

مدل سازی پارامتریک و تحلیل گرافیک استاتیک خرپاهای وارن قوسی

طاها صباغیان^{۱*}، یاسر شهبازی^۲، فرهاد آخوندی^۳

۱- دانش آموخته‌ی کارشناسی ارشد فناوری معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران

۲- دانشیار سازه‌های هوشمند و فناوری معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران

۳- استادیار استحکام بخشی بناهای تاریخی، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران

* t.sabaghian@tabriziau.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۸

چکیده

گرافیک استاتیک یک روش تحلیل و محاسبه بصری برای یافتن نوع و مقادیر نیروهای داخلی در سازه‌ها است که به دور از سختی‌های محاسباتی و تنها با رویکردی هندسی متمرکز بر دو نمودار متقابل فرم و نیرو به این مهم دست می‌یابد. در این مقاله با استفاده از گرافیک استاتیک به تحلیل خرپاهای قوسی مبتنی بر نوع وارن پرداخته شده است. برای این منظور، مدل پارامتریک نمودارهای فرم و نیرو در افزونه پارامتریک گرس‌هاپر برنامه نویسی شدند. پارامتریک سازی قابلیت فرم‌یابی و تحلیل هر نوع مختلفی از خرپاهای فرم آزاد شکل گرفته مبتنی بر نوع خرپای وارن را نیز فراهم نموده است. برای سنجش میزان اعتبار روش و دقت الگوریتم نوشته شده در افزونه‌ی گرس‌هاپر، به مقایسه نتایج عددی حاصل از چند نمونه‌ی خرپاهای قوسی تحت بارگذاری متفاوت، با روش محاسباتی المان محدود پرداخته شده است. حداکثر اختلاف میان دو روش ۱/۲٪ مشاهده شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های درستی‌آزمایی حاکی از دقت و سرعت بسیار زیاد الگوریتم پیشنهادی دارد.

واژگان کلیدی: خرپای قوسی وارن، گرافیک استاتیک، المان محدود، فرم‌یابی پارامتریک، گرس‌هاپر.

۱- مقدمه

محبوبیت زیادی برخوردار هستند [1]. در گذشته از طریق معادل‌سازی قوانین طبیعت روی یک سازه کوچک سعی داشتند تغییرات فرمی تحت اثر نیروها را شناسایی نموده و فرمی معادل فرم واقعی را شبیه‌سازی نمایند اما نتایج به دست

خرپاها دسته‌ای از سازه‌های رایج فضاکار هستند که بیشتر برای پوشاندن دهانه‌های بزرگ مناسب بوده و به دلیل امکان ساخت آن‌ها از مصالح متنوع و همچنین ساخت آسان اتصالات، از

برآیند، چند ضلعی بسته‌ای را تشکیل دهد، تعادل در مجموعه بردارها برقرار بوده و بر این اساس نظریه تعادل در چندضلعی‌های بسته را مطرح نمود [4]. در شکل (۲) چند نمونه از تجزیه و تحلیل بارگذاری‌ها توسط منحنی طنابی نشان داده شده است.

شکل ۲. تحلیل بارگذاری با استفاده از منحنی طنابی آن‌ها [5]

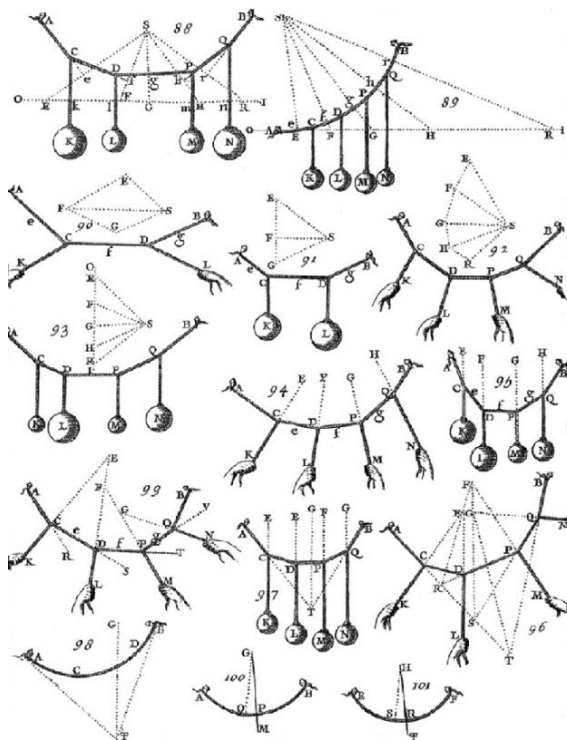


Fig. 2. Load analysis using funicular diagrams and closed polygons [5]

با بیان روش‌های مختلفی در ترسیم نمودارهای گرافیک استاتیک، ویلیام ولف دو روش اصلی ترسیم به نام روش نقطه قطب و روش نشانه‌گذاری باو را مورد مطالعه قرار داد [6]. به‌طور کلی روش نقطه قطب برای سازه‌های یکپارچه و پیوسته و روش نشانه‌گذاری باو برای سازه‌های گسسته و المانی همچون خرپاها استفاده شده‌اند. شکل (۳) نشانگر خلاصه‌ای از روند پژوهش‌های انجام شده توسط نظریه پردازان اصلی در حوزه گرافیک استاتیک است.

آمده دقیق نبودند. با پیشرفت علوم و ایجاد روش‌های جایگزین محاسباتی، دقت کار بالا رفت اما به دلیل پیچیدگی‌های فراوان و عدم آشنایی دقیق معماران با چگونگی محاسبات، این روش دشوار بود. روش‌های گرافیکی حلقه‌های گمشده ما بین هندسه و محاسبات بودند که می‌توانست گزینه مناسبی برای طراحان باشد. روش گرافیکی با ایجاد ارتباطی قابل مشاهده بین هندسه و چگونگی انتقال نیرو در اجزا موجب درک بهتر شرایط سازه در هنگام اعمال بار بوده و سبب آسان شدن شناسایی نقاط ضعف و قوت سازه می‌گردد. امروزه ترکیبی از این روش‌ها برای ایجاد طیف وسیعی از تغییرات هندسی و ویژگی‌های ساختاری قابل توصیف برای سازه، مواد و مصالح در نرم‌افزارهای قدرتمند شبیه‌سازی امکان فرمیابی را فراهم می‌نماید. ابزارهای جدید امکان مدل‌سازی سریع را ایجاد کرده و نتایج دقیقی در اختیار طراح قرار می‌دهد. پرسش اصلی در پژوهش حاضر، چگونگی ایجاد یک منطق الگوریتمیک برای روشی ترسیمی که در گذشته توسط طراحان برای تحلیل و آنالیز سازه‌ها استفاده شد، است. اصول روش‌های محاسباتی گرافیکی با نظریه استوین پیرامون تعادل نیروها ایجاد شد. وی با استفاده از رشته طنابی که تعدادی وزنه به آن آویزان شد روشی از تعادل را تعریف نمود که در آن سنگینی وزنه‌ها با توجه به طول بازویی که در آن قرار داشت محاسبه شد [2]. شکل (۱) تصاویر استوین را برای بررسی تعادل نیروهای نمایش می‌دهد.

شکل ۱. ترسیمات استوین پیرامون تعادلات نیروها [3]

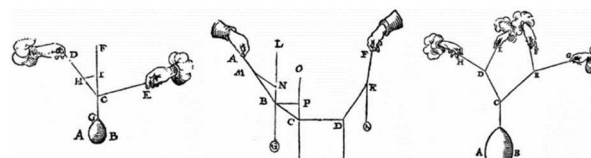


Fig. 1. Stevin's drawings on force equilibria [3]

در سال ۱۷۲۵ ریگنون نظریه استوین را تکمیل نمود. او روش متوازی الاضلاع در برآیند نیروها را معرفی کرد. برپایه این روش، بردار برآیند را این‌گونه تفسیر نمود که تا زمانی که بردار

پارامتریک گرس‌هاپر برنامه‌نویسی شد تا امکان فرمیابی و تحلیل هر نوع خریای قوسی مبتنی بر فرم وارن فراهم شود. در نهایت، شبیه‌سازی‌های مختلفی برای درستی‌آزمایی و بررسی قدرت و دقت الگوریتم برنامه نویسی شده نیز ارائه شد.

۲- پیشینه پژوهش

گرافیک استاتیک روشی ترسیمی با استفاده از فرم و هندسه سازه بوده که برای محاسبات تعادل و تعیین نوع و مقدار نیروهای داخلی سازه با مصالح سستی و مدرن توسط نمودارهای متقابلی به کار می‌رود [9]. گرافیک استاتیک جبری دارای دو جهت در سال ۲۰۱۷ مورد تحقیق قرار گرفت. گرافیک استاتیک جبری روشی از پیش توسعه یافته است، که امکان دستکاری تعاملی نمودار نیرو را فراهم می‌کند [10]. گرافیک استاتیک متشکل از دو نمودار متقابل فرم و نیرو است که در شکل (۴) برای سه مدل متفاوت از خرپاها با بارگذاری‌های متفاوت نشان داده شده‌اند و تغییر در یکی موجب تغییر دیگری می‌شود. به موجب ترسیم نظیر به نظیر اعضا و نیروها، هر دو نمودار تعداد لبه‌های یکسانی دارند. هر گره با بیشتر از یک عضو در یک نمودار، مربوط به فضایی است که توسط یک چند ضلعی در دیگری تشکیل شده است و بالعکس. چندضلعی‌های بسته در رابطه متقابل بین هر دو نمودار، تعادل ایستا در داخل همه گره‌های داخلی را تضمین می‌کند. با این حال، اگر سازه از نظر استاتیکی نامعین باشد، بیش از یک نمودار متقابل برای نمودار فرم داده شده وجود دارد. علاوه بر این، گرافیک استاتیک به طور ذاتی عملکردی دو طرفه است. یعنی می‌توان نمودار نیرو را از نمودار فرم ساخت یا فرآیند معکوس را اعمال کرد و قسمت‌هایی از نمودار فرم را از نمودار نیروی مورد نظر به وجود آورد. به عنوان یک ابزار طراحی، این ویژگی یک چارچوب انعطاف پذیر را فراهم می‌کند که در آن محدودیت‌های شکل یا نیرو می‌تواند اکتشاف طرح و فرم مربوطه را هدایت کند [5].

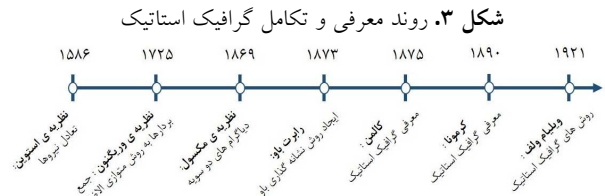


Fig. 3. The process of introduction and evolution of Graphic statics

قابلیت بصری بودن این روش امکان مشاهده شرایط سازه در هنگام بارگذاری را در اختیار طراح قرار داده و سبب درک بهتر نسبت به سازه و چگونگی توزیع بار شده و همچنین موجب سهولت اصلاح و بهبود فرم توسط طراحان می‌شود. از سویی دیگر در این روش استفاده از بردارهای ساده فهم قضیه را نسبت به حالت‌های محاسباتی آسان‌تر می‌نماید.

یکی از مشکلات موجود در طراحی، کنترل تمامی پارامترهای مؤثر بر طرح مورد نظر است. با استفاده از طراحی پارامتریک که یکی از روش‌های نوین طراحی در عصر حاضر است، می‌توان بخش عمده‌ای از این مشکلات را مرتفع کرد. طراحی با استفاده از این روش علاوه بر پیاده‌سازی نتایج تمامی تغییرات مورد نظر در پارامترها بر روی طرح اصلی، باعث ایجاد تسلط کامل بر روند طراحی شده و همچنین می‌تواند مرزهای خلاقیت و ابتکارات را در حوزه‌ی روش شناسی و فرم شناسی، دستخوش تغییر کند [7, 8]. در گذشته تمام فرآیند ترسیم به صورت دستی انجام می‌گرفت و هر نوع به روز رسانی در بارگذاری یا تغییر فرم نیازمند ترسیم مجدد فرم و نیرو از ابتدا بوده که کاری بسیار زمان‌بر و خسته‌کننده است. اما، امروزه استفاده از نرم‌افزارهای ترسیم در ترکیب با روش‌های پارامتریک، حالت ترسیم و به روز رسانی را بسیار ساده‌تر و سریع‌تر نموده و کنترل شرایط را مطلوب طراحان قرار داده است. به این ترتیب می‌توان به بررسی انواع مختلفی از حالات بارگذاری، شبیه‌سازی شرایط گوناگون و حالت‌های مختلف ایجاد تعادل به شیوه‌های متنوع در کم‌ترین زمان پرداخت. از این رو در مقاله حاضر مدل‌سازی پارامتریک و تحلیل گرافیک استاتیک خریای وارن قوسی مورد بررسی قرار گرفت. هر دو نمودار متقابل فرم و نیرو در بستر نرم‌افزار

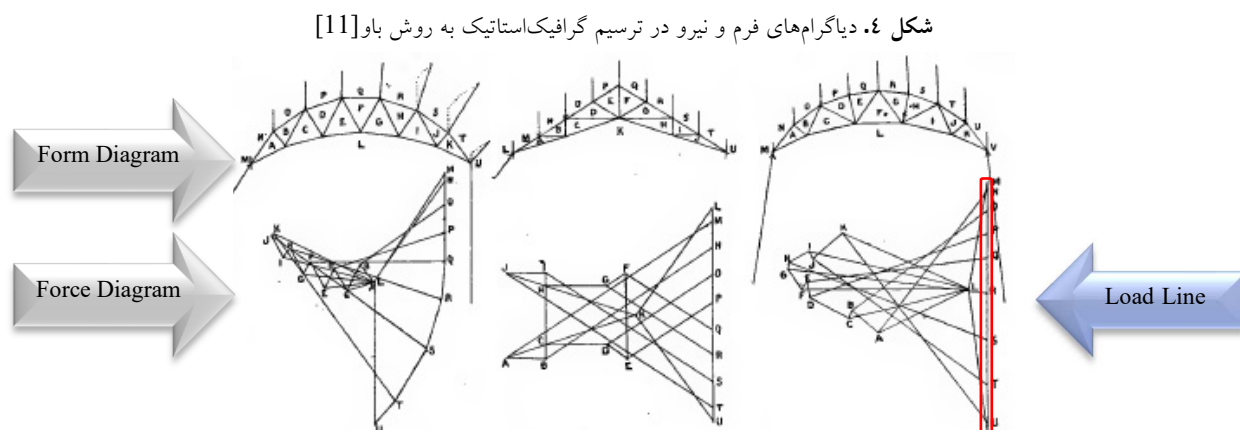


Fig. 4. Form and force diagrams in Graphic statics drawing by Bow's method [11]

[15]. همچنین جابه‌جایی‌های بسیار بزرگ در سازوکارهای بسیار کوچک نیز قابلیت تحلیل توسط روش گرافیک استاتیک را دارند که میلار و همکاران در پژوهش خود این مسئله را مورد بررسی قرار دادند. از آنجایی که خرپاهای دارای سازوکارهای کوچک پایدار در حالت پیش‌تنیده با استفاده از رویکردهای خطی هنگامی که تحت بارهای خارجی و یا جابه‌جایی‌های بزرگ قرار می‌گیرند، امکان خطا وجود داشته و دقت لازم را ندارند، بنابراین می‌توان از گرافیک استاتیک برای تحلیل در این شرایط به جای روش‌های خطی استفاده نمود [16]. یکی دیگر از مواردی که می‌توان توسط این روش تحلیل نمود، پایداری خرپاها بوده که توسط مکرابی و همکاران در سال ۲۰۲۱ بررسی شد. در این پژوهش روشی گرافیکی برای تعیین سختی خطی و پایداری خرپاهای پیش‌تنیده که از میله‌های صلب متصل شده با اتصالات پین شده و آزادی‌های حرکتی تشکیل شده بودند، ایجاد شد [17]. از نمودارهای متقابل فرم و نیرویی گرافیک استاتیک در مسائل بهینه‌سازی نیز استفاده می‌شود. در سال ۲۰۲۱ دستکاری ساختارهای بهینه شده از نظر توپولوژیکی با استفاده از گرافیک استاتیک مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس ساختارها و طرح خرپاهای حاصل این نتیجه حاصل شد که گرافیک استاتیک یک بستر موثر برای طراحی و آنالیزهای سازه‌ای است. در این تحقیق با ایجاد تغییرات در طرح‌ها، گزینه‌های مناسبی برای

در سال ۲۰۱۸ گرافیک استاتیک n بعدی و تبدیلات سازه‌ای مورد تحقیق قرار گرفت و نشان داد که چگونه می‌توان از دوگانگی و به ویژه قطبیت برای طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی در تحلیل و طراحی سازه استفاده کرد. در این تحقیق یک روش یکپارچه و کاملاً هندسی برای ایجاد نمودارهای نیروی دو بعدی و سه بعدی برای خرپاهای مسطح و فضایی در تعادل ایستا در زمینه گرافیک استاتیک پیشنهاد شد [12]. در سال ۲۰۲۱ بارانیای به بررسی و تحلیل سازه‌های فضایی توسط گرافیک استاتیک پرداخت. وی به یک توصیف جبری مستقل از ابعاد توابع تنش در گرافیک استاتیک پرداخت و از رابطه دو طرفه دیاگرام‌های فرمی و نیرویی برای انتخاب طرحی خاص از نقطه‌ی همگن مطابق با توصیف جبری در ابعاد گوناگون بهره برد [13]. در همان سال اکبرزاده و هابلیچک گرافیک استاتیک سه بعدی مناطق محدود را بیان کردند که در آن فرمیابی ساختاری ارائه شده توسط مکسول و رنکین را توسعه دادند [14].

مظفری و همکاران یک فرمول گرافیک استاتیکی را با استفاده از چهاروجهی برای تحلیل خرپاهای سه بعدی توسعه دادند. همچنین روش‌هایی برای تولید توپولوژی خرپاهای فضایی و تعریف مناسب فضاهای خارجی بین بارهای اعمال شده و واکنش‌های تکیه‌گاهی ارائه شد تا با تقسیم چهاروجهی‌های بیان شده، دیاگرام نیرویی متناظر ایجاد شود

در این روش از اصول و قاعده خاصی پیروی می‌کند که در ادامه به تحلیل و توصیف آن با یک نمونه پرداخته می‌شود. در روش باو، فضای بین هر دو نیرو با حروف و فضای بسته داخل فرم با اعداد و به ترتیب از چپ به راست نام‌گذاری می‌شوند. فراخوانی هر کدام از بردارها و اجزا نیز به وسیله نام‌های مجاور خود صورت می‌گیرد. برای شروع ترسیم ابتدا تعداد تکیه‌گاه‌ها و نوع آن‌ها تعیین شده و مقدار نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی در آن‌ها مشخص می‌شود. با دانستن مقدار نیروی وارد شده بر خرپا و فواصل نیرو از تکیه‌گاه‌ها، مقدار نیروی واکنش تکیه‌گاه‌ها محاسبه می‌شود. بدست آوردن این مقدار در ترسیم محور بارگذاری از اهمیت زیادی برخوردار است. برای ترسیم محور بارگذاری نیز نیروهای وارد شده بر سازه به ترتیب و به صورت ساعتگرد و پشت سرهم با مقیاس و اندازه مشخص خود، ترسیم می‌شوند. با رسیدن به نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی باید توجه داشت هنگام ترسیم در محور بارگذاری، برآیند نیروها به نقطه اول ترسیم بازگردد. چرا که در این صورت چندضلعی نیرویی بسته شده و مشخص خواهد شد که سازه در تعادل قرار دارد.

پس از تکمیل محور بارگذاری، اجزای فرمی تک به تک روی نمودار نیرویی پیاده‌سازی می‌شوند. برای این منظور به موازات هر یک از اعضای خرپا به ترتیب و از چپ به راست و با توجه به نام‌گذاری اجزا خطوطی ترسیم می‌شود. خطوط همان‌گونه که در دیاگرام فرم در یک نقطه مشترک و متقاطع‌اند، در دیاگرام نیرویی نیز دو به دو متقاطع خواهند بود. محل برخورد خطوط، همان فضای مثلثی بسته‌ای است که خطوط در مجاورت آن‌ها قرار دارند و آن نقطه تقاطع به نام همان فضای نام‌گذاری می‌شود.

پس از به دست آوردن نقطه تقاطع اضلاع، خطی از آن به دو سر ابتدایی خطوط متقاطع وصل شده و اندازه‌گیری می‌شود. مقدار طول به دست آمده خطوط برابر مقدار نیرویی است که در عضوهای متناظر وجود دارد. این روش ترسیم خطوط موازی از دیاگرام فرم به نیرو برای تمامی اضلاع سازه تکرار می‌شود و مقدار عددی نیروی داخلی تمام اعضا تنها با

رفع محدودیت‌های از پیش تعیین شده ساختاری در اثر نیروهای اعمال شده، پیشنهاد شد [18]. فرمیابی و بهینه‌سازی شکل ساختارهای شاخه‌ای با الهام از محیط زیست بر اساس گرافیک استاتیک در سال ۲۰۲۱ مورد بررسی قرار گرفت. کارآیی انتقال نیروی داخلی ساختار، اساس پیگیری فرم ساختاری خلاق است. این تحقیق سازوکارهای مکانیکی ساختارهای شاخه‌ای با الهام از زیست‌شناسی را آشکار کرده و در ادامه بهینه‌سازی شکل برای ساختارهای شاخه‌ای با الهام از زیست‌شناسی بر اساس گرافیک استاتیک با محدودیت‌های استحکام و سختی شرایط مرزی در نظر گرفته شد [19]. لازم به ذکر است که می‌توان با استفاده از روش‌های برنامه‌نویسی متنی، خرپاهای فرم آزادی که بر اساس هر یک از انواع مشهور خرپا یعنی پرات، فینک، وارن و هاو تولید شده‌اند را نیز مورد آنالیز سازه‌ای و بهینه‌یابی فرمی قرار داد [20].

۳- ابزار و روش‌ها

در تحقیق حاضر از روش کمی و راهبرد مدل‌سازی پارامتریک در محیط‌های برنامه‌نویسی بصری، محاسبات نرم‌افزاری و ارزیابی نرم‌افزاری نتایج استفاده شده است. در مبحث مدل‌سازی پارامتریک، از محیط برنامه‌نویسی بصری افزونه گرس‌هاپر از نرم‌افزار راینو [21] و برای تحلیل المان محدود جهت صحت‌سنجی نتایج از افزونه‌ی Karamba 3D نرم‌افزار راینو استفاده شده است [22].

روش نشانه‌گذاری باو با ترسیم نظیر به نظیر اعضا از دیاگرام فرم به نیرو، روش مناسبی برای محاسبات گرافیکی فرم‌های با اجزای منقطع همچون خرپا هست که به واسطه آن می‌توان نیروی داخلی تک تک اجزا را جداگانه و از طریق ترسیم به دست آورد. اساس ترسیم آن بر پایه حروف و نام اجزا است. این کار روند ترسیم را با قاعده و اصول، منظم نموده و ادامه‌ی کار برای تحلیل اجزا بر اساس فراخوانی با نامشان را آسان‌تر می‌نماید. این روش به سبب این نام‌گذاری‌ها به روش نشانه‌گذاری باو مشهور است. نام‌گذاری و فراخوانی

مقاله به دلیل وجود محدودیت‌های محیط زبان برنامه نویسی بصری گرس‌هاپر صرف‌نظر شده و فقط به مقایسه مقدار قدر مطلق مقادیر عددی نیروهای داخلی المان‌های خرپا با استفاده از روش‌های گرافیک استاتیک و المان محدود پرداخته شده است. در شکل (۵) نمونه کامل ترسیم شده از نمودار نیرویی خرپای مورد نظر با مقیاس دقیق نشان داده شده است.

اندازه‌گیری طول‌های متناظر در دیاگرام نیرو محاسبه می‌شود. باید توجه داشت تمامی فرآیند باید براساس اندازه واقعی یا با مقیاسی مشخص و ثابت برای تمام اعضا پیاده‌سازی شود تا در تعیین و محاسبات نیروی داخلی اعضا خطایی رخ ندهد. علاوه بر امکان محاسبه نیروهای داخلی اجزا با استفاده از ترسیم، کاربرد دیگری که روش باو دارد در تعیین کششی و فشاری بودن اضلاع تنها با دنبال کردن جهت ترسیم است که در این

شکل ۵. دیاگرام نیرویی تکمیل شده و به دست آوردن نیروی داخلی تمام اضلاع خرپا از روی آن [23]

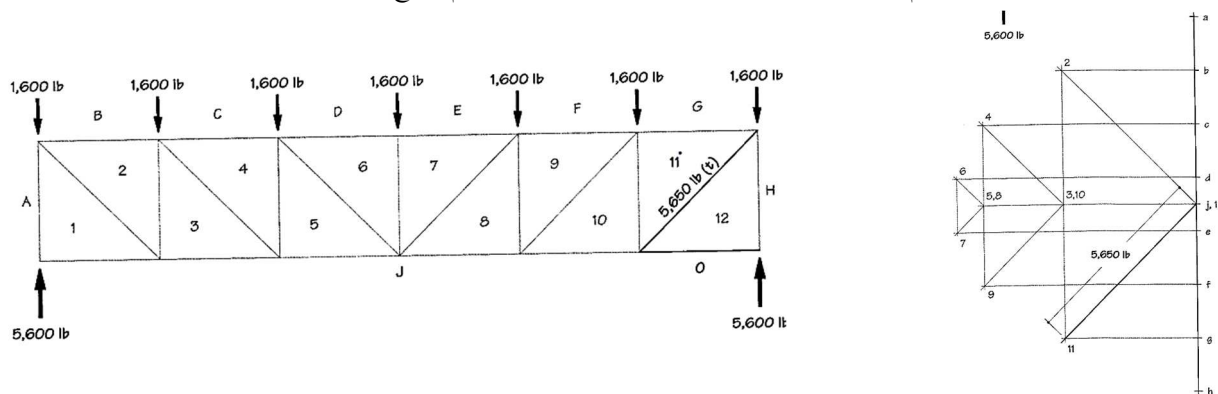


Fig. 5. Complete force diagram and calculating the internal force of all elements of the truss [23]

است. سپس نقاط بدست آمده با الگویی مشخص به یکدیگر متصل و نام‌گذاری شدند. در این میان شرط‌هایی نیز اضافه شدند تا با یافتن شیب خطوط، توانایی ترسیم خرپا و دیاگرام نیرویی کنترل شود؛ زیرا در صورت وجود زاویه ۹۰ و یا ۲۷۰ درجه و تانژانت بینهایت این زوایا، دیاگرام نیرو قابلیت ترسیم ندارد. پس از بارگذاری مورد نظر، الگوریتمی برای نام‌گذاری خرپا بر اساس الگوی نشانه گذاری باو ایجاد شد تا فضاهای میان نیروها با حروف انگلیسی و فضاهای میان المان‌ها با شماره گذاری مشخص شوند. برای این کار نقطه میانه خط متصل کننده میان نیروها محاسبه شده و به عنوان نقطه مختصات حروف نشانه گذاری در نظر گرفته می‌شود. در این بین به طور همزمان خط نیرو در دیاگرام نیرویی نیز ترسیم و نام‌گذاری شده است. نشانه‌گذاری‌ها با استفاده از شرطی که در هنگام وجود نیروی جانبی نقطه مختصات آن را همان‌گونه

۴- پیاده‌سازی پارامتریک، نتایج و بحث

در پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی روش گرافیک استاتیک، ابتدا الگوریتمی برای تولید خرپای قوسی وارن با استفاده از افزونه گرس‌هاپر که یک زبان برنامه نویسی بصری قابل فهم متشکل از مجموعه‌ای از توابع ریاضیاتی و هندسی است، نوشته شد. ورودی‌های ابتدایی در این الگوریتم شامل مختصات نقاط ابتدا و انتهای قوس‌ها و دو نقطه به عنوان کلید این دو کمان هستند که ارتفاع خرپا و همچنین خیز آن توسط این دو نقطه کنترل می‌شود. با تغییر در مختصات نقاط کلید کمان‌ها می‌توان فرم خرپا را به صورت پارامتریک کنترل نمود. پس از آن کمان پایین با یک پارامتر دلخواه از اعداد طبیعی به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود. این عدد برای کمان بالا یکی کمتر یعنی به مقدار $n-1$ می‌باشد تا خرپای وارن قوسی بتواند به درستی تشکیل شود. مقدار n در نمونه‌های بررسی شده در این مقاله عدد ۵ در نظر گرفته شده

و دیاگرام فرمی می‌شود؛ به این صورت که می‌توان با ایجاد تغییر در دیاگرام نیرویی در نمودار فرم و به طور معکوس تغییرات را به طور لحظه‌ای مشاهده نمود. پس از انجام این فرآیند دوباره با استفاده از محاسبه شیب خطوط دیاگرام نیرویی جدید و استفاده از شرطهایی برای یافتن رابطه‌ی مولفه افقی و عمودی نقاط منصف، فرم خرپا باز ترسیم می‌شود. برای بررسی درستی عملیات انجام شده دیاگرام فرم ابتدایی با دیاگرام فرم نهایی مقایسه می‌شود که در صورت عدم ایجاد تغییرات در دیاگرام نیرویی، هر دو بر هم منطبق می‌شود. این مسئله بیانگر درستی الگوریتم ایجاد شده و برقرار بودن رابطه دو طرفه‌ی دیاگرام فرم و نیرو می‌باشد. در شکل (۶) نمای کلی الگوریتم نوشته شده به ترتیب با تفکیک رنگ مشخص شده است. هر رنگ بیانگر مجموعه‌ی مولفه‌های استفاده شده در مراحل توضیح داده شده است.

که توضیح داده شد پیدا کرده تا به صورت تعاملی به روز شود.

در ادامه پس از اعمال نیروهای پارامتریک روی هر مفصل از خرپا، تمامی محاسبات عددی لازم با استفاده از ضرب داخلی و خارجی بردارهای نیرو و گشتاورگیری برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی، انجام می‌شود. برای ترسیم قسمت نیروهای خارجی بعد از دریافت نقطه شروع که در خط نیرو قرار گرفته است و راستای خط که از شیب اعضای خرپا حاصل می‌شود؛ تداخل خطوط محاسبه شده و نقاط مرتبط با زون‌های خرپا بدست آمده و این دیاگرام ترسیم می‌شود. پس از آن با دریافت نقاط دیاگرام نیرویی همه آنها بازتولید شده و خطوط اتصالی دوباره ترسیم می‌شوند تا دیاگرام نیرویی قابل تغییر ایجاد شود. این بخش از برنامه نوشته شده باعث ایجاد ارتباط دو طرفه میان دیاگرام نیرویی

شکل ۶. نمای کلی از الگوریتم نوشته شده در افزونه‌ی گرس‌هاپر برای تولید رابطه‌ی پارامتریک و دو طرفه‌ی دیاگرام فرم و نیرو در خرپای وارن قوسی

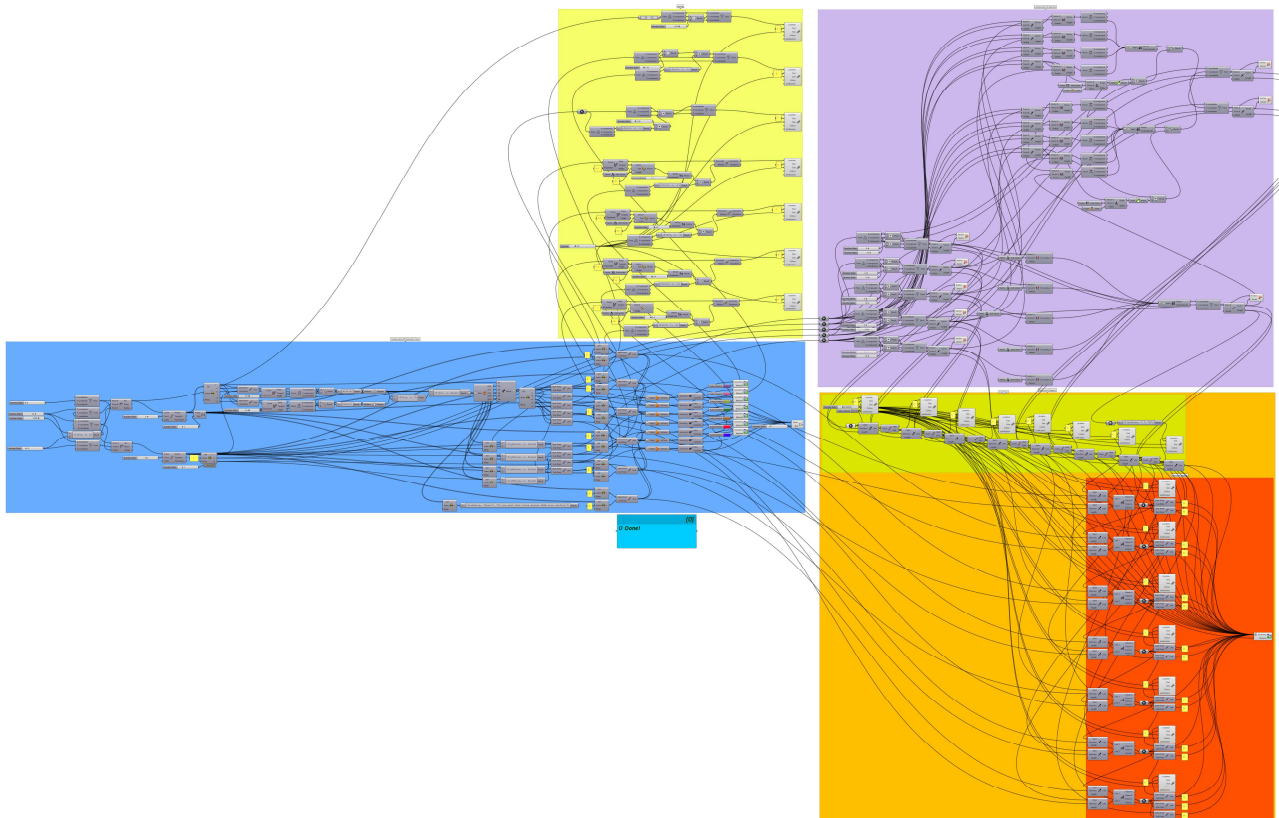


Fig. 6. Overview of the algorithm coded in the grasshopper 3d plugin to generate a parametric two-way relational form and force diagram for the Warren arched truss

هماهنگی حاصل از خرپای تولید شده از دیاگرام نیرویی جدید با خرپای قبلی قابل مشاهده است که هماهنگی این اشکال روی یک دیگر درستی عملکرد دو طرفه بودن برنامه را نشان می دهد. در شکل (۸) نیز دیاگرام روند کلی الگوریتم به صورت گرافیکی نشان داده شده است.

شکل (۷) نمایانگر خروجی حاصل از برنامه نوشته شده است که در سمت چپ آن خرپای وارن قوسی پارامتریک به همراه بارگذاری قابل تغییر و نام گذاری آن دیده می شود. در وسط دیاگرام نیرویی حاصل از روند ترسیمی گرافیک استاتیک به رنگ طوسی در زیر و دیاگرام نیرویی پارامتریک به رنگ قرمز روی آن نمایش داده شده است. در سمت راست نیز

شکل ۷. هماهنگی دیاگرام فرمی جدید تولید شده از دیاگرام نیرویی جدید با نمونه قبلی

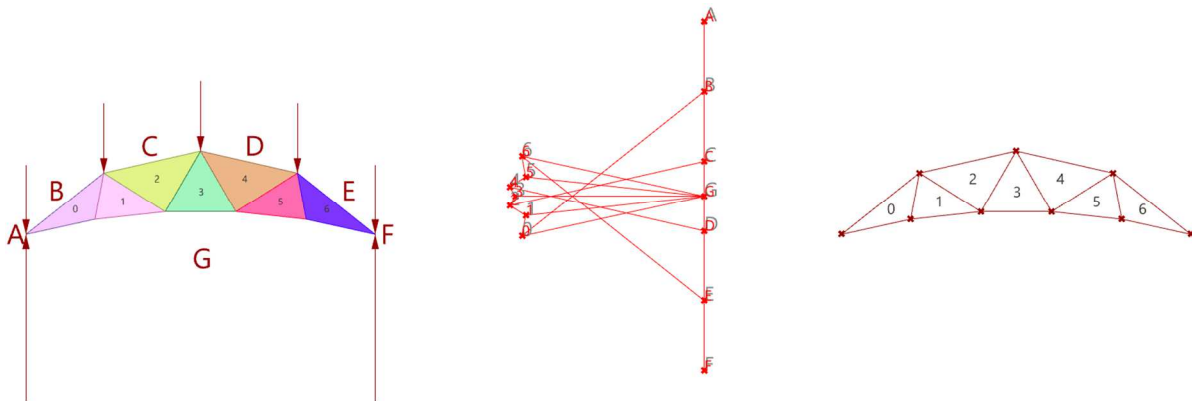


Fig. 7. Matching the new form diagram related the new force diagram with previous version

شکل ۸. دیاگرام گرافیکی روند کلی الگوریتم ترسیم دیاگرام های فرمی و نیرویی گرافیک استاتیک خرپای وارن قوسی

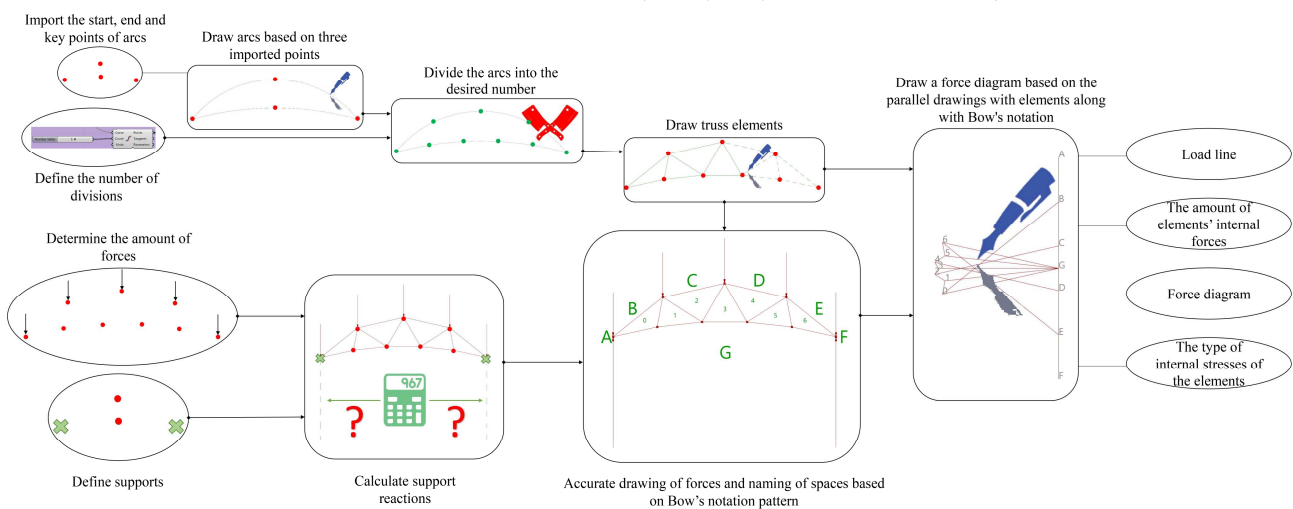


Fig. 8. Graphical process of form and force diagram drawing algorithm of Warren arched truss for Graphic statics method

تغییرات فرم جدید نسبت به فرم اولیه دیده می شود. مشاهده می شود نمودارها رفتار دوطرفه داشته و با تغییر یکی، دیگری نیز به طور خودکار اصلاح می شود. با استفاده از این الگوریتم می توان تغییرات مناسب را هم از طرف دیاگرام نیرو و هم از

در سمت چپ شکل (۹)، تغییرات به وجود آمده بر دیاگرام نیرویی در اثر تغییر اعداد اسلایدرها با رنگ قرمز قابل مشاهده است. خطوط و نام گذاری های خاکستری رنگ با دیاگرام نیرویی فرم اولیه مرتبط است. در سمت راست آن

طریق دیاگرام فرم کنترل نمود تا به حالتی ایده‌آل از نظر طراحی معماری و سازه‌ای رسید.

شکل ۹. تغییرات به وجود آمده در دیاگرام نیرو و باز ترسیم دیاگرام فرم منطبق بر تغییرات

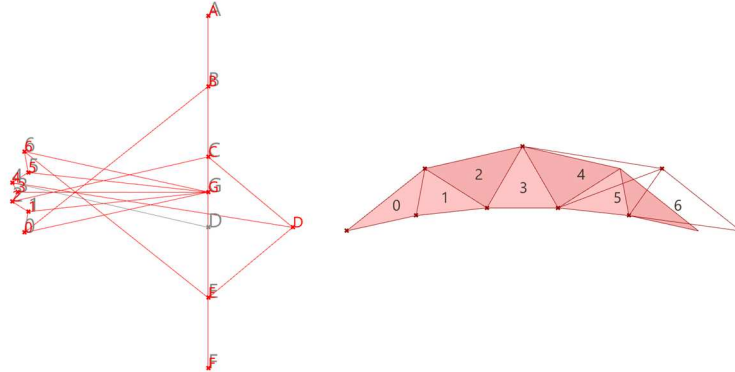


Fig. 9. Changes made in the force diagram and redraw the form diagram corresponding to the changes

با نیروهای خارجی نابرابر و غیر منظم و ج) خریای وارن قوسی محدب با نیروهای خارجی نابرابر غیر منظم می‌باشند. در نمونه‌های انتخابی سعی بر آن شده است که حالات متقارن و غیر متقارن هندسی و بارگذاری گنجانده شوند. در جدول (۱) نتایج مقایسه نیروهای داخلی اعضا حاصل از روش گرافیک استاتیک و المان محدود و در جدول (۲)، دیاگرام‌های فرم و نیرویی حاصل از روش گرافیک استاتیک سه نمونه خریای قوسی ارائه شده‌اند.

در این قسمت، برای بررسی درستی محاسبات انجام شده الگوریتم گرافیک استاتیک نوشته شده در افزونه گرس‌هاپر، تحلیل المان محدود توسط افزونه کارامبا استفاده شده است. افزونه کارامبا قابلیت تحلیل المان محدود غیرخطی‌های هندسی را نیز دارد. برای درستی‌آزمایی سه مدل از خریای قوسی مبتنی بر خریای وارن در نظر گرفته شده است. سه مدل خریای شبیه‌سازی شامل الف) خریای وارن قوسی مقعر با نیروهای خارجی برابر و منظم؛ ب) خریای وارن قوسی مقعر

جدول ۱. نیروهای داخلی بر حسب نیوتن در اعضای سه مدل خریای نمونه با استفاده از روش گرافیک استاتیک و المان محدود

Element Identifier	Model (1)		Model (2)		Model (3)	
	Graphic Statics	Finite Element	Graphic Statics	Finite Element	Graphic Statics	Finite Element
B0	33.368	33.74322	32.843	33.74322	5.732	5.799374
C2	28.563	28.8496	27.189	28.8496	2.3178	2.345461
D4	28.563	28.82715	21.084	28.82715	7.105	7.169194
E6	33.368	33.76678	24.094	33.76678	3.874	3.9082
G6	26.754	26.99639	19.318	26.99639	7.998	8.07658
G5	25.72	25.96979	18.572	25.96979	6.909	6.988481
G3	27.076	27.38323	13.328	27.38323	2.976	3.008638
G1	25.72	25.98157	5.628	25.98157	6.285	6.355109
G0	26.754	27.00661	5.854	27.00661	7.275	7.354756
01	3.024	3.050421	0.662	3.050421	2.604	2.627454
12	2.7	2.73031	7.002	2.73031	5.762	5.812902
23	1.547	1.560606	3.624	1.560606	3.237	3.268062
34	1.547	1.560498	4.447	1.560498	4.031	4.069573
45	2.7	2.728034	3.437	2.728034	6.829	6.899673
56	3.024	3.054122	2.184	3.054122	2.862	2.895981

Table 1. Comparison of internal forces of sample truss elements based on graphic statics and finite element methods

جدول ۲. دیاگرام‌های فرمی و نیرویی حاصل از روش گرافیک استاتیک برای سه مدل خرابای نمونه

Type of Truss	Form Diagram	Force Diagram
Model (1)		
Model (2)		
Model (3)		

Table 2. Form and force diagrams related to Graphic statics method for sample truss

به ذکر است که برنامه نوشته شده در افزونه گرس‌هاپر مبتنی بر رویکرد پارامتریک با قابلیت تولید هر دو نمودار فرم و نیرو بوده و به راحتی می‌توان هر هندسه دلخواهی از خراباهای قوسی ساده یا فرم‌آزاد مبتنی بر خرابای مثلثی وارن و با هر نوع بارگذاری را شبیه‌سازی و تحلیل نمود که در متن مقاله حاضر

از مقایسه اعداد حاصل در جدول (۱) می‌توان بیان نمود که قدر مطلق اختلاف میان نتایج تحلیل روش گرافیک استاتیک و برنامه‌نویسی پارامتریک مربوطه با روش المان محدود بسیار ناچیز است. این امر نشان دهنده دقت بالای الگوریتم نوشته شده برای روش گرافیک استاتیک در این پژوهش است. لازم

روشی برای مهندسی و بهینه‌یابی هستند که در آن پاسخ‌ها به جای اینکه از پایه‌های ابتدایی ساخته شوند، در هنگام فرآیندی که در ادامه نظریه تکامل داروینی مطرح شده، رشد می‌یابند. الگوریتم تکاملی یکی از متدهای اصلی در محاسبات الهام گرفته از طبیعت هستند [26, 27].

یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌های تکاملی در زمینه بهینه‌یابی، الگوریتم ژنتیک است که در آن متغیرهای طراحی به وسیله رشته‌هایی با طول‌های ثابت یا متغیر به نام کروموزوم (فرد) هر رشته رمزگذاری می‌شوند. هر رشته یک نقطه پاسخ است که شامل متغیرهای طراحی در فضای مورد نظر برای جستجو را نشان می‌دهد [28]. در ادامه مقاله حاضر، مسئله بهینه‌یابی سازه‌ای با هدف تعیین مقدار کمینه وزن خرپاهای مورد نظر مورد بررسی قرار گرفته است. وزن هر خرپا از مجموع وزن تک تک المان‌های آن حاصل می‌شود. با فرض چگالی ثابت برای تک تک المان‌ها، وزن خرپا از رابطه‌ی (۱) بدست می‌آید.

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i = \rho \sum_{i=1}^n A_i \times L_i \quad (1)$$

از طرفی مقدار تنش در هر المان سازه‌ای با استفاده از رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \leftrightarrow \quad A = \frac{P}{\sigma} \quad (2)$$

با جای‌گذاری روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$W = \rho \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\sigma_i} \times L_i \quad (3)$$

در این رابطه P_i مقدار نیروی داخلی هر عضو خرپا در دیاگرام نیرویی و L_i طول هر عضو از دیاگرام فرمی خرپا است. با فرض مقادیر ثابت برای چگالی و تنش مجاز برای المان‌ها، رابطه (۳) به صورت زیر خواهد شد که از این عبارت به حجم سازه‌ای کلی، Total Structural Volume، تعبیر می‌شود [29]:

$$\sum_{i=1}^n P_i \times L_i \quad (4)$$

برای بهینه‌یابی این تابع هدف، متغیر مستقل ارتفاع خیز قوس‌های اصلی تشکیل دهنده خرپای وارن قوسی خواهد بود.

تنها به ارائه سه نمونه برای درستی آزمایشی بسنده شده است. در مقاله حاضر مدل‌سازی پارامتریک و تحلیل گرافیک استاتیک خرپاهای وارن قوسی صورت گرفته است. به این ترتیب که امکان فرم‌یابی پارامتریک انواع خرپاهای مورد نظر را از یک سو و تحلیل استاتیکی آن‌ها به روش گرافیک استاتیک با قابلیت نمایش تصویری همزمان نمودارهای فرم و نیروی آن‌ها را از سوی دیگر انجام شده است.

۵- بهینه‌یابی

بهینه‌سازی در قله اهمیت فرآیندهای تکراری طراحی، تحلیل و تولید قرار گرفته است. با پیشرفت چشم‌گیر این دانش، بهینه‌یابی در حوزه طراحی سازه‌ای و معماری نیز وارد شده است. در فرآیند بهینه‌سازی سازه‌ای، ملاک‌هایی همچون مقاوت حداکثری و وزن حداقلی همواره مورد توجه قرار گرفته است [24]. برای بهینه‌سازی توابع ریاضیاتی، از روش‌های تحلیلی و جبری استفاده می‌شود. این روش‌ها با وجود درستی و دقت بالا، در مواجهه با توابع پیچیده و ضمنی به درستی عمل نمی‌کنند. بنابراین به عنوان روشی جایگزین می‌توان از الگوریتم‌های تکاملی استفاده نمود [25]. در هنگام بهینه‌یابی، معمولاً اهداف دارای سه حالت کلی بیشینه، کمینه و یا نزدیک شدن به عددی خاص را دارا هستند. در صورتی که توابع مورد نظر از دسته توابع مشخص ریاضیاتی یا توابع صریح باشند، می‌توان با استفاده از روش مشتق‌گیری، نقاط اکسترمم نسبی آن‌ها را یافت. اما معمولاً یافتن توابع چند جمله‌ای مورد نظر در مباحث مرتبط با طراحی، کاری غیر ممکن است. به اینگونه توابع، ضمنی می‌گویند و بیشتر از طریق یک فرآیند الگوریتمیک بدست می‌آیند. در مواقعی که الگوریتم و متغیرهای مستقل موجود باشند و نقطه مبهم متغیرهای مستقل متناظر آن‌ها باشد، از الگوریتم‌های تکاملی استفاده می‌شود.

الگوریتم‌های تکاملی در سال ۱۹۶۰ نتیجه تحقیقات ریچنبرگ در مورد استراتژی‌های تکاملی بود. این الگوریتم‌ها

است. خرپای وارن قوسی بهینه با رنگ مشکی روی خرپای غیر بهینه با رنگ آبی کم رنگ مشخص شده است. با فرض مصالح فولاد نرمه برای اعضاء خرپایی با چگالی $7850 \frac{Kg}{m^3}$ ، تنش مجاز $1440 \frac{Kg}{cm^2}$ به ازاء $0.6\sigma_y$ ، تابع هدف حجم سازه‌ای کلی خرپا در حالت بهینه $251/999$ و در حالت غیر بهینه $350/464$ نیوتن متر بدست آمد. این امر بیانگر کاهش $28/09$ درصدی تابع هدف و در نتیجه وزن خرپا پس از بهینه‌یابی است.

چرا که در کدنویسی صورت گرفته، تمامی هندسه خرپا بر مبنای این متغیر مستقل صورت گرفته است. برای شبیه‌سازی بهینه‌یابی با الگوریتم ژنتیک، از پلاگین گالاپاگوس در گرس‌هاپر استفاده شد. خرپای مذکور تحت بارهای عمودی با مقادیر فرضی ۵ نیوتنی و دهانه‌ی فرضی ۵ متری مدل‌سازی شد و با گذشت ۱۵۰ نسل، حالت کمینه بدست آمد. در پاسخ بهینه، قوس پایین به صورت تخت و قوس بالا خیزی معادل ۲ متر را دارد. برای مقایسه بهتر هر دو حالت خرپای مذکور قبل و بعد از بهینه‌یابی، در شکل (۱۰) دیاگرام‌های فرمی در سمت چپ و دیاگرام‌های نیرویی در سمت راست نشان داده شده

شکل ۱۰. دیاگرام فرمی و نیرویی خرپای وارن قوسی بهینه در شرایط فرض شده

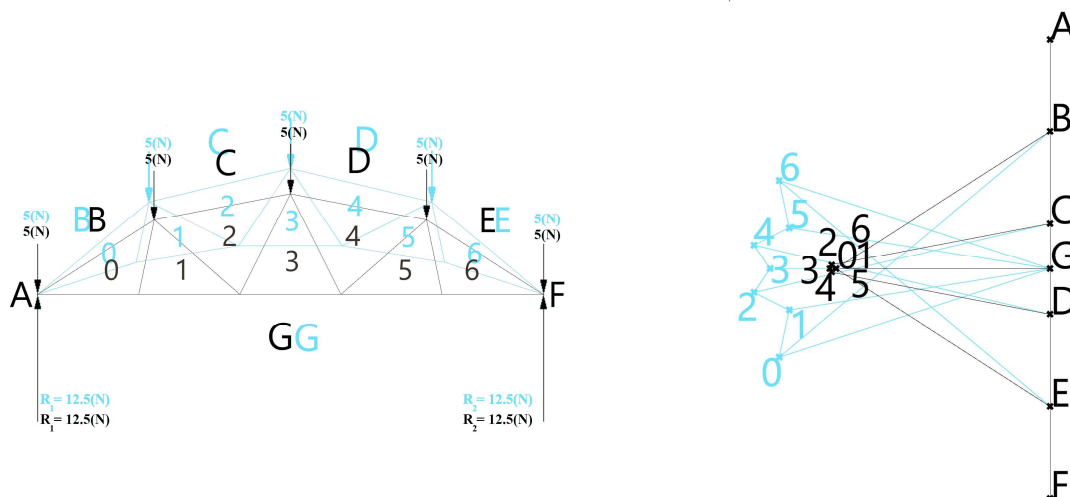


Fig. 10. Form and force diagram of optimized Warren Arc truss under

ساده و فرم‌آزاد از خرپای قوسی وارن پیاده‌سازی شده است. همچنین شبیه‌سازی‌های صورت گرفته با نتایج روش المان محدود مقایسه شد. با بررسی و مقایسه میان روش‌های گرافیک استاتیک و المان محدود، حداکثر اختلاف میان این دو روش $1/2\%$ به دست آمد. نتایج ارزیابی در نمونه‌های مشابه دقت و کارایی بالای الگوریتم و برنامه نوشته شده برای تحلیل گرافیک استاتیک خرپاهای موردنظر را تصدیق می‌نماید.

۶- نتیجه‌گیری

در طراحی یک فرم داشتن اطلاعاتی کافی در زمینه سازه و چگونگی جریان نیرویی لازم است. گرافیک استاتیک روشی برای محاسبه‌ی نیروها به کمک ترسیم هندسی است که با ظهور نرم‌افزارهای پارامتریک می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های سخت و پیچیده‌ی محاسباتی باشد. علاوه بر این به دلیل امکان ایجاد تغییرات دو طرفه در نمودارهای فرم و نیرویی گرافیک استاتیک، توانایی کنترل فرم همزمان با کاهش تنش‌های داخلی اعضا نیز میسر می‌شود. در پژوهش انجام شده مدل‌سازی پارامتریک و تحلیل گرافیک استاتیک نمونه‌های

- comparison of 5 projects designed based on genetic algorithm. The first international conference and the second national conference on Urban Planning, Architecture, Civil Engineering and Knowledge-based Art. (In Persian)
- [8] Hassani M. 2017. Investigating the effect of parametric design as a processing tool in Architecture and Structures. Third annual conference on Architectural, Urban Planning and Urban Management Research. (In Persian)
- [9] Block P. 2009. Thrust network analysis: Exploring Three-dimensional Equilibrium. Ph.D. Thesis Massachusetts Institute of Technology.
- [10] Alic V. & Akesson D. 2017. Bi-directional algebraic graphic statics. *Computer-Aided Design*, 93, 26-37.
- [11] Bow R. 1873 Economics of construction in relation to framed structures. ICE Publishing, London.
- [12] Konstantatou M., Acunto P.D. & McRobie A. 2018. Polarities in structural analysis and design: n - dimensional graphic statics and structural transformations. *International Journal of Solids and Structures*, 152–153, 272–293.
- [13] Baranyai, T., 2021. The force as a function: Towards analytical graphic statics for spatial structures. arXiv preprint arXiv:2104.02313.
- [14] Akbarzadeh, M. and Hablicsek, M., 2021. Algebraic 3D graphic statics: Constrained areas. *Computer-Aided Design*, 141, 103068.
- [15] Mozaffari, S., Hablicsek, M., Akbarzadeh, M. and Vogel, T., 2021. Developing a polyhedral graphic statics formulation for tetrahedral truss analysis. In Annual Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures. IASS 2021.
- [16] Millar, C., McRobie, A. and Baker, W.F., 2021. On the large displacements of infinitesimal mechanisms using graphic statics. In Proc. IASS Int. Conf. on Spatial Structures.
- [17] McRobie, A., Millar, C. and Baker, W.F., 2021. Stability of trusses by graphic statics. *Royal Society open science*, 8(6), 201970.

سپاسگزاری از حمایت مالی

«این پژوهش هیچ کمک هزینه خاصی از هیچ مؤسسه سرمایه‌گذار در بخش عمومی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.»

یادداشت‌ها

«این مقاله مستخرج از پایان نامه کارشناسی ارشد با عنوان «تحلیل، طراحی پارامتریک و بهینه‌سازی سازه‌های فضاکار شبکه‌ای به روش گرافیک استاتیک» است که با راهنمایی جناب آقای دکتر یاسر شهبازی و جناب آقای دکتر فرهاد آخوندی در دانشگاه هنر اسلامی تبریز انجام گرفته است.»

اعلام تعارض منافع

نویسنده (نویسندگان) اعلام می‌کنند که هیچ نوع تعارض منافی وجود ندارد.

منابع

- [1] Chilton J. & Tang G. Translated by Shahbazi Y., Sabaghian T. & Zaker vafayi N. 2021. Timber Gridshells: Architecture, Structure and Craft. Jahad Daneshgahi, Tehran. (In Persian)
- [2] Stevin, S. Dijkstra E. J. (Ed.) 1955. In the Principal Works of Simon Stevin: General introduction mechanics. C. V. Swets & Seitzinger, vol 1.
- [3] Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D. & Williams C. (Eds.) 2014. Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization. Routledge.
- [4] Varignon, P. 2012. Nouvelle mécanique ou statique: Ouvrage posthume. Nabu Press, vol 3. Paris.
- [5] Rippmann M. 2016. Funicular Shell Design: Geometric approaches to form finding and fabrication of discrete funicular structures. Ph.D. Thesis ETH Zurich.
- [6] Wolfe W. 1921. Graphical analysis. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York.
- [7] Sadeghian Lotf Abad Kashkou M. & Hosseini A. 2019. Usage of genetic optimization algorithm in building design

- [25] Shahabi, E. 2016. Smartening the public realm with an emphasis on reducing energy consumption. Master thesis Tabriz Islamic Art University. (In Persian)
- [26] Kalat Jari, V. R. & Taleb Por, M. H. 2009. Training to reduce the effect of genetic algorithm parameters on cross-sectional optimization and topology of truss structures by multi-purpose search method. *Technology of Education*, 4, 57-72. (In Persian)
- [27] www.sciencedirect.com/topics/biochemistry-genetics-and-molecular-biology/evolutionary-algorithm
- [28] Rezayi Pazhand, M. & Mousavi, S. R. 2009. Cracking in planar structures with genetic ainternal forces of thelgorithm. *Modeling in Engineering*, 18, 23-37. (In Persian)
- [29] Larsen, E. 2017. Integrated structural analysis and design using graphic statics. Master's dissertation, Lund University.
- [18] Radhi A. Iacobellis V. & Behdinan K. 2021. Manipulation of topologically optimized structures using graphic statics. *Materials and Design*, 198, 109286.
- [19] Xu C., Wang Z., Li B. & Liu Q. 2021. Form-finding and shape optimization of bio-inspired branching structures based on graphic statics. *Structures*, 29, 392-407.
- [20] Abazari Esfahlan F. 2021. Parametric modeling, analysis and optimization of free-form truss shelters by Graphic statics. Master thesis Tabriz Islamic Art University. (In Persian)
- [21] Rutten D. & Others 2020. Grasshopper 3D, Version 14.0. Robert McNeel & Associates, WA.
- [22] Preisinger C. & Heimrath M. 2014. Karamba—A Toolkit for Parametric Structural Design. *Structural Engineering International*, 2, 217-221.
- [23] Allen E. & Zalewski W. 1938. *Form and Forces, Desining Efficient, Expressive Structures* Boston structure group, Wiley.
- [24] Khabazi, Z. 2012. *Algorithmic Architecture paradigm*. Ketabkadeh Kasra Publishing, Tehran. (In Persian)

Parametric modeling and graphic statics analysis of Warren Arched trusses

Taha Sabaghian^{*1}, Yaser Shahbazi², Farhad Akhoundi³

1. M.Sc. Graduated of Architectural Technology, Faculty of Architecture and Urbanism, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.

2. Associate Professor of Smart Structures and Architectural Technology, Faculty of Architecture and Urbanism, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.

3. Assistant Professor of Strengthening of Historical Constructions, Faculty of Architecture and Urbanism, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.

* t.sabaghian@tabriziau.ac.ir

Abstract

Graphic Statics is a visual analysis and calculation method to find the type and amount of internal forces in structures, which achieves this importance away from computational difficulties and only with a geometric approach focused on two reciprocal diagrams of form and force. In this paper, arched trusses based on Warren type are analyzed using graphic statics. For this purpose, the parametric model of form and force diagrams were programmed in the Grasshopper parametric plugin. Parametrization has also provided the ability to find and analyze any different types of free-form trusses based on the type of warren truss. To measure the validity of the method and the accuracy of the algorithm written in the Grasshopper add-on, the numerical results obtained from several samples of arched trusses under different loads have been compared with the finite element computational method. The results of the validation simulations indicate the high accuracy and speed of the proposed algorithm.

Bow's notation method with peer-to-peer drawing of members from form to force diagram is a suitable method for graphical calculation of forms with discontinuous components such as truss, by which the internal force of each component can be obtained separately and through drawings. This streamlines the drawing process with rules and principles and makes it easier to continue analyzing components based on calling by name.

First, an algorithm for arched truss production was written. The initial inputs in this algorithm included the coordinates of the beginning and end points of the arches and two points as the key of these two arches, whose truss height and also its rise are controlled by these two points. The lower arch was then divided into (n) equal parts by an arbitrary parameter of natural numbers. This number is one less for the upper arch, i.e. (n-1), so that the Warren Arched truss can be formed correctly. After loading, an algorithm for truss naming was created based on the Bow's notation method. To draw the part of the external forces after receiving the starting point which is located in the force line and the direction of the line which is obtained from the slope of the truss members; The intersection of the calculated lines and the points related to the truss zones are obtained and this diagram is drawn. Also, to examine the algorithm more accurately, the abutment reaction values obtained from the finite element method and the graphic statics method were compared. The comparison of simulation results shows the maximum difference about 1.2 percentage.

Keywords: Warren Arched Truss, Graphic Statics, Finite Element, Parametric Form Finding, Grasshopper