

# مطالعه تحلیلی ارتعاش عرشه‌های پلهای فولادی-FRP تحت جرم متحرک

سید حامد جعفری<sup>۱</sup>، حامد خضرزاده<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران (سازه)، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

\*khezrzadeh@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش ۹۷/۰۳/۲۱

تاریخ دریافت ۹۶/۱۱/۲۴

## چکیده

نظر به اهمیت کلیدی پلها در شریان‌های حیاتی سیستم حمل‌ونقل و با توجه به هزینه بالای ساخت آنها، نیاز به مطالعه و بررسی این سازه‌ها و به‌روزرسانی آنها همواره احساس می‌شود. امروزه کامپوزیت‌های FRP با توجه به خواص ویژه‌ای که دارند، می‌توانند گزینه مناسبی برای عرشه پلها باشند. در این مطالعه اثر مربوط به حرکت جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی پلهای فولادی-FRP و فولادی-بتنی بررسی شده است. اینرسی ایجاد شده در جرم متحرک و همچنین جرم واحد طول عرشه، آثار قابل توجهی بر پاسخ‌های دینامیکی دارند. در ابتدا روش MLB برای مدلسازی خواص تیرهای FRP و مساله جرم متحرک با نتایج آزمایشگاهی درستی آزمایی شده‌اند. در ادامه حل مسئله جرم متحرک برای پلهای فولادی-FRP و فولادی-بتنی صورت پذیرفته است. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر این امر هستند که میزان جرم عرشه و سختی آن تاثیر قابل ملاحظه بر پاسخ تحت اثر عبور جرم متحرک دارد. سرعت بحرانی موثر (CIS) و ضریب تشدید دینامیکی (DAF) محاسبه شده در موارد مختلف بیانگر تاثیرپذیری به مراتب پایین‌تر پلهای فولادی-FRP از عبور جرم متحرک هستند. تاثیر کمتر پل نسبت به عبور بار متحرک باعث دامنه نوسانی پایتیر و در نتیجه عمر خستگی بالاتر مجموعه پل خواهد شد. از این رو پلهای فولادی-FRP گزینه مناسبی در سیستم‌های حمل و نقل معمولی و سرعت بسیار بالا هستند.

**کلیدواژه‌گان:** کامپوزیت‌های FRP، جرم متحرک، عرشه پل، سرعت بحرانی موثر، ضریب تشدید دینامیکی

## ۱- مقدمه

پل، مسئله جرم متحرک و تاثیر آن بر پاسخ‌های دینامیکی عرشه است. در این پژوهش اثر مربوط به عبور جرم متحرک بر عرشه‌های فولادی-FRP به‌طور کامل بررسی شده و همچنین نتایج با عرشه‌های مرسوم فولادی-بتنی مقایسه شده است. پاسخ‌های دینامیکی عرشه پل، تحت عبور جرم متحرک به عواملی چون جرم، سختی و میرایی عرشه پل بستگی دارد. بنابراین با توجه به خواص متفاوت مصالح FRP با مصالح مرسوم فولادی و بتنی، ضریب ضربه پیشنهاد شده توسط

در طول دهه‌های گذشته مواد کامپوزیت FRP، کاربردهای فراوانی به عنوان مواد سازه‌ای پیدا کرده‌اند. این مواد با توجه به خواص مهندسی بهتر، از جمله سختی بالاتر، استحکام بیشتر، وزن کمتر، مقاومت در برابر حرارت، رطوبت و خوردگی که در مواد همگن مرسوم، نمی‌توان همگی این خواص را در کنار یکدیگر داشت، می‌توانند در سازه‌هایی همچون عرشه پلها مورد استفاده قرار گیرند. یکی از مسائل مهم در طراحی عرشه‌های

شرایط مرزی اختیاری با استفاده از توابع دینامیکی گرین [10]، حل مسئله جرم متحرک با استفاده از یک مطالعه جامع پارامتریک برای تیر تیموشنکو دو سر مفصل تحت عبور جرم متحرک [11] و رسیدن به حل تحلیلی پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو تحت عبور جرم متحرک با استفاده از روش  $EEM^1$  اشاره نمود [12]. از دیگر مطالعات صورت گرفته در زمینه روش‌های حل مسئله جرم متحرک می‌توان به دو روش تحلیلی- عددی و المان گسسته برای حل مسئله جرم متحرک روی تیرهای ویسکوالاستیک و مقایسه دو روش عددی  $HPM^2$  و  $ADM^3$  مناسب برای حل مسئله جرم متحرک اشاره کرد [13, 14]. در زمینه مسئله جرم متحرک روی صفحات، مطالعات فراوانی صورت گرفته است که از جمله آن می‌توان به مسئله جرم متحرک روی دیسک‌های الاستیک، معرفی روشی کلی برای در نظر گرفتن اثر جرم متحرک روی صفحات و اثر جرم متمرکز روی رفتار دینامیکی صفحات مستطیلی اشاره کرد [15, 16, 17, 18]. همچنین پژوهشی با استفاده از آنالیز میکرومکانیکی با توجه به اجزای تشکیل دهنده کامپوزیت شامل ماتریس، الیاف و ترکیب این دو مواد بر رفتار دینامیکی کامپوزیت‌های FRP انجام شده است [19, 20, 21, 22]. سرعت بحرانی مؤثر و لزوم استفاده از شتاب کوریولیس در تحلیل مسائل جرم متحرک مورد بررسی قرار گرفت [23]. پاسخ‌های دینامیکی ورق‌های FRP با الیاف زاویه‌دار تحت مسئله بار متحرک به روش المان محدود بر اساس تئوری تغییر شکلهای برشی مرتبه اول بررسی شدند [24]. همچنین پاسخ‌های دینامیکی تیرها، تحت عبور جرم متحرک شتابدار به روش المان محدود با در نظر گرفتن اثر اینرسی جرم متحرک و نیروی طولی ایجاد شده در اثر عبور شتابدار جرم در کنار نیروی گرانشی جرم متحرک مورد بررسی قرار گرفت [25]. همچنین روشی نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاشات و دینامیک تیرهای نازک و ضخیم با استفاده از شکل‌ها مودی  $COPs^4$  و مثلثاتی با توجه به شرایط مرزی تیر استفاده شده، ارائه شد [26]. همچنین پاسخ دینامیکی پل‌های عابر پیاده FRP در اثر ارتعاشات وارد

آیین‌نامه آشتو نمی‌تواند برای عرشه‌های FRP نیز قابل قبول باشد. در واقع این ضریب برای عرشه‌های FRP، غیراقتصادی و محافظه‌کارانه است. عرشه‌های FRP پتانسیل بالایی به‌عنوان جایگزینی مناسب برای عرشه‌های متداول دارند [1]. عرشه‌های FRP با توجه به وزن پایینی که دارند عملیات ساخت را به‌طور قابل توجهی سرعت می‌بخشند.

در زمینه مهندسی پل، استفاده از پروفیل‌های FRP از اواسط دهه ۱۹۷۰ آغاز شد. در دهه ۱۹۹۰ تلاش‌های فراوانی برای تولید عرشه‌های FRP با قابلیت‌های مشابه عرشه‌های فولادی و بتنی توسط کارخانه‌های تولید پروفیل‌های FRP صورت گرفت. مطالعات فراوانی در زمینه عرشه‌های FRP تنها و عرشه‌های FRP قرار گرفته روی شاهتیرهای فولادی انجام شده است. در این زمینه می‌توان به بررسی عملکرد یکپارچه شاهتیر فولادی و عرشه FRP، سهم شاهتیرها از بار ردیف چرخ و ضریب ضربه بارهای دینامیکی [2]، سختی‌های خمشی و برشی عرشه‌های FRP و بررسی پاسخ‌های دینامیکی آن‌ها تحت بارگذاری کامیون استاندارد (HS25) و مقایسه با عرشه‌های بتنی [3] و بررسی رفتار فرورفتگی عرشه FRP چند سلولی پلهای عابر پیاده تحت بارگذاری شبه‌استاتیکی، به صورت آزمایشگاهی [4] اشاره کرد.

اولین راه حل برای مسئله جرم متحرک در سال ۱۹۶۹ برای تیرهای دو سر مفصل ارائه شد [5]. در ادامه در سال ۱۹۸۹ نوعی روش تحلیلی- عددی با توجه به خواص توابع متعامد و تابع دلتای دیراک ارائه شد که به‌راحتی قابل‌استفاده برای کلیه شرایط مرزی است [6]. همچنین روشی تحلیلی برای تیر دو سر مفصل تحت عبور جرم متحرک با در نظر گرفتن اینرسی جرم متحرک ارائه شد [7]. مفهوم سرعت بحرانی برای اولین بار در پژوهش نیکخو و همکاران [8] مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که این سرعت بحرانی به پرورد اساسی نوسان و دهانه تیر مرتبط است. در زمینه مسئله جرم متحرک با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو، مطالعاتی صورت گرفته است که از جمله آن‌ها می‌توان به مواردی چون شبیه سازی تیر تیموشنکو لایه‌ای دارای خرابی جدشدگی بین لایه‌ای تحت عبور جرم نوسانی با استفاده از روش بسط سری مودال متعامد [9]، ارائه روش تحلیلی برای پاسخ‌های دینامیکی تیر تیموشنکو یکنواخت با

1 Eigenfunction Expansion Method

2 Homotopy Perturbation Method

3 Adomian Decomposition Method

4 Characteristic orthogonal polynomials

گرفته است تا نتایج حاصل از آنها با نتایج آزمایشگاهی و عددی مقایسه و درستی آزمایی شود.

## ۲-۱- محاسبه خواص مکانیکی پروفیل‌های FRP

با توجه به ساختار پروفیل‌های FRP روش‌های متعددی برای تعیین خواص تیرهای ساخته شده از کامپوزیت‌های لایه‌ای پیشنهاد شده است. یکی از روش‌های ارائه شده برای محاسبه خواص مکانیکی پروفیل‌های تیر FRP شامل سختی‌های کششی، خمشی، کششی-خمشی و برشی، استفاده از روش MLB<sup>۱</sup> است [30]. در این روش پاسخ مقطع تیر کامپوزیت لایه‌ای تشکیل شده از اجزا جدار نازک، بصورت برآیند مجموع پاسخ هم‌هنگ تک تک اجزا بدست می‌آید. در روش MLB پاسخ تک تک اجزا جدار نازک پروفیل FRP به وسیله روابط کینماتیکی به کرنش و انحنای تار خنثی مرتبط می‌شوند. در ادامه روابط تعیین خواص مکانیکی در این روش به صورت خلاصه مورد بازبینی قرار خواهند گرفت. در شکل (۱) چگونگی تعیین مشخصات هندسی یک مقطع FRP تشکیل شده از اجزای جدار نازک تشریح شده است [30].

شکل ۱. مقطع پروفیل FRP و دستگاه مختصات برای روش MLB [30]

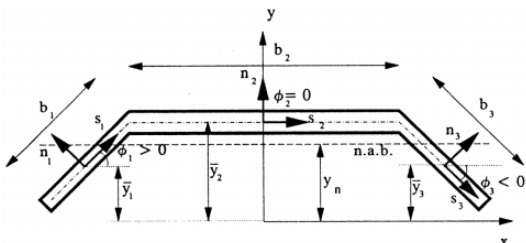


Fig. 1. FRP profile and coordinates system in the MLB [30]

در روش MLB پس از تعیین خواص تک تک اجزای جدار نازک تشکیل دهنده پروفیل، برای هر یک از این اجزا روابط کرنش و انحنا با نیرو و لنگرهای لبه‌ای بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{\epsilon}\} \\ \{\bar{\kappa}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha] & [\beta] \\ [\beta]^T & [\delta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{N}\} \\ \{\bar{M}\} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه فوق  $\{\bar{\epsilon}\}$  فرم برداری تانسور کرنش صفحه میانی جزء جدار نازک،  $\{\bar{\kappa}\}$  فرم برداری تانسور انحنا،  $\{\bar{N}\}$  بردار نیروهای

شده بر اثر عبور و مرور افراد مورد بررسی قرار گرفت [27]. از کارهای تجربی و عملی انجام شده در مسئله جرم متحرک نیز می‌توان به مواردی چون بررسی پاسخ دینامیکی پلی با مقیاس کوچک در شرایط دو سر مفصل تحت اثر جرم متحرک [28] و همچنین بررسی خواص دینامیکی اعضای سازه‌های FRP با استفاده از آنالیز مودال [29] اشاره نمود.

در این مقاله در ابتدا روش‌های تحلیل خواص مکانیکی تیر کامپوزیت لایه‌ای و جرم متحرک مورد بازبینی قرار گرفته است. پس از معرفی روش‌های تحلیلی، اعتبارسنجی این روش‌ها از طریق مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و همچنین تحلیل‌های عددی صورت پذیرفته است. نتایج این اعتبارسنجی بیانگر پاسخ‌های مطلوب روش‌های موجود در تعیین خواص مکانیکی تیرهای کامپوزیت لایه‌ای و مساله جرم متحرک است. پس از انجام اعتبارسنجی، مساله جرم متحرک روی عرشه‌های بتنی متداول پلها و چند نوع از عرشه‌های کامپوزیت‌های FRP بررسی شده است و سرعت بحرانی موثر برای نمونه‌های مختلفی از عرشه‌های کامپوزیت محاسبه شده است. نتایج حاصل شده بیانگر این امر هستند که جرم واحد طول عرشه‌ها نقش بسیار مهمی در رفتار دینامیکی عرشه پلها تحت اثر جرم متحرک دارند و می‌توان استفاده از عرشه‌های کامپوزیتی در سیستم‌های بسیار سریع حمل و نقل که امروزه مطالعات بسیاری بر روی آنها در حال انجام است را توصیه نمود. همچنین حدود ضریب بزرگنمایی دینامیکی از طریق روش‌های ارائه شده، برای عرشه‌های مختلف در سرعت‌ها و جرم‌های محرک مختلف تعیین شده است.

## ۲- تعریف مسئله

با توجه به استفاده روز افزون پروفیل‌ها و عرشه‌های FRP به عنوان اعضای باربر سازه‌ای بررسی دقیقتر رفتار این اجزا برای کاربردهای مهندسی مورد نیاز است. در مورد پل‌های با عرشه‌های FRP مساله تعیین خواص دینامیکی و رفتار مجموعه پل تحت اثر این بارها برای تعیین ضرایب تشدید دینامیکی حائز اهمیت است. در ادامه روش‌های تحلیلی تعیین خواص مکانیکی مقاطع FRP و مساله جرم متحرک مورد بازبینی قرار

روی تیر پیوسته نشان داده شده در شکل (۲) عبور می‌کند. I برابر ممان اینرسی ثابت تیر و m جرم واحد طول تیر است. همچنین فرض می‌شود تیر دارای میرایی ناچیز است و جرم متحرک از تیر جدا نمی‌شود. هدف بدست آوردن آثار مربوط به اینرسی حرکتی این جسم و اینرسی جرم تیر روی پاسخ تیر است. با این فرض که بار گسترده‌ای بر تیر وارد نمی‌شود و همچنین مشخصات فیزیکی تیر نسبت به فاصله و زمان بدون تغییر باشد. برای بدست آوردن معادلات دینامیکی جسم، از اصل همپلتون استفاده می‌شود.

شکل ۲. تیر اولر - برنولی تحت بارگذاری جرم متحرک

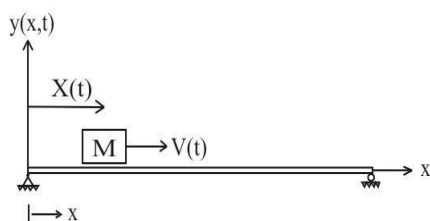


Fig. 2. Euler-Bernoulli beam subjected to moving mass

در شکل فوق،  $X(t)$  بیانگر وضعیت جرم متحرک نسبت به ابتدای تیر در جهت  $x$  است. این متغیر تابعی از زمان است و مشتق آن نسبت به زمان  $V(t)$ ، سرعت جرم را تعریف می‌کند.  $y(x,t)$  جابه‌جایی‌های قائم تیر در زمان‌های مختلف در طول تیر نسبت به مختصات اولیه در حالت آزاد را نشان می‌دهد. حال عبارات مربوط به انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در اصل همپلتون برای سیستم نشان داده شده در شکل (۲) به صورت روابط (۷ و ۸) نوشته می‌شوند.

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} M \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 \quad (7)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI y''^2] dx + M g Y \quad (8)$$

اصل همپلتون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \partial W_{nc} dt = 0 \quad (9)$$

فرض می‌شود که نیروی خارجی وارد بر سیستم به غیر از نیروی گرانشی، در فاصله زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر صفر باشد. با توجه به این‌که تحلیل تیر پیوسته مورد بررسی تنها شامل تغییر شکل‌های کوچک است، پس از انرژی پتانسیل مربوط به تغییر وضع اجزاء تیر صرف‌نظر می‌شود.

لبه‌ای،  $\{M\}$  بردار لنگرهای لبه‌ای و فرمهای ماتریسی  $[\alpha]$ ،  $[\beta]$  و  $[\delta]$  معکوس ماتریس سختی جزء را توسط روابط زیر به ماتریسهای سختی جزء  $[A]$ ،  $[B]$  و  $[D]$  مرتبط می‌کنند [31]:

$$[\alpha] = [A] - [B][d][B]^{-1} \quad (2)$$

$$[\delta] = [D] - [B][a][B]^{-1}$$

$$[\beta] = [B]^T = -[a][B][\delta] = -[d][B][\alpha]$$

که در رابطه فوق

$$[a] = [A]^{-1} \quad (3)$$

$$[d] = [D]^{-1}$$

با اعمال فرضیاتی بر روی رابطه (۱) می‌توان به معادلات زیر راستای Z رسید [30]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{z}_z \\ \bar{k}_z \\ \bar{\gamma}_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \beta_{16} \\ \alpha_{16} & \beta_{16} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_z \\ M_z \\ \bar{N}_{sz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

در شرایط لایه‌های متقارن متعادل<sup>۱</sup> ثابت‌های  $\alpha_{16}$  و  $\beta_{16}$  برابر با صفر هستند و رابطه زیر در راستای Z برقرار است:

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_z \\ M_z \\ \bar{N}_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i & 0 \\ \bar{B}_i & \bar{D}_i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{z}_z \\ \bar{k}_z \\ \bar{\gamma}_{sz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه فوق  $\bar{A}_i$  سختی محوری،  $\bar{B}_i$  سختی همبسته خمشی - محوری،  $\bar{D}_i$  سختی خمشی و  $\bar{F}_i$  سختی برشی جزء جدارنازک  $i$ -ام هستند [30]. بنابراین با توجه به روابط فوق پارامترهای سختی ذکر شده برای مجموعه پروفیل FRP توسط روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_z &= \sum_{i=1}^n \bar{A}_i b_i \\ B_y &= \sum_{i=1}^n [\bar{A}_i (\bar{y}_i - \bar{y}_n) + \bar{B}_i \cos \phi_i] b_i \\ D_y &= \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \left[ (\bar{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \frac{b_i^2}{12} \sin^2 \phi_i \right] \\ &\quad + 2 \bar{B}_i (\bar{y}_i - \bar{y}_n) \cos \phi_i + \bar{D}_i \cos^2 \phi_i \\ F_z &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i b_i \sin^2 \phi_i \end{aligned} \quad (6)$$

## ۲-۲- مسئله جرم متحرک

در این قسمت حل تحلیلی مساله جرم متحرک مورد بازبینی قرار خواهد گرفت [8, 23]. فرض کنید M جرمی باشد که

پس از انجام عملیات ریاضی و استفاده از خاصیت تعامد  
 حلهای ارتعاش آزاد و تابع دلتای دیراک، رابطه نهایی ارتعاش  
 تیر بصورت زیر بدست می‌آید [8, 23]:

$$\sum_n \psi_n(x) \times \left\{ m \frac{d^2 A_n}{dt^2} + m \omega_n^2 A_n - \left( \frac{M}{S_n} \right) \left[ g - V^2 \sum_p \psi_p^-(vt) T_p(t) \right] \right\} \psi_n(vt) = 0 \quad (17)$$

$$-2V \sum_p \psi_p^-(vt) \dot{T}_p(t) - \sum_p \psi_p(vt) \ddot{T}_p(t) \left. \right\} \psi_n(vt) = 0$$

$$. S_p = \int_0^l \psi_p(x) \psi_p(x) dx$$

که در رابطه فوق  $S_p = \int_0^l \psi_p(x) \psi_p(x) dx$  معادله (۱۷) باید  
 برای تمام مقادیر X جواب‌گو باشد، این امر زمانی میسر است که  
 معادله زیر برقرار باشد.

$$m \frac{d^2 A_n}{dt^2} + m \omega_n^2 A_n - \left( \frac{M}{S_n} \right) \left[ g - V^2 \sum_p \psi_p^-(\chi) T_p(t) \right] \psi_n(\chi) = 0 \quad (18)$$

$$-2V \sum_p \psi_p^-(\chi) \dot{T}_p(t) - \sum_p \psi_p(\chi) \ddot{T}_p(t) \left. \right\} \psi_n(\chi) = 0$$

$$T_n(t) \cdot \chi = vt$$

که در رابطه فوق  $\chi = vt$  دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۸)  
 با استفاده از روش عددی رانگ کوتاه مرتبه چهار قابل حل است  
 [23]. برای حل ابتدا معادله به فضای حالت انتقال داده شده و  
 سپس از روش رانگ کوتاه برای رسیدن به توابع  $T_n(t)$  استفاده  
 می‌شود. با در نظر گرفتن n مود نوسان برای حل معادله،  
 مشخص می‌شود که معادله بالا بیانگر n معادله است که با مرتب  
 کردن آنها، به صورت ماتریسی، معادله (۱۹) حاصل خواهد شد.  
 روابط پایین مربوط به حالتی است که توابع  $\psi_n(x)$  به صورتی  
 انتخاب شوند که مقادیر  $S_n$  برابر واحد بدست آیند.

$$M \ddot{T} + C \dot{T} + K T = f(t) \quad (19)$$

در رابطه ماتریسی (۱۹)، درایه‌های هرکدام از ماتریس‌ها در  
 نمایش اندیسی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{np} = \delta_{ij} + \frac{M}{m} \psi_n(\chi) \psi_p(\chi) \\ K_{np} = \omega_{ij}^2 \delta_{ij} + \frac{v^2 M}{m} \psi_n(\chi) \psi_p^-(\chi) \\ C_{np} = \frac{2vM}{m} \psi_n(\chi) \dot{\psi}_p^-(\chi) \\ f_p = \frac{M}{m} g \psi_p(\chi) \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \{ m \dot{y} \delta \dot{y} - EI y'' \delta y'' \} dx dt \quad (10)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \{ M \dot{Y} \delta \dot{Y} + M \dot{X} \delta \dot{X} - M g \delta Y \} dt$$

با اعمال شرایط مرزی ضروری و طبیعی، معادله (۱۱) نتیجه  
 می‌شود.

$$EI y^{IV} + m \ddot{y} + [M \ddot{Y} + M g] \delta(x - X) = 0 \quad (11)$$

$$M \ddot{X} = 0 \rightarrow X = Vt + X_0$$

با بسط دادن معادله (۱۱)، معادله (۱۲) به صورت زیر  
 بدست می‌آید.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + M \left[ V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \delta(x - X) = -M g \delta(x - X) \quad (12)$$

### ۲-۳- حل تحلیلی- عددی مساله

معادله دیفرانسیل اساسی ارتعاش سیستم تیر و جرم متحرک  
 به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \quad (13)$$

$$M \left[ -g - V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \delta(x - X)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تغییر شکل تیر به صورت  
 حاصل ضرب توابع وابسته به زمان در توابع وابسته به مکان به  
 صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x, t) = \sum_n \psi_n(x) T_n(t), \quad n = 1, \dots, N \quad (14)$$

$$T_n(t) \psi_n(x)$$

که در رابطه فوق  $\psi_n(x)$  توابع ویژه تیر با شرایط مرزی  
 یکسان با مساله جرم متحرک هستند که با حل معادله ارتعاش  
 آزاد تیر بدست می‌آیند و  $T_n(t)$  نیز توابع دامنه را تعریف می-  
 کنند. توابع  $\psi_n(x)$  به فرم زیر نوشته می‌شوند:

$$\psi_n^{IV}(x) - \alpha_n^4 \psi_n(x) = 0 \quad \omega_n^2 = \frac{\alpha_n^4 EI}{m} \quad (15)$$

که در رابطه فوق  $\omega_n^2 = \frac{\alpha_n^4 EI}{m}$  با بازنویسی طرف راست

معادله (۱۳) به فرم سری، داریم:

$$M \left[ -g - V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \delta(x - X) \quad (16)$$

$$= \sum_n \psi_n(x) J_n(t)$$

عرشه می‌باشد. در این قسمت نتایج حاصل از روابط تحلیلی بدست آمده از روش MLB [30] و همچنین شبیه‌سازی عددی تیرهای کامپوزیت در تعیین فرکانس‌های ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیت با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده در مرجع [29] مقایسه شده است.

فرکانس‌های ارتعاش آزاد مودهای اول تا سوم تیرهای FRP بر اساس تئوری‌های اولر-برنولی و تیموشنکو محاسبه می‌شوند. در جهت مقایسه درستی نتایج مدل عددی همچنین فرکانس‌های ارتعاش آزاد با استفاده از نرم افزار آباکوس نیز محاسبه شدند. خواص الاستیک تیرها در روش‌های تحلیلی بر اساس روش MLB محاسبه شده است و با نتایج آزمایشگاهی [29] مقایسه شده است. به علاوه نتایج عددی حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس نیز به منظور مقایسه با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مورد استفاده قرار گرفت. جزئیات تیرهای مورد مطالعه مطابق شکل (۳) و خواص مکانیکی مواد در جدول (۱) آورده شده است.

در نهایت نتایج حاصل از تئوری‌های اولر - برنولی و تیموشنکو و نتایج حاصل از مطالعات آزمایشگاهی و مطالعات عددی در جدول (۲) جمع‌آوری شده‌اند. با بررسی نتایج ارائه شده در جدول (۲) مشخص می‌شود که با استفاده از روش تحلیلی MLB می‌توان به نحو مناسبی خواص الاستیک تیرهای کامپوزیتی را بدست آورد. از این رو در ادامه برای تحلیل مقاطع FRP پیشنهادی از این روش استفاده خواهد شد.

جدول ۱. مشخصات مکانیکی پروفیل‌های کامپوزیت FRP [29]

Longitudinal Young's Modulus $E_z$	23 GPa
Transverse Young's Modulus $E_x = E_y$	8.5 GPa
Shear Modulus $G_{xz} = G_{yz}$	3 GPa
Transverse Shear Modulus $G_{xz} = G_{yz}$	3.455 GPa
Longitudinal Poisson's ratio $\nu_{xy}$	0.23
Transverse Poisson's ratio $\nu_{xz} = \nu_{yz}$	0.09
Density $\rho$	1600-1800kg/m <sup>3</sup>

Table 1. Mechanical properties of FRP profiles

با در نظر گرفتن شرایط مرزی تیر دو سر مفصل و در راستای ارضای شرایط تعامد برای توابع  $\psi_n(x)$ ، این توابع از حل معادله ارتعاش آزاد تیرهای دو سر مفصل بدست می‌آیند و در نتیجه مقادیر  $\psi_n(x)$  نیز برابر شکل ارتعاش آزاد مودهای مختلف تیرهای دوسر مفصل در نظر گرفته می‌شود که در ادامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

با در نظر گرفتن مودهای اول، دوم و سوم، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم سه معادله و سه مجهول بدست می‌آید که می‌توان از روش رانگ-کوتا برای حل آن استفاده نمود. فرایند حل به این صورت است که در ابتدا معادله در فضای مبنا نوشته می‌شود. سپس در فضای مبنا، برداری که  $n$  درایه اول آن شامل ضرایب متغیر مکان و  $n$  درایه دوم آن شامل ضرایب متغیر سرعت هستند ایجاد شده و معادله دیفرانسیل (۱۹) بر مبنای بردار جدید مرتب می‌شود.

$$X = \begin{bmatrix} T \\ \dot{T} \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \ddot{T} \end{bmatrix} \quad (21)$$

با ساختن بردار جدید  $X$  در فضای مبنا، بر مبنای معادله دیفرانسیل بالا رابطه زیر بین بردار  $X$  و  $\dot{X}$  برقرار است:

$$\dot{X}(t) = \Gamma(t)X(t) + \Omega(t)f(t) \quad (22)$$

که در معادله دیفرانسیل فوق ماتریس‌های  $\Gamma$  و  $\Omega$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\Omega$  و  $\Gamma$

با قرار دادن ماتریسهای  $\Gamma$  و  $\Omega$  از روابط فوق در معادله (۱۹) معادله (۱۷) بدست خواهد آمد. حال می‌توان با حل عددی معادله دیفرانسیل، پاسخ دینامیکی تیر را در زمانهای مختلف بدست آورد.

### ۳- درستی آزمایشی حل‌های تحلیلی موجود

در این قسمت روابط تحلیلی ارائه شده در بخش قبل مورد صحت سنجی قرار گرفته است.

۳-۱- درستی آزمایشی تعیین فرکانس‌های ارتعاش آزاد تیر دو سر مفصل

همان‌گونه که اشاره شد در حل تحلیلی مساله جرم متحرک بر روی یک عرشه کامپوزیت نیاز به تعیین خواص دینامیکی

جدول ۲. فرکانسهای ارتعاش آزاد در آزمایش‌ها [29]، مدل اجزای محدود و نتایج روابط تحلیلی روش MLB

Mode	Experiments			Finite Element			Euler-Bernoulli Theory			Timoshenko Theory		
	First	Second	Third	First	Second	Third	First	Second	Third	First	Second	Third
I ( $J_{\max}$ )	24.414	91.552	195.312	23.042	88.240	197.13	23.744	95.026	213.870	23.463	90.153	191.024
I ( $J_{\min}$ )	7.020	-	-	6.845	27.237	60.716	6.208	24.845	55.917	6.191	24.404	53.645
Q	35.095	106.048	225.067	34.926	129.77	246.88	36.442	145.845	328.243	35.738	134.651	278.222
C ( $J_{\min}$ )	14.490	66.375	130.462	13.955	54.887	119.99	13.585	54.368	122.362	13.573	53.792	119.241
H ( $J_{\max}$ )	16.479	67.138	-	17.98	65.490	126.01	18.292	73.206	164.76	17.862	66.594	135.863

Table 2. Free vibration frequencies in experiments [29], FE model, and theoretical results of the MLB method

آورده شده است. بررسی نتایج بیانگر این امر است که حل تحلیلی ارائه شده در بخش پیشین هماهنگی مناسبی با نتایج آزمایشگاهی [28] دارد. با توجه به نتایج درستی آزمایشی در ادامه پژوهش برای حل مساله جرم متحرک روی عرشه پل از روش تحلیلی تشریح شده استفاده شده است.

جدول ۳. مقایسه پاسخ‌های بیشینه دینامیکی تحلیلی و آزمایشگاهی [28] تیر دو سر مفصل در نقطه (7/16 L)

Speed (m/s)	Experiment (mm)	Theory (mm)
0.85	0.747	0.741
1.14	0.756	0.748
1.29	0.736	0.757
1.44	0.770	0.747
1.59	0.739	0.765
1.76	0.712	0.764
1.92	0.743	0.757
2.11	0.787	0.779

Table 3. Comparison of theoretical and experimental [28] maximum deflection at the point (7/16 L)

شکل ۳. مشخصات هندسی پروفیل‌های FRP حاضر در آزمایش [29]

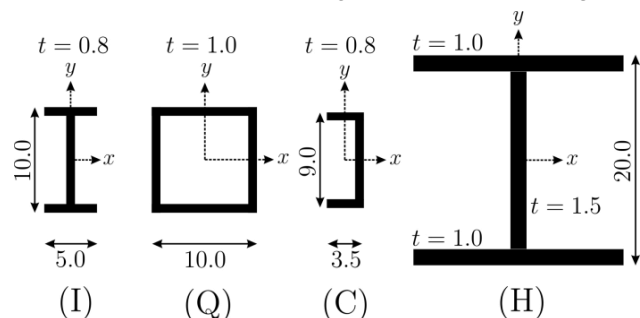


Fig. 3 Geometrical characteristics of FRP profiles in the experiments [29]

۳-۲- درستی آزمایشی حل تحلیلی مسئله جرم متحرک در این قسمت برای درستی آزمایشی نتایج حاصل در قسمت قبل، از پژوهش آزمایشگاهی مرتبط [28]، برای تیرهای دو سر مفصل استفاده شد. در این پژوهش آزمایشگاهی یک مدل واقعی از سازه پل توسط یک مدل مقیاس شده از جنس آلومینیوم شبیه‌سازی شده است و جرم از پتانسیل‌های متفاوت اولیه که توسط یک سطح شیب‌دار تامین می‌شود شروع به حرکت کرده و از روی پل مقیاس شده عبور می‌کند. نتایج حاصل از تئوری ارائه شده در بخش قبلی مقاله با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است که نتایج این مقایسه نتایج در شکل (۴) و جدول (۳)



شکل ۴. مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی [28] پاسخ تیر دو سر مفصل در نقطه (7/16 L) تحت عبور جرم متحرک.

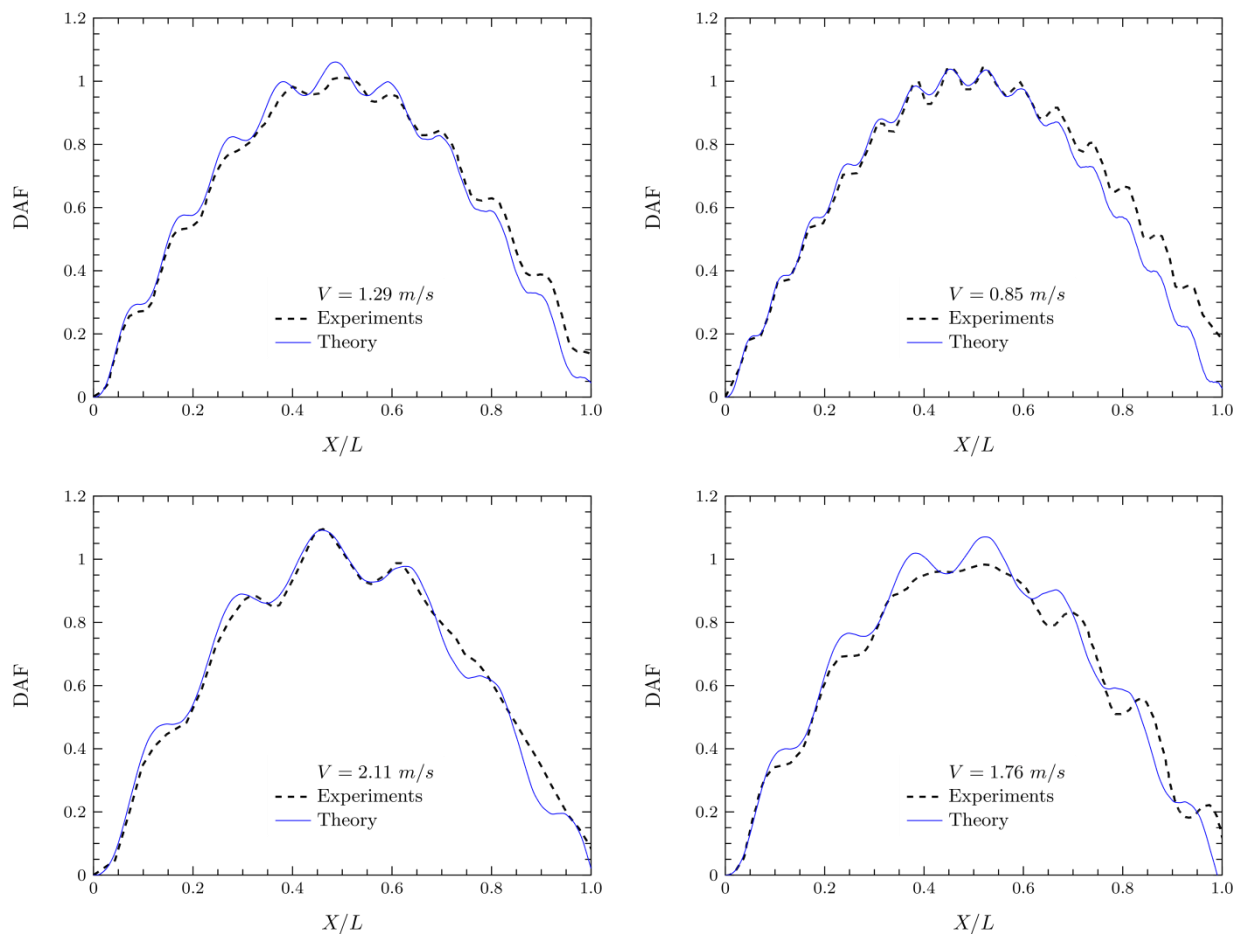


Fig. 4. Comparison of results of theory and experiments [28] of SS beam subjected to moving mass at 7/16L.

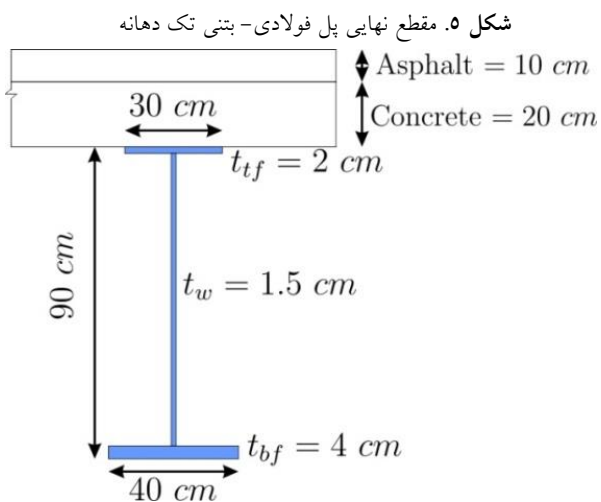


Fig. 5. Final design section of steel-concrete single span bridge

#### ۴- مقایسه عرشه پل دو عنصری تیرهای فولادی و عرشه بتنی و عرشه پل دو عنصری شاه تیرهای فولادی و عرشه FRP

در این بخش نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در قسمت‌های پیشین در مورد پل‌های با خواص مکانیکی متفاوت مورد استفاده قرار خواهند گرفت و آثار تفاوت خواص مکانیکی و تفاوت جرم عرشه‌های فولادی-بتنی و عرشه‌های فولادی-FRP بررسی خواهد شد. پل انتخاب شده در این پژوهش پل تک دهانه با طول آزاد ۲۰ متر و دهانه عرضی ۴ متر است. فاصله محور به محور تیرهای طولی از یکدیگر ۳ متر است.



مکانیکی لایه‌های استفاده شده در ورق‌های FRP عرشه در جدول (۴) ارائه شده است [33, 34]. با وجود تنوع فراوان حالت‌های استفاده از مواد FRP که شامل تنوع در لایه‌بندی ورق‌های FRP و زاویه الیاف می‌باشد، در این پژوهش از ماتریس اپوکسی و الیاف شیشه و گرافیت با زاویه‌های صفر و نود درجه برای طراحی عرشه‌های فولادی-FRP استفاده شد. در مجموع ۴ نوع عرشه FRP برای استفاده در عرشه‌های فولادی-FRP در نظر گرفته شده است که در ورق‌های بال با یکدیگر متفاوت هستند. همان‌طور که در شکل (6) نمایش داده شده است، برای تمامی ورق‌های بال، سه لایه CM3205 به‌عنوان لایه‌های مرزی به‌علاوه یک لایه متصل‌کننده Bonding layer به‌عنوان مرز ورق‌های بال و هسته که همگی از جنس Glass epoxy می‌باشند استفاده شده است. لایه‌های دیگر استفاده شده در ورق‌های بال مطابق با جدول (4) هستند. در نهایت و پس از انجام محاسبات برای چینشهای مختلف ورق‌های FRP سختی‌ها و جرم عرشه‌های فولاد مطابق با جدول (5) بدست خواهد آمد. در ادامه از نتایج حاصل شده در این قسمت در تعیین ویژگیهای پاسخ دینامیکی سیستمهای مختلف پل در برابر جرم متحرک استفاده خواهد شد. شایان ذکر است که در تعیین خواص عرشه پلهای مورد مطالعه به گونه‌ای عمل شد که سختی خمشی پل‌های با تیر اصلی فولادی و عرشه بتنی با پل‌های با تیر فولادی و عرشه FRP برابر باشند.

۱-۴- مشخصات عرشه‌های دو عنصری فولاد-بتن و فولاد-FRP در این بخش عرشه‌های دو عنصری پل یک‌بار با استفاده از مصالح متداول و بار دیگر با استفاده از مواد FRP طراحی شد. برای طراحی عرشه فولادی - بتنی از آیین‌نامه آشتو ۲۰۱۲ [32] و برای طراحی عرشه فولادی - FRP از روش پیشنهاد شده در مرجع [33]، بر اساس آیین‌نامه آشتو استفاده شد.

در طراحی عرشه‌ها از مشخصات فولاد نرمه ساختمانی با مقاومت تسلیم  $F_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ ، مدول الاستیسیته  $E = 2.06 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  برای تیرها و از مشخصات فولاد پرمقاومت با مقاومت تسلیم  $F_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$  برای میلگرد آجدار استفاده شده است. بتن در نظر گرفته شده در محاسبات دارای مقاومت  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  و نسبت مدول الاستیسیته بتن به فولاد برابر با 1/9 در نظر گرفته شده است. در نهایت پس از انجام محاسبات و کنترل کلیه ضوابط برطبق آیین‌نامه [32] مقطع نهایی پل فولادی-بتنی بصورت شکل (5) بدست می‌آید.

مقطع انتخابی برای قسمت FRP عرشه‌های فولادی-FRP در این پژوهش به دلیل الزامات کمانشی و سختی‌های خمشی و برشی براساس پیشنهاد مرجع [33] مطابق شکل (6) انتخاب شد. مشخصات مکانیکی هسته عرشه استفاده شده با توجه به نتایج آزمایشگاهی بدست آمده است [33]. مدول الاستیسیته محوری برابر ۱۱/۷۹، مدول برشی برابر ۴/۲۱ گیگاپاسکال و ضریب پواسون بزرگ برابر ۰/۴۰۲ بدست آمده است که در محاسبات مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین مشخصات

شکل ۶. (راست) جزئیات عرشه FRP حاضر در آزمایش، (چپ) شماتیک چینش لایه‌های ورق‌های بال عرشه FRP [33]

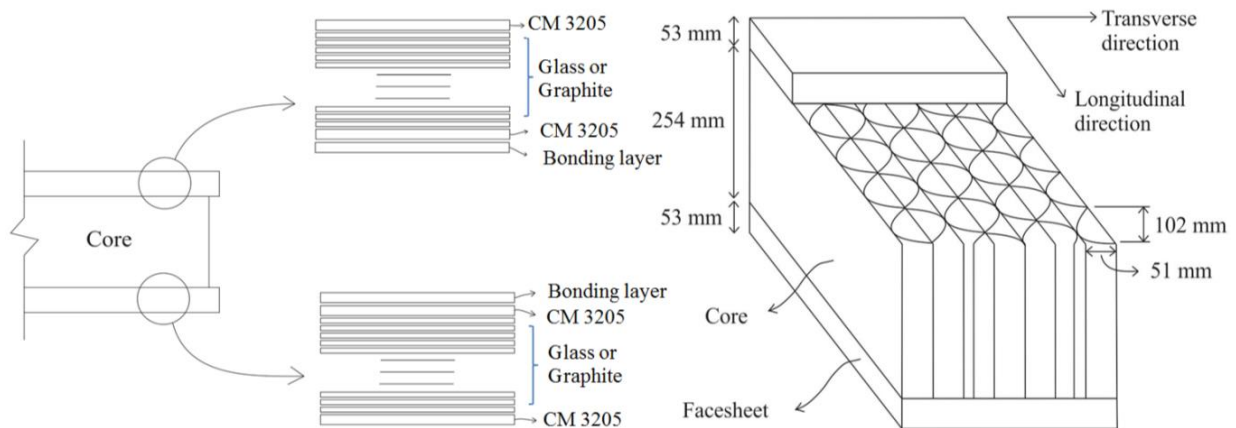


Fig. 6. (Right) Details of the FRP deck in the experiments, (Left) Schematic of the beam flange laminas [33]

جدول ۴. مشخصات مکانیکی اجزای مصرفی در عرشه FRP [33, 34]

Layer	Fiber Orientation	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\sigma_1^T$ (MPa)	$\sigma_1^C$ (MPa)	$\sigma_2^T$ (Ma)	$\sigma_2^C$ (MPa)	$\tau_{12}$ (MPa)
CM 3205 [33]	0°	72.27	8.00	3.08	0.295	1564	556	51	68	44
	CSM	11.79	11.79	4.21	0.402	279	279	279	279	139
Graphite-Epoxy [34]	0°	181	10.3	7.17	0.280	1500	1500	40	246	68
Glass-Epoxy [34]	0°	38.6	8.27	4.14	0.260	1062	610	31	118	72
Bonding Layer [33]	ChSM	9.72	9.72	3.50	0.394	157	157	157	157	79

Table 4 Mechanical properties of the components of FRP deck [33, 34]

سرعت بحرانی مؤثر را تعیین نمود. سرعت بحرانی مؤثر برای پلهای دو عنصری فولادی-بتنی و فولادی-FRP مطابق جدول (۶) آورده شده است. با توجه به سختی‌های خمشی یکسان برای عرشه‌های دو عنصری، عامل تأثیرگذار بر سرعت بحرانی مؤثر در نتایج حاضر، جرم واحد طول المان‌ها است. با توجه به نتایج پیش رو با کاهش جرم واحد طول عرشه سرعت بحرانی مؤثر به‌طور قابل‌توجهی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با کاهش جرم واحد طول عرشه، پاسخ‌های دینامیکی بیشینه در عرشه به سمت سرعت‌های بیشتر منتقل می‌شوند. همچنین نسبت پاسخ دینامیکی به پاسخ استاتیکی (DAF) نیز افزایش می‌یابد.

با توجه به سختی خمشی و جرم واحد طول بدست آمده بر اساس طراحی عرشه‌های فولادی-بتنی و فولادی-FRP پاسخ‌های عرشه‌های مختلف تحت عبور جرم متحرک با جرم‌های ۱۰ تا ۴۰ تن با سرعت‌های ۱۰ تا ۲۵۰ کیلومتر بر ساعت محاسبه شد. نتایج مقایسه‌ای بیشترین تغییر مکان وسط عرشه فولادی-بتنی و عرشه فولادی-FRP4 برای سرعت‌های مختلف حرکت جرم متحرک در شکل (۷) آورده شده است.

جدول ۵. چینش لایه، جرم واحد طول و سختی خمشی عرشه‌ها

Deck type	FRP layers in flanges	Fibers Orientation	$m$ (kg/m)	$EI_{xx}$ (MN.m <sup>2</sup> )
Concrete	-	-	3437.4	5.8915
FRP1	Glass-Epoxy	0°, 90°	2033.8	5.8786
FRP2	Graphite-Epoxy	0°, 90°	1986.3	6.0226
FRP3	Glass-Epoxy	0°, 90°	1776.8	4.9131
FRP4	Graphite-Epoxy	0°, 90°	1729.5	6.0691

Table 5. layup, mass per length and bending stiffness of decks

## ۲-۴ بررسی سرعت بحرانی مؤثر و ضریب تشدید دینامیکی

سرعت بحرانی مؤثر (CIS)، برابر سرعتی از جرم متحرک است که در آن سرعت، تیر بیشترین تغییر مکان وسط دهانه خود را تجربه می‌کند. اهمیت این پارامتر توسط نیکخو و همکاران [8] و دهستانی و همکاران [23] مورد توجه قرار گرفت. از آنجایی که بررسی‌های صورت گرفته در این پژوهش نشانگر این امر هستند که برای عرشه‌های مورد مطالعه، سرعت بحرانی مؤثر در فاز ارتعاش اجباری قرار می‌گیرد از این رو فقط پاسخ‌ها در فاز ارتعاش اجباری ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که نقاط مختلف تیر می‌توانند مقادیر CIS متفاوتی داشته باشند [23]. با توجه به معادلات کلی، با بررسی تغییرات تغییر مکان  $y(x, t)$  نسبت به تغییرات سرعت جرم متحرک، می‌توان مقادیر

جدول ۶. سرعت بحرانی مؤثر و ضریب تشدید دینامیکی در پلهای فولادی-بتنی و فولادی-FRP4

Bridge type	M (ton)	CIS (km/h)	Maximum static deflection	Maximum dynamic deflection	DAF	Bridge type	CIS (km/h)	Maximum static deflection	Maximum dynamic deflection	DAF
Steel-Concrete	10	455	2.725	5.000	1.834	Steel-FRP4	625	2.645	5.322	2.012
	20	440	5.450	10.653	1.954		605	5.291	11.945	2.258
	30	435	8.175	16.642	2.072		590	7.936	19.844	2.501
	40	430	10.90	23.923	2.194		585	10.582	28.460	2.689
	50	425	13.625	31.587	2.322		580	13.227	37.379	2.826

Table 6. CIS and DAF of steel-concrete and steel-FRP4 bridges

شکل ۷. مقایسه ضرایب تشدید دینامیکی پاسخ وسط دهانه تحت عبور جرمهای مختلف برای عرشه‌های فولادی - بتنی و فولادی - FRP4

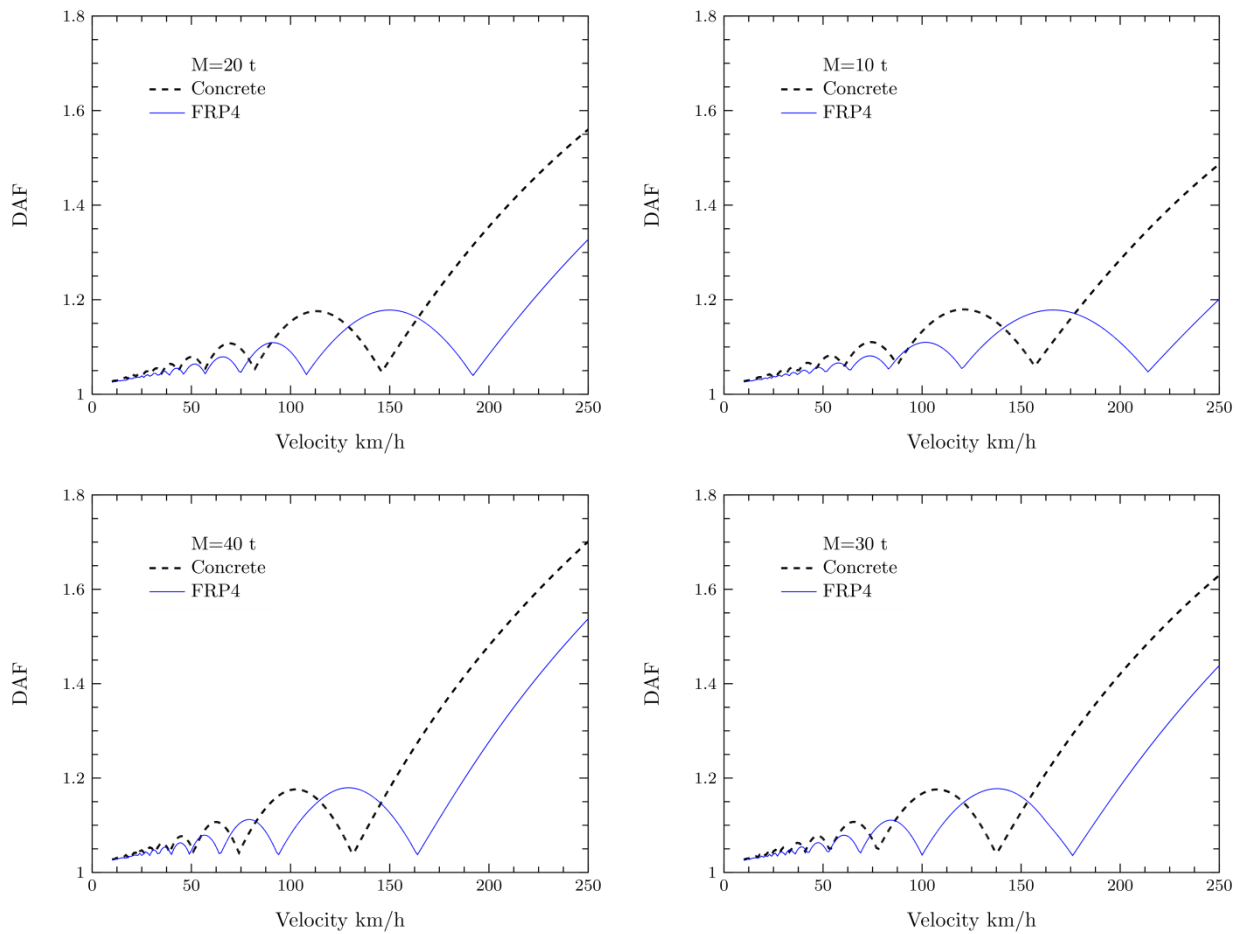


Fig. 7. Comparison of DAFs of steel-concrete and steel-FRP decks at the middle of span for different moving masses

شکل ۸. ضرایب تشدید دینامیکی

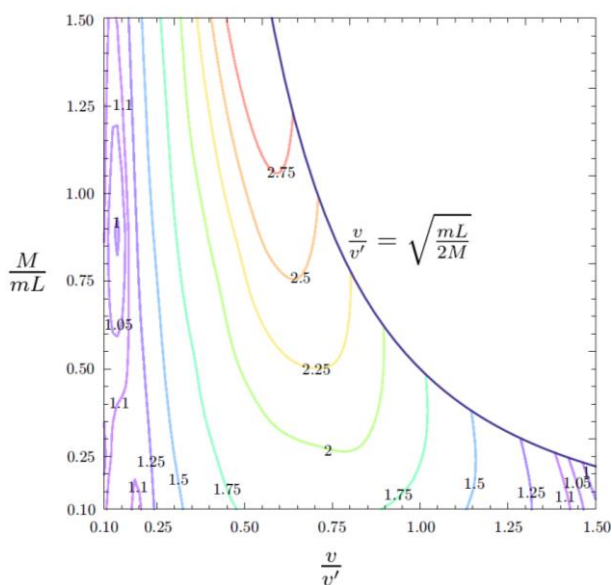


Fig. 8. DAF factors

با توجه به نتایج حاصل از مقایسه پل‌های فولادی-بتنی با پل‌های فولادی-FRP می‌توان نتیجه‌گیری کرد که میزان وزن عرشه تاثیر قابل ملاحظه‌ای در رفتار پل در برابر جرم متحرک دارد. از این رو در ادامه مطالعه پارامتریک میزان تاثیر دو پارامتر سرعت بی بعد  $v/v'$  [8]  $(v' = 2L/T_p)$  طول تیر و  $T_p$  تناوب اصلی نوسان تیر) و جرم بی بعد  $M/mL$  در شکل (۸) آورده شده است. با توجه به شکل مشخص می‌شود که با کاهش جرم عرشه به ازای یک جرم عبوری مشخص، سرعت بی بعد کاهش یافته و جرم بی بعد افزایش می‌یابد که تغییرات این دو پارامتر متقابلاً منجر به کاهش حداکثر پاسخ دینامیکی سیستم خواهد شد. همچنین محدوده رفتار پایدار دینامیکی سیستم [8] در شکل مشخص شده است.

## ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱- با کاهش جرم واحد طول عرشه، اینرسی وارد شده به عرشه که ناشی از ضربه جرم متحرک می‌باشد، کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر با کاهش جرم واحد طول عرشه پاسخ‌های دینامیکی عرشه تحت عبور جرم متحرک کاهش می‌یابند.

۲- در طراحی عرشه‌های فولادی - بتنی و فولادی - FRP موجود در این پژوهش، مطابق آیین‌نامه آشتو از ضریب ضربه  $1/33$  و روابط و ضرایب یکسان برای کنترل خستگی استفاده شد. اما با توجه به نتایج بدست آمده در این پژوهش، ضریب ضربه آیین‌نامه آشتو برای عرشه‌های فولادی - FRP محافظه‌کارانه است. همچنین کاهش پاسخ‌های دینامیکی در عرشه‌های FRP سبب می‌شود تا تنش‌های کمتری در طول زمان به عرشه وارد گردد که این امر می‌تواند مقاومت عرشه‌های FRP را در برابر بارهای خستگی افزایش دهد.

۳- با کاهش جرم واحد طول عرشه مشاهده می‌شود که بیشینه پاسخ‌های دینامیکی به سمت سرعت‌های بیشتر انتقال پیدا می‌کنند. این امر به علت تفاوت فرکانس‌های طبیعی ارتعاش و بحث تشدید با توجه به کاهش جرم واحد طول قابل تفسیر است. از آنجاکه تأثیر سرعت عبور وسیله نقلیه بر پاسخ‌های دینامیکی، مسئله‌ای اثبات شده است و به‌عنوان ضریب ضربه در آیین‌نامه‌های طراحی پل نیز بکار می‌رود. بنابراین می‌توان اینگونه نتیجه‌گیری کرد که با استفاده از عرشه‌های FRP به‌جای عرشه‌های مرسوم فولادی و بتنی، پاسخ‌های دینامیکی موردنظر آیین‌نامه در سرعت‌های بالاتری اتفاق می‌افتد.

۴- با توجه به نتایج بدست آمده، تفاوت در پاسخ‌های دینامیکی در اثر عبور کامیون استاندارد برای سرعت‌های بالاتر از ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت، قابل‌ملاحظه هستند و از این رو عرشه‌های FRP برای استفاده‌های خاص از جمله قطارهای سریع‌السیر و مسیرهای بدون محدودیت سرعت مناسب هستند و استفاده از این نوع عرشه‌ها باعث کاهش قابل ملاحظه پاسخ‌های دینامیکی خواهد شد.

## References

## ۶- مراجع

- J. Helmicki, "Performance comparison of four fiber-reinforced polymer deck panels," *Composites for Construction*, vol. 8, no. 3, pp. 265-274, 2004.
- [3] P. Alagusundaramoorthy, I. Harik and C. Choo, "Structural behavior of FRP composite bridge deck panels. *Journal of Bridge Engineering*, 11(4), pp.384-393," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 384-393, 2006.
- [4] L. S. Sutherland, M. F. Sá, J. R. Correia, C. G. Soares, A. Gomes and N. Silvestre, "Quasi-static indentation response of pedestrian bridge multicellular pultruded GFRP deck panels," *Construction and Building Materials*, vol. 118, pp. 307-318, 2016.
- [5] M. M. Stanišić and J. C. Hardin, "On the response of beams to an arbitrary number of concentrated moving masses. 287(2), pp.115-123," *Journal of the franklin institute*, vol. 287, no. 2, pp. 115-125, 1969.
- [6] J. E. Akin and M. Mofid, "Numerical solution for response of beams with moving mass," *Journal of Structural Engineering*, vol. 115, no. 1, pp. 120-131, 1989.
- [7] Y. B. Yang, J. D. Yau and L. C. Hsu, "Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds," *Engineering structures*, vol. 19, no. 11, pp. 936-944, 1997.
- [8] A. Nikkhou, F. R. Rofooei and M. R. Shadnam, "Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, no. 3, pp. 712-724, 2007.
- [9] M. H. Kargarnovin and M. T. J.-T. R. A. Ahmadian, " Dynamics of a delaminated Timoshenko beam subjected to a moving oscillatory mass," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 40, no. 2, pp. 218-240, 2012.
- [10] A. Ghannadiasl and M. Mofid, "Dynamic Green function for response of Timoshenko beam with arbitrary boundary conditions," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 42, no. 1, pp. 97-110, 2014.
- [11] S. E. Azam, M. Mofid and R. A. Khoraskani, "Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass.," *Scientia Iranica*, vol. 20, no. 1, pp. 50-56, 2013.
- [12] D. Roshandel, M. Mofid and A. Ghannadiasl, "Modal analysis of the dynamic response of Timoshenko beam under moving mass," *Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering*, vol. 22, no. 2, pp. 331-344, 2015.
- [13] M. Mofid, A. Tehrani and A. Ostadhossein, "On the viscoelastic beam subjected to moving mass," *Advances in Engineering Software*, vol. 41, no. 2, pp. 240-247, 2010.
- [14] H. Bulut and O. Kelesoglu, "Comparing numerical methods for response of beams with moving mass," *Advances in Engineering Software*, vol. 41, no. 7, pp. 976-980, 2010.
- [15] M. R. Shadnam, M. Mofid and J. E. Akin, "On the dynamic response of rectangular plate, with moving mass," *Thin-walled structures*, vol. 39, no. 9, pp. 797-806, 2001.
- [16] S. Saigal, O. P. Agrawal and M. M. Stanišić, "Influence of moving masses on rectangular plate dynamics," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 57, no. 3, pp. 187-196, 1987.
- [17] W. D. Iwan and K. J. Stahl, "The response of an elastic disk with a moving mass system," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 40, no. 2, pp. 445-451, 1973.
- [18] A. Cifuentes and S. Lalapet, "A general method to determine the dynamic response of a plate to a moving mass," *Computers and Structures*, vol. 42, no. 1, pp. 31-36, 1992.
- [19] Z. Hashin and B. W. Rosen, "The elastic moduli of fiber-reinforced materials," *Journal of applied mechanics*, vol. 31, no. 2, pp. 223-232, 1964.
- [20] R. F. Gibson and R. Plunkett, "Dynamic mechanical behavior of fiber-reinforced composites: Measurement and analysis," *Journal of Composite Materials*, vol. 10, no. 4, pp. 325-341, 1976.
- [21] C. T. Sun and Y. P. Lu, *Vibration damping of structural elements*, New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [22] C. V. Nori, P. R. Mantena and T. A. McCarty, " Experimental and finite element analysis of pultruded glass-graphite/epoxy hybrids in axial and flexural modes of vibration," *Journal of composite*
- [1] Y. Zhang, C. Cai, X. Shi and C. Wang, "Vehicle-induced dynamic performance of FRP versus concrete slab bridge," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 410-419, 2006.
- [2] R. M. Reiner, B. M. Shahrooz, V. J. Hunt, A. R. Neumann and A.

- [29] G. Boscato and S. Russo, "Free vibrations of pultruded FRP elements: Mechanical characterization, analysis, and applications," *Journal of Composites for Construction*, vol. 13, no. 6, pp. 565-574, 2009.
- [30] E. J. Barbero, R. Lopez-Anido and J. F. Davalos, "On the mechanics of thin-walled laminated composite beams," *Journal of Composite Materials*, vol. 27, no. 8, pp. 806-829, 1993.
- [31] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, Washington, DC: Scripta Book Company, .1975.
- [32] LRFD Bridge design specifications, Washington, DC: American Association of State Highway and Transportation Officials, 2012.
- [33] J. F. Davalos, A. Chen and P. Qiao, *FRP deck and steel girder bridge systems: analysis and design*, Boca Raton, FL: CRC Press, 2013.
- [34] A. Kaw, *Mechanics of composite materials*. CRC press., Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
- [35] LRFD Bridge design specifications., Washington, DC: American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), 2012.
- materials*, vol. 30, no. 18, pp. 1996-2018, 1996.
- [23] M. Dehestani, M. Mofid and A. Vafai, "Investigation of critical influential speed for moving mass problems on beams," *Applied mathematical modelling*, vol. 33, no. 10, pp. 3885-3895, 2009.
- [24] E. Ghafoori and M. Asghari, "Dynamic analysis of laminated composite plates traversed by a moving mass based on a first-order theory," *Composite Structures*, vol. 92, no. 8, pp. 1865-1876, 2010.
- [25] İ. Esen, "Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 16, no. 1, pp. 171-182, 2011.
- [26] A. Nikkhoo, A. Farazandeh and M. E. Hassanabadi, "On the computation of moving mass/beam interaction utilizing a semi-analytical method," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 38, no. 3, pp. 761-771, 2016 .
- [27] S. Živanović, A. Pavic and P. Reynolds, "Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review.," *Journal of sound and vibration*, vol. 279, no. 1, pp. 1-74, 2005.
- [28] C. Bilello, L. A. Bergman and D. Kuchma, "Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass," *Journal of Structural Engineering*, vol. 130, no. 5, pp. 799-804, 2004.

# Analytical study of steel-FRP bridges vibration subjected to moving mass

Hamed Jafari<sup>1</sup>, Hamed Khezzadeh<sup>2\*</sup>

1,2\*. Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

khezzadeh@modares.ac.ir

## Abstract

Given the key importance of the bridges in transportation system lifelines and due to their high initial cost, there is a constant need for the study and monitoring of such structures. The FRP composites, due to their special characteristics including high specific modulus, high specific strength, corrosion resistance, low mass density, and modular construction, can be a good alternative for common bridge deck systems. Too much effort is devoted to implement FRP materials as a whole or in part in bridge construction. There have been several different methods of using FRP materials in bridges, including FRP stay-in-place forms for concrete decks and whole FRP bridge decks.

Bridges constantly bear moving mass loads while due to technological progress the moving speeds are approaching higher and higher thresholds, so in this study, effects of moving mass on the dynamic response of steel-FRP and steel-concrete bridges are studied and compared. The deck and moving mass inertia substantially affect the dynamic response of the bridge system.

To compare the effect of moving mass on both bridge types, at first, the multi layered beam method (MLB) for determining the FRP beam characteristics is reviewed and its applicability on determining the mechanical properties of laminated beams is investigated through comparison of this method results with numerical and experimental data. It is shown that by using the MLB method very good estimates of the mechanical properties of FRP composite can be achieved.

Consequently, the problem of moving mass and its governing differential equations is reviewed and the numerical procedure for solving the set of governing PDEs of the moving mass problem is verified against experimental data. Comparing the theoretical results with the experimental data reveals that the presented methodology correctly estimates the dynamic response of beams subjected to moving masses.

After setting up the theoretical framework for the moving mass problem on steel-FRP bridges, the effect of moving mass loading on the dynamic response of steel-FRP and steel-concrete bridge systems is investigated. The results indicate that the mass per length and the stiffness of the deck significantly affect the response of the bridge subjected to moving mass. These effects are captured through two different main parameters which characterize the dynamic behavior of beams subjected to moving masses. The first parameter is the Critical Influential Speed (CIS) at which the maximum deflection of deck at certain location happens. The calculated CIS through the aforementioned methodology indicate that the CIS for steel-FRP system is significantly higher than steel-concrete system.

The second important parameter which is determined is the Dynamic Amplification Factor (DAF) which is defined as the ratio of maximum dynamics deflection at the midspan of the beam to its static value. The corresponding results of the DAF indicate that the steel-FRP bridges are less influenced by the moving masses than steel-concrete bridges of the same stiffness. It is shown that the values of DAF are lower in the case of steel-FRP bridge. It can be concluded that this will result in lower vibration amplitudes, which will contribute to higher fatigue life of the bridge system. Regarding these results, this system can be advised in the cases of high and ordinary speed transportation.

**Keywords:** FRP composites, Bridge deck, Moving mass, Critical Influential Speed (CIS), Dynamic Amplification Factor (DAF)