها دارد. بیشتر روش‌های موجود برای تخمین ظرفیت باربری پی‌ها روش‌های یقینی هستند که در آن‌ها پارامترهای خاک با مقادیر مشخص و ثابت در محدوده موردبررسی در تحلیل‌ها وارد می‌شوند؛ در حالی که در عمل، پارامترهای مقاومتی خاک تغییرپذیری فضایی (spatial variability) دارند که لحاظ کردن اثر این تغییر پارامترها در محدوده تاثیر پی تاثیر قابل توجهی روی ظرفیت باربری آن دارد. در واقع، با لحاظ کردن تغییرپذیری فضایی پارامترهای مقاومت برشی می‌توان روی ظرفیت باربری پی تحلیل احتمالاتی انجام داده و احتمال گسیختگی آن را با تغییر پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار داد. بنابراین کاربرد اصلی روش به کاررفته در این مطالعه زمانی است که در برآورد پارامترهای خاک عدم قطعیت وجود داشته باشد؛ بدین معنی که با نمونه‌برداری از خاک در محل‌های مختلف، پارامترهای مقاومتی متفاوتی برای خاک زیر پی بدست آید که در این صورت طراح به جای تحلیل یقینی، باید تحلیل احتمالاتی انجام دهد.

در این مطالعه، ۱,۰۰۰,۰۰۰ پیاده‌سازی مرتبط با مقاومت برشی زهکشی‌نشده رسوبات رس از طریق تئوری میدان تصادفی ایجاد شد که داده‌های آن‌ها به مدل توسعه‌یافته سطح پاسخ معرفی شد. در این راستا، ضریب تغییرات متغیر تصادفی مقاومت برشی زهکشی‌نشده برابر ۳۰ درصد در نظر گرفته شد. میدان تصادفی مقاومت برشی زهکشی‌نشده توسط یک میدان تصادفی با توزیع لگاریتمی توصیف شد. همچنین فرض بر این بود که میدان مقاومت برشی زهکشی‌نشده زیر پی از نظر مکانی همگن، اما از طریق پیاده‌سازی‌ها تصادفی است. به عبارت دیگر، خاک در پیاده‌سازی‌های متوالی به صورت ناهمگن مدلسازی شده است. این فرض به وضوح بیان می‌کند که برای هر کدام از پیاده‌سازی‌ها، مقاومت برشی زهکشی‌نشده در مناطق مختلف رسوب رسی با مختصات متفاوت مقادیر مساوی خواهد داشت؛ با این حال، مقدار مقاومت برشی زهکشی‌نشده

ضرایب معین برای ظرفیت باربری پی پیشنهاد شد که این معادله برای تخمین ظرفیت باربری پی در کلیه حالات دیگر موجود با تغییر پارامترها قابل استفاده است.

شکل (۳) مقایسه‌ای بین پیش‌بینی‌های ارائه‌شده توسط رویکردهای عددی آنالیز حدی المان محدود (FELA) و روش سطح پاسخ (RSM) (معادله ۱۷) را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، تطابق کاملاً خوبی بین پیش‌بینی‌های این دو روش وجود دارد که به طور کمی با مقدار میانگین انحراف از مدل<sup>۱</sup> برابر با یک و ضریب تغییرات انحراف از مدل برابر با ۴۰٪ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که انحراف از مدل نسبت مقادیر عددی (آنالیز حدی المان محدود حد پایین) به مقادیر روش سطح پاسخ است. سازگاری عالی بین پیش‌بینی‌های دو روش آنالیز حدی المان محدود (FELA) و روش سطح پاسخ (RSM) این واقعیت را تأیید می‌کند که رابطه (۱۷) یک فرمول کارآمد است که می‌تواند به آسانی و به طور مؤثر در شبیه‌سازی‌های بعدی مونت‌کارلو و محاسبات طراحی مبتنی بر قابلیت اطمینان مربوطه به کار گرفته شود.

شکل ۳. مقایسه بین مقایر ظرفیت باربری پیش‌بینی‌شده با استفاده از روش عددی آنالیز حدی المان محدود (FELA) و روش سطح پاسخ (RSM)

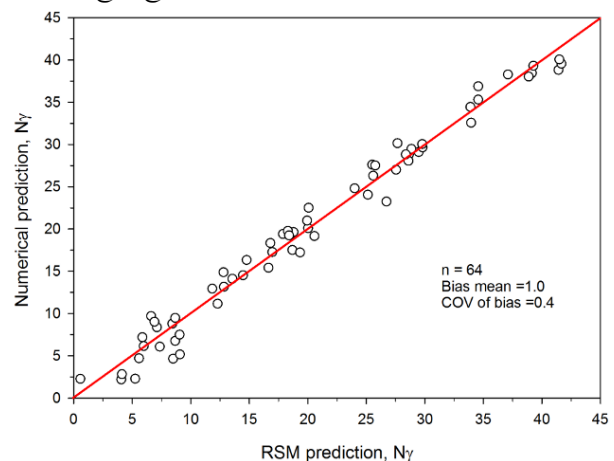
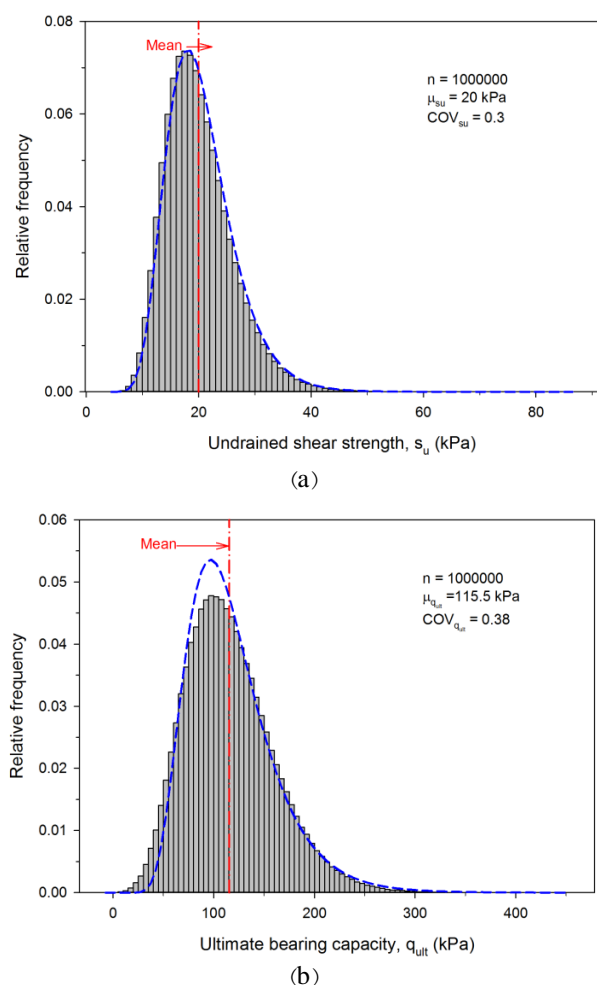


Fig. 3. Comparison between the predictions of the numerical finite element limit analysis (FELA) and response surface method (RSM)

1 Bias

شکل ۴. توزیع فرکانس نسبی شبیه‌سازی‌های احتمالاتی روش سطح پاسخ (RSM): (الف) مقاومت برشی زهکشی‌نشده رسوبات رسی، و (ب) ظرفیت باربری نهایی پی سطحی ( $\beta=60^\circ$ ,  $a/B=0$ )



**Fig. 4.** Relative frequency distribution of response surface method (RSM) probabilistic simulations; (a) undrained shear strength of the clay deposit, and (b) ultimate bearing capacity of the shallow foundation ( $a/B=0$ ,  $\beta=60^\circ$ )

بر این اساس، برای مساله مورد مطالعه،  $\mu_{su} = 20 \text{ kPa}$  به مدل سطح پاسخ (RSM) معرفی شده است تا چنین برآورد ظرفیت باربری را ارائه دهد. احتمال گسیختگی ( $p_f$ ) و شاخص قابلیت اطمینان ( $\beta$ ) را می‌توان به ترتیب با استفاده از معادلات (۱۸) و (۱۹) محاسبه کرد. توجه داشته باشید که احتمال گسیختگی، امکان تخمین احتمال گسیختگی را برای طیف وسیعی از توزیع مقاومت برشی زهکشی‌نشده در محیط خاک فراهم می‌کند؛ در حالی که شاخص قابلیت اطمینان با یک تبدیل ساده یک شاخص معادل برای این مساله را معرفی می‌کند.

مربوطه از طریق پیاده‌سازی‌های متوالی دستخوش تغییرات می‌شود، که این امر موجب شبیه‌سازی ناهمگنی در محیط خاک می‌شود. این روش، یک رویکرد مرسوم در شبیه‌سازی‌های تصادفی و آنالیز سطح پاسخ است که در بسیاری از مطالعات پیشین نیز برای شبیه‌سازی ناهمگنی در محیط خاک استفاده شده است.

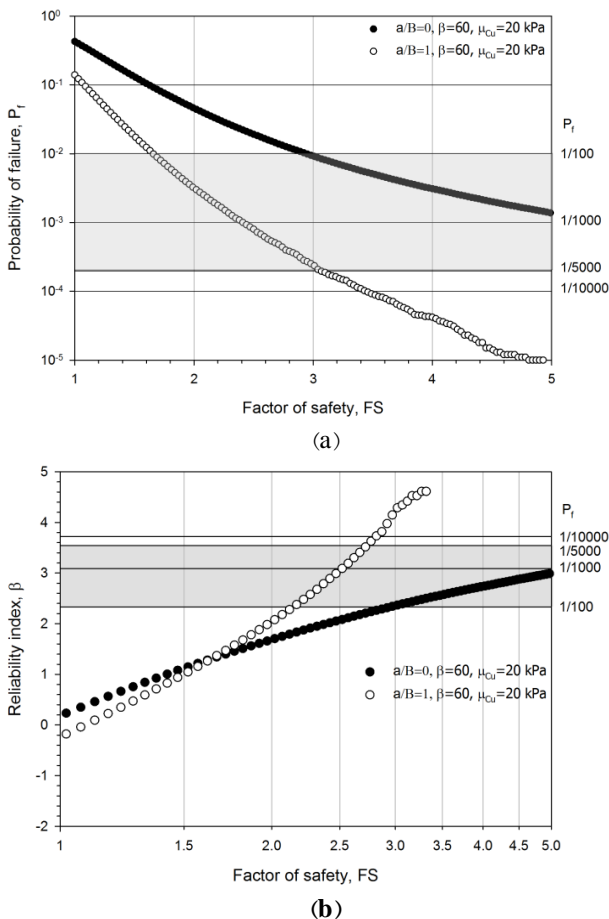
شکل (۴-الف) نمودار توزیع فرکانس نسبی میدان تصادفی مقاومت برشی زهکشی‌نشده که از توزیع لاگ-نرمال تبعیت می‌کند را نشان می‌دهد. وارد کردن مقادیر مقاومت برشی تصادفی زهکشی‌نشده تولیدشده در مدل سطح پاسخ (RSM)، ارزیابی دقیق ظرفیت باربری نهایی پی‌های سطحی را تسهیل می‌کند. شکل (۴-ب) یک تابع چگالی احتمال معمولی برای مقادیر ظرفیت باربری ارزیابی‌شده را برای حالت پی چسبیده به بالای شیروانی ( $a/B=0$ ) با زاویه شیب  $60^\circ$  ( $\beta=60^\circ$ ) نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، میدان ظرفیت باربری نهایی تخمین‌زده‌شده از یک توزیع فرکانس لاگ-نرمال قابل قبول پیروی می‌کند؛ مشاهده‌ای که می‌تواند به این واقعیت نسبت داده شود که بیشترین ظرفیت باربری پی نواری که در نزدیکی یک شیب رسی بنا شده است، از ظرفیت باربری خود نهشته رسی (روی زمین صاف) و همچنین سایر عوامل تأثیرگذار مانند زاویه شیب و فاصله پی تا شیروانی ناشی می‌شود. در نتیجه، غیرمنتظره نیست که ظرفیت باربری توزیع لاگ-نرمال میدان تصادفی مربوط به مقاومت برشی زهکشی‌نشده رسوبات خاکی زیرین را به ارث ببرد.

در این مرحله، مقادیر ظرفیت باربری ارزیابی‌شده پی سطحی با روش آنالیز حدی المان محدود در محاسبات طراحی مبتنی بر قابلیت اطمینان منظور خواهند شد. برای این منظور و برای امکان‌پذیر ساختن مقایسه بین دو طرف بار و مقاومت، باید یک تابع عملکرد تعریف شود. به بیان دیگر، برای یک ضریب اطمینان طراحی معین، مقادیر ظرفیت باربری تصادفی ارزیابی شده با بار سرویس (که از تقسیم ظرفیت باربری یقینی بر ضریب اطمینان طراحی بدست می‌آید) مقایسه می‌شود. شایان ذکر است که ظرفیت باربری یقینی براساس پارامترهای تصادفی میانگین برآورد شده است.



مربوط به هر حد را آسان کند. به طور خلاصه، طراح می‌تواند احتمال گسیختگی را برابر با  $1/10000$  یا حتی  $1/50000$  متناظر با ضرایب اطمینان طراحی مختلف، بسته به اهمیت سازه و چرخه عمر کل پروژه، فرض کند. شکل (۵) همچنین به وضوح نشان می‌دهد که زاویه شیروانی ۷۵ درجه باعث کاهش چشمگیر ضریب اطمینان یا به عبارت دیگر، افزایش احتمال گسیختگی در مقایسه با دو زاویه شیب دیگر می‌شود. از طرف دیگر، زاویه شیب ۴۵ درجه نسبت به زاویه شیب ۶۰ درجه، ضریب اطمینان بالاتر و احتمال خرابی کمتری را نشان می‌دهد.

شکل ۶. اثر فاصله پی تا شیروانی روی طراحی براساس قابلیت اطمینان پی های سطحی؛ (الف) احتمال گسیختگی؛ (ب) شاخص قابلیت اطمینان



**Fig. 6.** Effect of the footing-slope distance on reliability-based design of shallow foundations; (a) probability of failure, and (b) reliability index

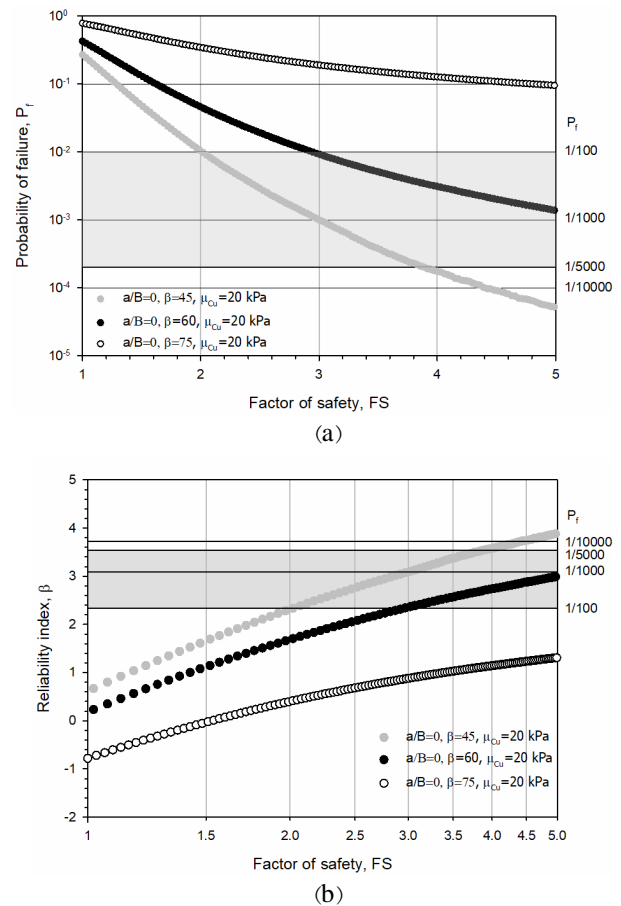
شکل (۶) تأثیر فاصله نرمال شده پی تا شیروانی را بر تغییرات احتمال گسیختگی و شاخص قابلیت اطمینان با ضریب

$$p_f = P(q_{ult} < \frac{Q_{u(det)}}{FS_d}) \quad (18)$$

$$\beta = \phi^{-1}(1 - p_f) \quad (19)$$

در این معادلات، ظرفیت باربری تصادفی است که از طریق تخمین مدل سطح پاسخ (RSM) بدست می‌آید. همچنین  $Q_{u(det)}$  ظرفیت باربری یقینی است که با در نظر گرفتن مقاومت برشی زهکشی نشده در حالت متوسط بدست می‌آید.  $FS_d$  نیز ضریب اطمینان طراحی است.

شکل ۵. اثر زاویه شیب شیروانی روی طراحی براساس قابلیت اطمینان پی های سطحی؛ (الف) احتمال گسیختگی؛ (ب) شاخص قابلیت اطمینان



**Fig. 5.** Effect of the earth slope angle reliability-based design of shallow foundations; (a) probability of failure, and (b) reliability index

شکل (۵) تغییرات احتمال گسیختگی و شاخص قابلیت اطمینان را با ضریب اطمینان طراحی فرضی برای زوایای شیب مختلف نشان می‌دهد. روی هر شکل، حدود اهداف مشخص به تصویر کشیده شده است تا انتخاب ضریب اطمینان طراحی

زهکشی نشده رسوبات رس تأثیر مثبتی بر کاهش احتمال گسیختگی و افزایش شاخص قابلیت اطمینان داشت. نتایج این مطالعه به طور کلی نشان داد که روش سطح پاسخ می‌تواند یک ابزار کارآمد در هنگام مواجهه با تحلیل‌های پایداری حجیم و وقت‌گیر مبتنی بر روش‌های عددی باشد.

## ۷- مراجع

- [1] Bathurst, R. J., Blatz, J. A., & Burger, M. H. 2003 Performance of instrumented large-scale unreinforced and reinforced embankments loaded by a strip footing to failure. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(6), 1067-1083.
- [2] Georgiadis, K. 2010 Undrained bearing capacity of strip footings on slopes. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 136(5), 677.
- [3] Leshchinsky, B. 2015 Bearing capacity of footings placed adjacent to  $c'-\phi'$  slopes. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 141(6), 04015022.
- [4] Keshavarz, A., Beygi, M., & Vali, R. 2019 Undrained seismic bearing capacity of strip footing placed on homogeneous and heterogeneous soil slopes by finite element limit analysis. *Computers and Geotechnics*, 113, 103094.
- [5] Izadi, A., Foroutan Kalourazi, A., & Jamshidi Chenari, R. 2021 Effect of roughness on seismic bearing capacity of shallow foundations near slopes using the lower bound finite element method. *International Journal of Geomechanics*, 21(3), 06020043.
- [6] Yang, S., Leshchinsky, B., Cui, K., Zhang, F., & Gao, Y. 2021 Influence of failure mechanism on seismic bearing capacity factors for shallow foundations near slopes. *Géotechnique*, 71(7), 594-607.
- [7] Christian, J. T. 2004 Geotechnical engineering reliability: How well do we know what we are doing?. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 130(10), 985-1003.
- [8] Griffiths, D. V., & Fenton, G. A. (Eds.). 2007 *Probabilistic methods in geotechnical engineering* (Vol. 491). Springer Science & Business Media.
- [9] Hamrouni, A., Sbartaï, B., & Dias, D. 2018 Probabilistic analysis of ultimate seismic bearing capacity of strip foundations. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 10(4), 717-724.
- [10] Luo, N., & Bathurst, R. J. 2017 Reliability bearing capacity analysis of footings on cohesive soil slopes

اطمینان طراحی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش فاصله پی تا شیروانی باعث می‌شود که احتمال گسیختگی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد و در عین حال منجر به افزایش شاخص قابلیت اطمینان برای بیشتر مقادیر ضریب اطمینان طراحی می‌شود. در واقع، برای هدف قراردادن یک احتمال خاص برای گسیختگی یا یک شاخص قابلیت اطمینان خاص، ضریب اطمینان کمتری برای فواصل بیشتر پی با شیروانی مورد نیاز است. لازم به ذکر است که برای مقادیر  $a/B$  بین صفر و یک، مقادیر احتمال گسیختگی و شاخص قابلیت اطمینان بین نمودارهای ارائه شده در شکل (۶) قرار می‌گیرند.

## ۶- نتیجه گیری

در این مطالعه، از روش سطح پاسخ (RSM) به عنوان یک روش کارآمد برای انجام تعداد زیادی از ارزیابی‌های احتمالاتی از ظرفیت باربری پی‌های سطحی که در نزدیکی شیروانی‌های رسی ناهمگن طبیعی ایجاد شده‌اند، استفاده شد. یک مدل تحلیل حدی المان محدود (FELA) توسعه داده شد که از آن برای تولید یک پایگاه داده بزرگ از محاسبات ظرفیت باربری برای پی سطحی که روی شیروانی‌های طبیعی ذاتا متغیر قرار دارد، استفاده شد. برای بررسی و مقایسه نتایج، یک رابطه کلی با استفاده از چندجمله‌ای مبتنی بر روش سطح پاسخ پیشنهاد شد که کارایی آن برای پیاده‌سازی در شبیه‌سازی‌های مونت-کارلو و محاسبات طراحی مبتنی بر قابلیت اطمینان مربوطه تایید شد. نتایج این مطالعه نشان داد که میدان ظرفیت باربری نهایی تخمین زده شده از یک توزیع فرکانس لاگ-نرمال قابل قبول پیروی می‌کند. همچنین مشاهده شد که زاویه شیروانی ۷۵ درجه باعث کاهش چشمگیر ضریب اطمینان یا به عبارت دیگر، افزایش احتمال گسیختگی در مقایسه با شیب‌های کمتر می‌شود. افزایش فاصله پی تا شیروانی باعث شد که احتمال گسیختگی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد و در عین حال منجر به افزایش شاخص قابلیت اطمینان برای بیشتر مقادیر ضریب اطمینان طراحی شد. همچنین افزایش مقاومت برشی

- [22] Fathipour, H., Payan, M., Jamshidi Chenari, R., & Senetakis, K. 2021 Lower bound analysis of modified pseudo- dynamic lateral earth pressures for retaining wall- backfill system with depth- varying damping using FEM- Second order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 45(16), 2371-2387.
- [23] Safardoost Siahmazgi, A., Fathipour, H., Jamshidi Chenari, R., Veiskarami, M., & Payan, M. 2021 Evaluation of the pseudo-dynamic bearing capacity of surface footings on cohesionless soils using finite element lower bound limit analysis. *Geomechanics and Geoengineering*, 1-13.
- [24] Fathipour, H., Payan, M., Jamshidi Chenari, R., & Fatahi, B. 2022 General failure envelope of eccentrically and obliquely loaded strip footings resting on an inherently anisotropic granular medium. *Computers and Geotechnics*, 146, 104734.
- [25] Fathipour, H., Payan, M., Safardoost Siahmazgi, A., Chenari, R. J., & Senetakis, K. 2022 Numerical study on the bearing capacity of strip footing resting on partially saturated soil subjected to combined vertical-horizontal-moment loading. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, DOI: 10.1080/19648189.2022.2080769.
- [26] Payan, M., Fathipour, H., Hosseini, M., Chenari, R. J., & Shiau, J. S. 2022 Lower Bound Finite Element Limit Analysis of Geo-Structures with Non-Associated Flow Rule. *Computers and Geotechnics*, 147, 104803.
- [27] Myers, R. H. & Montgomery, D. C. 2002 Response Surface Methodology: Process and Product Optimization using Designed Experiments, 2nd edn. John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- using RFEM. *Computers and Geotechnics*, 89, 203-212.
- [11] Halder, K., & Chakraborty, D. 2019 Probabilistic bearing capacity of strip footing on reinforced soil slope. *Computers and Geotechnics*, 116, 103213.
- [12] Halder, K., & Chakraborty, D. 2020 Probabilistic bearing capacity of strip footing on reinforced anisotropic soil slope. *Geomechanics and Engineering*, 23(1), 15-30.
- [13] Sloan, S. W. 1988 Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 12(1), 61-77.
- [14] Makrodimopoulos, A., & Martin, C. 2006 Lower bound limit analysis of cohesive- frictional materials using second- order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(4), 604-634.
- [15] Krabbenhøft, K., Lyamin, A. V., & Sloan, S. W. (2007). Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5), 1533-1549.
- [16] Sloan, S. W. (2013). Geotechnical stability analysis. *Géotechnique*, 63(7), 531-571.
- [17] Tang, C., Phoon, K. K., & Toh, K. C. 2015 Effect of footing width on  $N_\gamma$  and failure envelope of eccentrically and obliquely loaded strip footings on sand. *Canadian Geotechnical Journal*, 52(6), 694-707.
- [18] Ukritchon, B., & Keawsawasvong, S. 2018 Lower bound limit analysis of an anisotropic undrained strength criterion using second- order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 42(8), 1016-1033.
- [19] Fathipour, H., Siahmazgi, A. S., Payan, M., & Jamshidi Chenari, R. 2020 Evaluation of the lateral earth pressure in unsaturated soils with finite element limit analysis using second-order cone programming. *Computers and Geotechnics*, 125, 103587.
- [20] Fathipour, H., Siahmazgi, A. S., Payan, M., Veiskarami, M., & Jamshidi Chenari, R. 2021 Limit Analysis of Modified Pseudodynamic Lateral Earth Pressure in Anisotropic Frictional Medium Using Finite-Element and Second-Order Cone Programming. *International Journal of Geomechanics*, 21(2), 04020258.
- [21] Fathipour, H., Payan, M., & Jamshidi Chenari, R. 2021 Limit analysis of lateral earth pressure on geosynthetic-reinforced retaining structures using finite element and second-order cone programming. *Computers and Geotechnics*, 134, 104119.

# Probabilistic assessment of bearing capacity of strip footings seated on heterogeneous slopes using finite element limit analysis (FELA) and response surface method (RSM)

Meghdad Payan

Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Guilan

payan@guilan.ac.ir

## Abstract

This paper demonstrates the use of the response surface method (RSM) to carry out probabilistic assessment of bearing capacity of shallow footings seated near naturally occurring heterogeneous slopes. The method substantially reduces the number of Monte Carlo simulations required to carry out cumbersome probabilistic slope stability analyses. A finite element limit analysis model based on the lower bound theorem is developed. The soil behaviour in this model has been assumed to follow the associated plastic flow rule by conforming to the perfectly plastic Mohr-Coulomb failure criterion. The model is then used to generate a large synthetic database of numerical results for the bearing capacity of shallow foundations resting on inherently variable natural slopes. To this end, a permutation of the key parameters is formed and lower bound FELA-based limit loads are sought through optimization in MATLAB. A closed-form solution is formulated using RSM-based polynomials. The response surface method equations, which are acquired from least squares regression analyses, are used to carry out probabilistic Monte Carlo simulations. The results of the current study clearly show that the earth slope angle of  $75^\circ$  would give rise to the diminished factor of safety, or in other words, the substantially augmented probability of failure compared to the other two slope angles considered. On the other hand, the slope angle of  $45^\circ$  renders higher factor of safety and lower failure probability as compared to the slope angle of  $60^\circ$ . Moreover, it is observed that constructing the foundation at a farther distance relative to the slope would cause the probability of failure to substantially diminish while leading the reliability index to enhance for the majority of the various safety factor scenarios considered. Indeed, targeting a particular probability of failure or a specific reliability index would demand smaller factor of safety for greater soil-footing distances.

**Keywords:** Pseudo-static loading, geo-synthetic-reinforced soil, bearing capacity, inclined loading, finite element limit analysis.