

توسعه مفهوم کوتاه‌ترین درخت گسترش و کاربرد آن در تحلیل شبکه‌های حمل و نقل

امیررضا ممدوحی^{۱*}، علیرضا ماهپور^۲، محمد یوسفی‌کیا^۳

۱- استادیار، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران، گرایش برنامه‌ریزی حمل و نقل، دانشگاه تربیت مدرس

۳- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران، گرایش برنامه‌ریزی حمل و نقل، دانشگاه تربیت مدرس

armamdoohi@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۰۷/۲۸

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۰۲/۲۶

چکیده- از جمله مسایل مهم جریان در شبکه، برای تحلیل ساختار و عملکرد آن، مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش است. بررسی پیوستگی شبکه و اولویت‌بندی کمان‌های شبکه از جمله کاربردهای این مسئله است. معیار محاسبه و تعیین کوتاه‌ترین درخت گسترش مفهوم هزینه کمان است که تا به حال در اکثر مطالعات مربوطه از مفهوم زمان سفر آزاد استفاده شده است. در مقاله جاری، این مفهوم به حالت عام زمان سفر تحت بار تقاضا و محدودیت ظرفیت توسعه یافته و کاربرد آن در تحلیل شبکه‌های حمل و نقل بررسی می‌شود. با توجه به ضرورت تعریف و بررسی اثر هزینه‌ای که در شرایط مختلف بتواند هزینه کل واقعی را نشان دهد، در این مقاله، هزینه کمان، برای محاسبه کوتاه‌ترین درخت گسترش، زمان سفر کمان تحت بار جریان در شبکه تعریف شده و مسئله برای مطالعه موردی راه‌های شریانی استان تهران فرمول‌بندی و حل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که با تعریف هزینه به صورت زمان سفر تعادلی کمان و حل مجدد مسئله هزینه کل شبکه از ۲۵۹۷۳ به ۲۸۰۸۱ ثانیه (۸ درصد) افزایش و کمان‌های تشکیل‌دهنده نیز حدود ۳۰ درصد تغییر می‌کنند. در صورت استفاده از کوتاه‌ترین درخت گسترش اولیه (بدون بار) برای مسئله تحت بار تقاضا، هزینه شبکه برابر ۳۰۲۳۲ ثانیه می‌شود که معادل ۱۷ درصد افزایش در هزینه و ۹ درصد خطاست.

واژگان کلیدی: تحلیل شبکه، کوتاه‌ترین درخت گسترش، هزینه، زمان سفر، راه‌های شریانی استان تهران.

۱- مقدمه

گسترش به عنوان زیرمسئله‌ای از دسته مسائل کوتاه‌ترین مسیر مطرح است که کاربردهای زیادی در زمینه‌ی طراحی شبکه‌های ارتباطی [۱] و کامپیوتری [۲]، شبکه‌های تلفنی، ارتباطات کابلی، شبکه جریان سیالات در لوله‌ها و نیز در شبکه‌های حمل و نقل دارد [۳]. از کاربردهای این مسئله در شبکه‌های حمل و نقل، اولویت‌بندی کمان‌ها در شبکه

یکی از مسائل مهم در تحلیل شبکه‌های حمل و نقل، مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش^۱ است، که هدف آن یافتن درختی است با حداقل هزینه^۲. مسئله کوتاه‌ترین درخت

1- Minimum spanning tree

2- Cost

تحت بار تقاضا^۳ توسعه دهد. برای این منظور ابتدا، کوتاه‌ترین درخت گسترش برای شبکه قبل از بارگذاری (بر اساس زمان سفر آزاد) محاسبه می‌شود. سپس به توسعه این مفهوم و تحلیل تغییرات به وجود آمده در پاسخ مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش، در محدوده شبکه راه‌های شریانی استان تهران، در اثر بارگذاری تقاضای مسافری بر شبکه حمل و نقل کل کشور پرداخته خواهد شد. برای سنجش میزان تاثیر تقاضا بر روی کوتاه‌ترین درخت گسترش، ماتریس تقاضای مبدا-مقصد به روش تعادل استفاده‌کننده با تقاضای ثابت به شبکه تخصیص داده می‌شود. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش بعد به روش‌شناسی پژوهش و در بخش سوم به داده‌های مسئله، از جمله ویژگی‌های شبکه راه‌های شریانی کشور، تقاضای مبدا-مقصد بین نواحی حمل و نقلی و محدوده مورد مطالعه پرداخته می‌شود. بخش چهارم به ارائه نتایج و تحلیل آن‌ها و بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات می‌پردازد.

۲- روش‌شناسی

مسائل جریان در شبکه برای مدل‌سازی و فرمول‌بندی مسئله‌های مختلف مطرح در شبکه‌ها تدوین شده‌اند که با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی ریاضی قابل حل‌اند. از جمله مصادیق شبکه‌ها، شبکه‌های درون‌شهری و برون‌شهری‌اند که مسائل زیادی در مورد آن‌ها مطرح شده‌اند. یکی از مسائل مهم در تحلیل شبکه‌های حمل و نقل، مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش است که هدف آن پیدا کردن درختی با حداقل هزینه دسترسی کل است. مفهوم هزینه در مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش از حساسیت ویژه‌ای برخوردار است، ولی عمدتاً تنها تابعی از مشخصات عرضه

است و کمان‌هایی که در کوتاه‌ترین درخت گسترش قرار می‌گیرند نسبت به کمان‌های دیگر در اولویت‌اند. شبکه حمل و نقل جاده‌ای دارای نقش حیاتی به خصوص پس از وقوع حوادث و بلایاست و برنامه‌ریزی عملکرد بهینه این شبکه شریانی‌های حیاتی می‌تواند باعث کاهش خسارات مستقیم و غیرمستقیم شود. به عنوان نمونه، می‌توان به تحلیل پایداری و همچنین پایدارسازی شبکه شریانی و بررسی پاسخ‌گویی شبکه در زمان وقوع بحران یا کاهش زمان برای کمک‌رسانی به مصدومین و یافتن بهترین مکان برای ایستگاه‌های آتش‌نشانی اشاره کرد. علی‌رغم رشد مفهوم کوتاه‌ترین درخت گسترش و حتی بررسی دینامیک آن در برخی علوم، این مسئله در عرصه حمل و نقل توسعه چندانی نداشته و فقط در تحلیل پیوستگی شبکه استفاده شده است [۵].

هزینه در این مسئله عمدتاً تنها تابعی از مشخصات عرضه^۱ (شبکه حمل و نقل) مثل زمان سفر آزاد یا طول کمان و فارغ از میزان حجم ترافیک فرض می‌شود [۴]. این شرایط حالت ساده و ایده‌آل بوده که تاثیر حجم بر زمان سفر کمان‌ها را در نظر نمی‌گیرد. در واقعیت عملکرد شبکه حاصل تعامل و برهم‌کنش عرضه و تقاضاست^۲ و بیان هزینه به صورت تابعی صرف از مشخصات عرضه، گرچه باعث تسهیل و کاهش در میزان محاسبات می‌شود، ولی از حساسیت مسئله به تقاضا چشم‌پوشی کرده و باعث ساده‌سازی زیاد مسئله می‌شود. با تعریف هزینه به صورت زمان سفر واقعی در شبکه به جای زمان سفر آزاد، می‌توان برآورد دقیق‌تر و واقعی‌تری از کوتاه‌ترین درخت گسترش داشت. این مقاله تلاش دارد که مفهوم و کاربرد مسئله کلاسیک کوتاه‌ترین درخت گسترش را به شبکه‌های حمل و نقلی

1- Supply

2- Demand

3- Loaded network

$$\text{st: } \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \quad (2)$$

$$\sum_{e \in A(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \quad (3)$$

$$x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E$$

رابطه ۱ تابع هدف برنامه ریاضی است که هدف آن کمینه کردن هزینه کل شبکه است. رابطه ۲ شرط عدم وجود حلقه و رابطه ۳ نیز شرط عدم وجود زیرحلقه را تضمین می کند [۷].

فرمول بندی دیگر برای محاسبه طول کوتاه ترین درخت گسترش توسط فیل و استیله ارائه شده است [۸] که برای گراف مفروض $G = (V, E)$ با مجموعه گره های $V(G)$ و مجموعه کمان های $E(G)$ ، اگر $T(G)$ مجموعه درخت های ممکن در G و ξ_e طول کمان e باشد، در آن صورت طول کوتاه ترین درخت " $L_{MST}(G)$ " برابر خواهد بود با:

$$L_{MST}(G) = \min_{T \in T(G)} \sum_{e \in E} \xi_e \cdot \mathbb{1}(e \in T) \quad (4)$$

۲-۲- مسئله تخصیص تعادلی با تقاضای ثابت^۱

چگونگی ارتباط بین تقاضاهای مبدأ-مقصد از یک طرف و جریان در کمان از طرف دیگر، برای یک شبکه حمل و نقل مشخص، از مسائل تخصیص ترافیک است که به روش های متنوعی برای فرض های مختلف قابل انجام است. در برنامه ریزی حمل و نقل، برآورد جریان در کمان ها و مسیرهای شبکه مورد مطالعه (از خروجی های فرآیند تخصیص ترافیک) [۹] معمولاً مبتنی بر اصل اول واردروپ و مفهوم جریان تعادلی است. روش های مختلف تخصیص ترافیک بر پایه فرض های متفاوت مبتنی اند که اهم آن ها فرض رفتاری است. در فرض رفتاری که منجر به تخصیص تعادلی می شود، هر مسافر به نحوی رفتار می کند که زمان

یا همان شبکه ی حمل و نقل فرض می شود؛ مثل زمان سفر آزاد یا طول کمان. در این پژوهش، مفهوم هزینه کمان به حالت عام زمان سفر تحت بار تقاضا و محدودیت ظرفیت توسعه یافته و از این هزینه کمان برای محاسبه کوتاه ترین درخت گسترش استفاده می شود. با در نظر گرفتن اهمیت نقش هزینه و محدود بودن آن به طول کمان در اکثر مطالعات، توسعه مفهوم هزینه و لحاظ کردن تاثیر تقاضای حمل و نقل، مسئله مربوطه فرمول بندی و برای شبکه ی راه های شریانی کشور حل شده و تحلیل حساسیت برای نتایج آن انجام می شود. تخصیص تعادلی ماتریس تقاضای مبدأ-مقصد و محاسبه زمان سفر تعادلی کمان ها در سطح شبکه شریانی راه های کشور، به کمک بسته نرم افزاری VISUM و کوتاه ترین درخت گسترش در محدوده راه های شریانی استان تهران با بسته ی نرم افزاری WinQSB مدل سازی و حل می شود.

۲-۱- مسئله کوتاه ترین درخت گسترش (MST)

فرمول بندی های متفاوتی برای کوتاه ترین درخت گسترش ارائه شده است. یک فرمول بندی برای گراف $G = (V, E)$ که در آن $V(G)$ مجموعه گره ها، $E(G)$ مجموعه کمان ها، $T(G)$ مجموعه ی درخت های ممکن در G و w_e وزن (هزینه) کمان e بوده به صورت زیر است. در این برنامه عدد صحیح، x_e متغیر تصمیم و به صورت صفر یا یک (اگر کمان e در کوتاه ترین درخت گسترش قرار داشت یک و در غیر این صورت صفر) است. $A(S)$ هم مجموعه کمان های زیر گراف $G = (N, A)$ است که توسط مجموعه گره های S به وجود آمده است و n نیز تعداد گره های درخت T است.

$$\min_{e \in E} \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e \quad (1)$$

قرار دارد) هستند.

۳- داده‌های مسئله، نمونه موردی استان تهران

برای بررسی اثر توسعه مفهوم کوتاه‌ترین درخت گسترش به شرایط تحت بار و مقایسه آن با شرایط بدون بار، ماتریس تقاضای سال ۱۳۸۵ به شبکه راه‌های شریانی کشور به روش تعادلی تخصیص داده شده است و زمان سفر کمان‌های محدوده مورد مطالعه (راه‌های شریانی استان تهران) برای محاسبه کوتاه‌ترین درخت گسترش استخراج و با کوتاه‌ترین درخت گسترش بدون بار مقایسه می‌شود. اطلاعات شبکه‌ی راه‌های کشور، ماتریس تقاضای مبدا-مقصد و محدوده مورد مطالعه اطلاعات ورودی مسئله‌اند. برای به دست آوردن زمان سفر در کمان‌های محدوده مورد مطالعه، ماتریس تقاضای سال ۱۳۸۵ به شبکه راه‌های شریانی کشور تخصیص داده می‌شود. از بین دسته‌بندی‌های مختلف شبکه راه‌های کشور، مهم‌ترین شبکه بر اساس نوع عملکرد (حجم ترافیک، احتمال وجود ترافیک ترانزیت، ارتباط بین مراکز مسکونی و تولیدی عمده و طرح‌های آینده در زمینه توسعه) شبکه راه‌های شریانی ایران با مشخصات جدول ۱ است [۶]. شکل ۱ نقشه راه‌های شریانی کشور را (با ۸۵۴ گره و ۱۱۴۷ کمان به طول ۳۴۷۹۵ km) به همراه ناحیه‌بندی ۵۶ گانه کشور نشان می‌دهد.

جدول (۱) برخی مشخصات شبکه حمل و نقلی و راه‌های شریانی ایران

ردیف	ویژگی	مقدار
۱	گره‌ها	۸۵۴
۲	کمان‌ها	۱۱۴۷
۳	طول کل راه‌ها	۳۴۷۹۵ کیلومتر
۴	نواحی حمل و نقلی	۵۶ ناحیه

سفر خود را کمینه کند. در نتیجه زمان سفر در مسیرهای استفاده‌شده با هم مساوی بوده و کمتر از زمان سفر در مسیرهای استفاده‌نشده بین هر زوج مبدا-مقصد است [۱۰]. بدین معنی که در یک سیستم حمل و نقل با عرضه و تقاضای ثابت، در اثر رفتار استفاده‌کنندگان، یک جریان تعادلی به وجود می‌آید. در شبکه متراکم، ترافیک خود را طوری تنظیم می‌کند که هیچ مسافری به صورت یک‌جانبه با تغییر مسیر خود قادر به بهبود زمان سفر نباشد [۱۱]. این مسئله را بکمن^۱ در سال ۱۹۵۴ به شکل یک برنامه ریاضی کمینه‌سازی تبدیل کرد [۱۲] که جواب آن همان جریان و زمان سفر تعادلی است. اگر $t_a(\omega)$ تابع عملکرد کمان a ، f_k^{rs} مقدار جریان در k امین مسیر بین مبدا r و مقصد s ، q^{rs} میزان سفر بین مبدا r و مقصد s ، x_a حجم جریان در کمان a و $\delta_{a,k}^{rs}$ متغیر صفر و یک (اگر کمان a در k امین مسیر بین مبدا r و مقصد s باشد یک و در غیر این صورت صفر) باشند، مدل ریاضی تخصیص تعادلی (مسئله بکمن) به صورت زیر است:

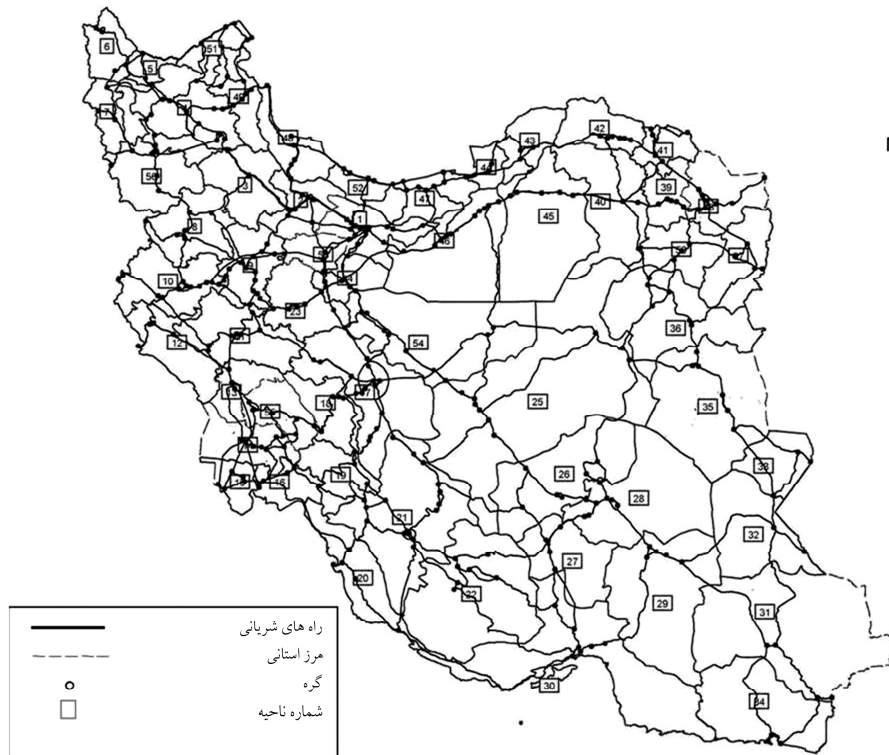
$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \quad (5)$$

$$st: \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \forall r, s \quad (6)$$

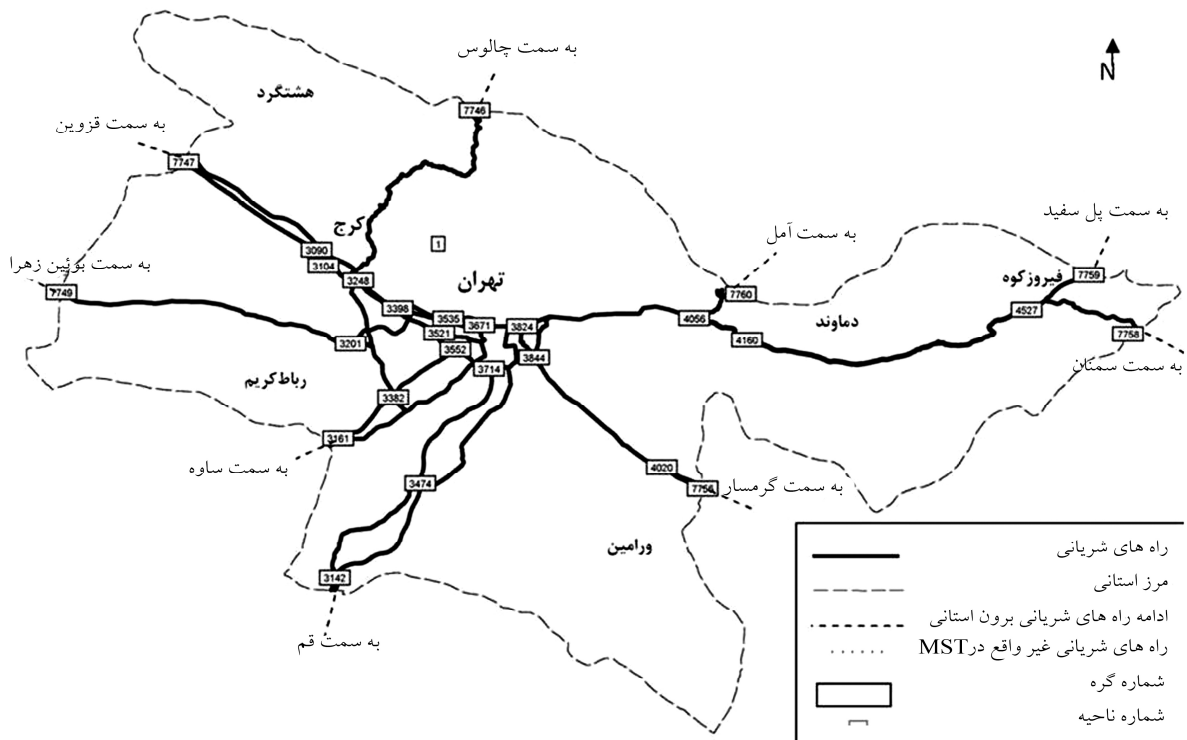
$$f_k^{rs} \geq 0 \forall k, r, s \quad (7)$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad (8)$$

رابطه (۵) تابع هدف کمینه‌سازی مساحت زیر نمودار تابع عملکرد کمان‌ها، رابطه (۶) اصل بقای جریان در شبکه، رابطه (۷) شرط نامنفی بودن جریان در مسیر k امین بین مبدا r و مقصد s و رابطه (۸) رابطه کمکی (جریان در کمان a ، x_a برابر مجموع جریان مسیرهایی است که کمان a در آن‌ها



شکل (۱) شبکه راه‌های شریانی ایران و ناحیه‌بندی کشور



شکل (۲) محدوده مورد مطالعه و راه‌های شریانی استان تهران

آزاد آن کمان و مستقل از میزان تقاضاست). تعداد کمان-های این درخت برابر ۵۴ کمان، با مجموع طولی برابر ۷۱۸ کیلومتر و زمان سفر آزاد کل شبکه برابر ۲۵۹۳۷ ثانیه است.

جدول (۲) مشخصات شبکه حمل و نقلی و راه‌های شریانی استان تهران

ردیف	ویژگی	مقدار
۱	گره‌ها	۵۶
۲	کمان‌ها	۷۵
۳	طول کل راه‌ها	۱۰۲۲/۱۱ کیلومتر
۴	ناحیه حمل و نقلی	۱

شکل ۴ خروجی مسئله با تقاضای سال ۱۳۸۵ یعنی کوتاه‌ترین درخت گسترش را بعد از تخصیص تقاضای مسافری کل کشور در محدوده راه‌های شریانی استان تهران نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، تقاضای مبدأ-مقصد کشور به شبکه جاده‌ای تخصیص داده شده و خروجی‌های آن برای تنها استان تهران ارائه شده است. این امر باعث واقعی شدن نتایج جریان تعادلی در راه‌های شریانی است. زمان سفر مورد استفاده برای محاسبه کوتاه‌ترین درخت گسترش در این حالت برابر با زمان ناشی از تخصیص تقاضای کل کشور به صورت تعادل استفاده‌کننده به شبکه کل کشور و ارائه نتایج آن برای محدوده مورد مطالعه است. بدین ترتیب، درخت این مرحله، علاوه بر مشخصات شبکه، تابعی از میزان تقاضای مسافری و باری همسنگ خواهد بود. فرآیند تخصیص تعادلی بر روی شبکه شریانی راه‌های کشور توسط بسته نرم‌افزاری VISUM انجام شد و از نتایج تخصیص تعادلی برای محاسبه کوتاه‌ترین درخت گسترش استفاده شد. تعداد کمان‌های درخت گسترش بعد از بارگذاری برابر ۵۱ بوده که در ۳۸ کمان با درخت قبلی مشترک است. طول کمان‌ها در کل درخت جدید برابر ۷۰۱ کیلومتر بوده و زمان سفر در شبکه به میزان ۲۱۴۴ ثانیه، نسبت به حالت قبل از بارگذاری، افزایش یافته و به ۲۸۰۸۱ ثانیه می‌رسد.

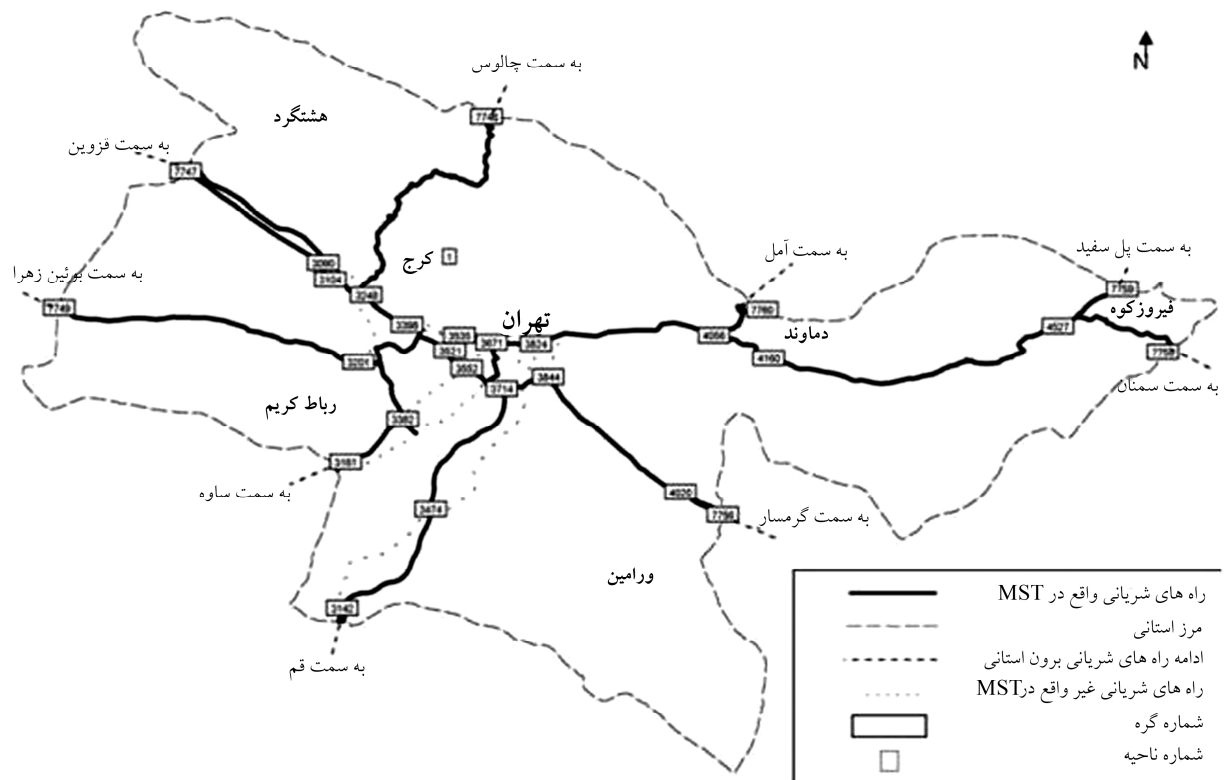
ماتریس تقاضای مبدأ-مقصد کشور برای سال ۱۳۸۵ در قالب ناحیه‌بندی ۵۶ گانه به شبکه‌ای با ۴ شیوه مختلف ۱- مسافری، ۲- هوایی، ۳- قطار و ۴- اتوبوس و باری تخصیص داده می‌شود. در این پژوهش از ماتریس تقاضای سال ۱۳۸۵ استفاده شده است [۶].

محدوده مورد مطالعه در این پژوهش استان تهران با شبکه راه‌های شریانی مشتمل بر ۵۶ گره و ۷۵ کمان مجموعاً به طول ۱۰۲۲/۱۱ کیلومتر بوده که ۳/۴ درصد از کل راه‌های شریانی کشور را تشکیل می‌دهد. جدول ۲ مشخصات محدوده‌ی مورد مطالعه و شکل ۲ محدوده مورد مطالعه و راه‌های شریانی استان تهران را نشان می‌دهند.

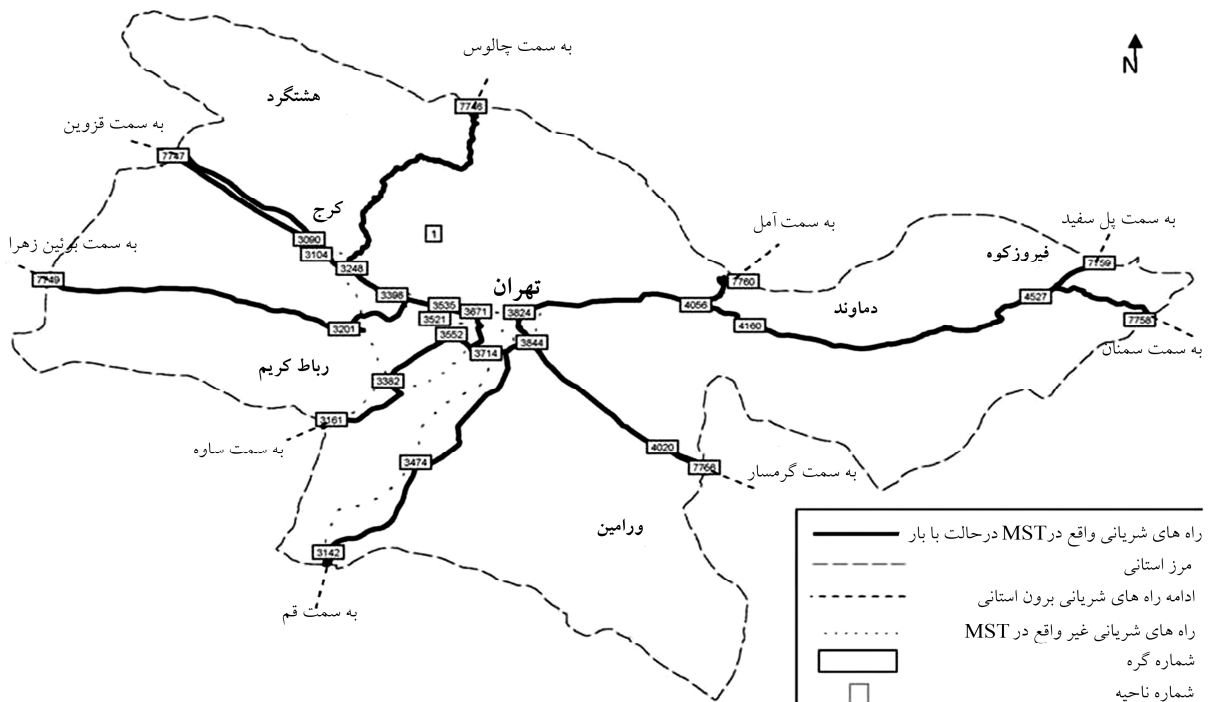
۴- نتایج مدل کوتاه‌ترین درخت گسترش برای راه‌های شریانی استان تهران

در این مقاله، مفهوم هزینه در مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش به حالت زمان سفر تحت بار تقاضا توسعه یافته و حل می‌شود. در این راستا ماتریس تقاضای مبدأ-مقصد جاده‌ای سال ۱۳۸۵ به شبکه شریانی راه‌های کل کشور تخصیص داده شد و زمان سفر در کمان‌های محدوده مورد مطالعه و راه‌های شریانی استان تهران استخراج و بر اساس آن‌ها کوتاه‌ترین درخت گسترش به دست آمد. برای تحلیل حساسیت مسئله به تقاضا، تغییرات به وجود آمده در نتایج ارزیابی و با هم مقایسه شدند. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات به وجود آمده در درخت گسترش در اثر تغییر در زمان سفر کمان‌ها از حالت آزاد به حالت دارای تحت بار جریان منجر به تغییر کوتاه‌ترین درخت گسترش شد و طول برخی کمان‌ها و هزینه کل تغییر کردند.

شکل ۳ نشان‌دهنده خروجی مسئله با تقاضای سفر یعنی کوتاه‌ترین درخت گسترش راه‌های شریانی استان تهران قبل از بارگذاری شبکه است (هزینه کمان زمان سفر



شکل (۳) کوتاه‌ترین درخت گسترش شبکه شریانی استان تهران قبل از بارگذاری (تقاضای صفر)



شکل (۴) کوتاه‌ترین درخت گسترش شبکه شریانی استان تهران بعد از بارگذاری

صفر، حدود ۴۲۹۵ ثانیه (۱۷ درصد) اختلاف و با مقدار به‌دست آمده (با اعمال مفهوم هزینه جدید که ۲۸۰۸۱ ثانیه محاسبه شد) ۲۱۵۱ ثانیه (۸ درصد) تفاوت دارد که به معنی خطای ۹ درصد است.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

از مسایل مهم جریان در شبکه، برای تحلیل ساختار و عملکرد آن، مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترش است. بررسی پیوستگی شبکه در شرایط مختلف و اولویت‌بندی کمان‌های شبکه از جمله کاربردهای این مسئله است. با در نظر گرفتن اهمیت نقش هزینه و محدود بودن آن به طول کمان در اکثر مطالعات، در این پژوهش مفهوم هزینه به زمان سفر تحت بار تقاضا توسعه یافت و به بررسی حساسیت کوتاه‌ترین درخت گسترش به بارگذاری شبکه پرداخته شد.

در شرایط تقاضای صفر (قبل از بارگذاری) از ۷۵ کمان موجود در شبکه راه‌های شریانی استان تهران ۵۴ کمان در کوتاه‌ترین درخت گسترش قرار گرفتند که زمان سفر آزاد مجموع آن‌ها برابر با ۲۵۹۷۳ ثانیه به‌دست آمد. بعد از بارگذاری و حل مجدد مسئله ۵۱ کمان در کوتاه‌ترین درخت گسترش قرار داشتند، ولی هزینه کل به ۲۸۰۸۱ ثانیه (۸ درصد) افزایش و کمان‌های تشکیل‌دهنده نیز ۳۰ درصد تغییر یافتند. اگر کوتاه‌ترین درخت گسترش اولیه (بدون بار) برای مسئله تحت بار تقاضا در نظر گرفته می‌شد، هزینه تحمیل‌شده به شبکه ۳۰۲۳۲ ثانیه می‌شد که این مطلب به معنای افزایش ۱۷ درصدی هزینه و خطای ۹ درصدی است.

با توجه به حل این مسئله برای راه‌های شریانی استان تهران، یعنی یک شبکه جاده‌ای، پیشنهاد می‌شود که برای شبکه معابر درون‌شهری از مفهوم پیشنهادی استفاده شود. اولویت‌بندی کمان‌های شبکه، با بررسی قرارگیری آن‌ها در

با بررسی مشخصات کمان‌های مشترک در درخت گسترش قبل و بعد از بارگذاری، مشاهده می‌شود که در برخی از کمان‌ها، با توجه به بارگذاری شبکه، زمان سفر تغییر کرده است که نتیجه آن تغییر زمان (هزینه) سفر کل کوتاه‌ترین درخت گسترش خواهد بود. ولی برای برخی از کمان‌ها نیز زمان سفر تغییری نداشته و علت آن کم‌بودن حجم کمان بعد از بارگذاری است که تغییر ناچیزی در زمان سفر کمان به وجود آورده است. جدول ۳ خلاصه‌ای از اطلاعات کوتاه‌ترین درخت گسترش، قبل و بعد از بارگذاری، را نشان می‌دهد.

جدول (۳) اطلاعات کوتاه‌ترین درخت گسترش قبل و بعد از

بارگذاری و مقایسه آن‌ها

ردیف	پارامتر	قبل از بارگذاری	بعد از بارگذاری
۱	طول MST (کیلومتر)	۷۱۸	۷۰۱
۲	تعداد کمان MST	۵۴	۵۱
۳	زمان سفر MST (ثانیه)	۲۵۹۷۳	۲۸۰۸۱

۱. طول کمان‌های مشترک در MST قبل و بعد از بارگذاری = ۶۲۷ کیلومتر
۲. تعداد کمان مشترک در MST قبل و بعد از بارگذاری = ۳۸ کمان
۳. زمان سفر کمان‌های MST اولیه بعد از بارگذاری = ۳۰۲۳۲ ثانیه

نتایج نشان می‌دهند که با توسعه مفهوم هزینه به شرایط تحت بار تقاضا، با وجود کاهش تعداد کمان از ۵۴ کمان به ۵۱ کمان و همچنین کاهش طول کوتاه‌ترین درخت گسترش از ۷۱۸ کیلومتر به ۷۰۱ کیلومتر (که از این میزان ۶۲۷ کیلومتر مشترک هستند)، هزینه کل واقعی به میزان ۲۱۴۴ ثانیه افزایش یافته است. اگر، در تحلیل شبکه، مفهوم هزینه از زمان سفر آزاد استفاده شود، کوتاه‌ترین درخت گسترش به بار تقاضا حساس نخواهد بود و نتیجه آن هزینه ۳۰۲۳۲ ثانیه‌ای برای نمونه موردی می‌شود. بدین معنی که زمان سفر در کوتاه‌ترین درخت گسترش اولیه بعد از بارگذاری مجموعاً ۳۰۲۳۲ ثانیه است. با حالت تقاضای

[۶] پیش‌بینی تقاضای مسافری، مطالعات جامع حمل و نقل کشور، فاز سوم، گزارش جلد ۳، وزارت راه و ترابری، ۱۳۷۳، تهران.

کوتاه‌ترین درخت گسترش با هزینه‌های مختلف، که در مطالعات شبکه برای بحران کاربرد دارد، می‌تواند پیشنهادی دیگر برای کاربرد بیشتر این مفهوم باشد.

۶- منابع

- [7] C Feremans, M Labbe and G Laporte , “The generalized minimum spanning tree problem: polyhedral analysis and branch-and-cut algorithm”, *Networks*, 2004, Vol.43, 71-86.
- [8] J A Fill and J M Steele, “Exact expectations of minimal spanning trees for graphs with random edge weights”, 2004, Acheson University.
- [9] A Kanafani, *Transportation demand analysis*, First Edition, McGraw Hill, New York, 1983.
- [10] J D Ortuzar and L G Willumsen, *Modeling transport*, Third Edition, John Wiley and Sons, 2004.
- [11] M Patrikson, “The traffic assignment problems-models and methods”, Linköping Institute of technology, Linköping, Sweden., 2003.
- [12] Y Sheffi, *Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.
- [1] S Pettie, "On the Shortest Path and Minimum Spanning tree problems", PhD thesis, department of computer science, The University of Texas at Austin, 2003.
- [2] S Chung and A Condon, “Parallel implementation of Boruvka’s minimum spanning tree algorithm”, Computer sciences department, University of Wisconsin, *IEEE Journal*, 2003, Vol. 7, No 1.
- [3] T M Murali, “Applications of minimum spanning trees”, Science press, 2009, *In Proc, 39th Annual IEEE Symposia*.
- [4] S P Bradley, A C Hax and T L Magnanti, *Applied mathematical programming*, Addison Wesley, 1977.
- [5] D Eppstein, “Dynamic euclidean minimum spanning trees and extreme of binary functions”, Department of information and computer science, University of California, Irvine, 2009, Tech. Rep. 92-88, ICS, UCI.

Minimum Spanning Tree Concept Development and its Application in Transportation Network Analysis

A.R. Mamdoohi^{1*}, A.R. Mahpour², M. Yousefikia³

1- Assis. Professor, Faculty of Civil & Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- M.Sc. Graduated, Faculty of Civil & Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

3- M.Sc. Graduated, Faculty of Civil & Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

armamdoohi@modares.ac.ir

Abstract:

Minimum Spanning Tree (MST) is a well-known problem for analyzing the structure and performance of transportation networks. In this problem, cost is usually considered just as a function of supply (transportation network) properties, like Free Flow Travel Time (FFTT) which is independent of traffic volume. This is a simple and ideal presumption that neglects the effect of traffic volume on links travel time. Although network performance is a result of demand and supply interaction in reality, this assumption which simplifies the solution neglects the sensitivity of this problem to demand. Therefore MST estimation would be more accurate and realistic by using real travel time instead of Free Flow Travel Time (FFTT).

In this paper, MST problem is solved by substituting FFTT with the cost related to the effect of congestion on link travel time. This modified cost is achieved through assigning origin-destination demand matrix to the network, based on Deterministic User Equilibrium (DUE) assignment procedure by means of VISUM software package®. Then, this new cost is utilized to formulate and solve MST problem using WinQSB software package®. The solution of DUE problem is based on the behavioral assumption that each motorist travels on the path that minimizes the travel time from origin to destination. This choice rule implies that at equilibrium, the link-flow pattern is such that the travel times on all used paths connecting any given O-D pair, will be equal. The effect of travel behavior of choosing the shortest path is reflected in equal travel times between each O-D. Thus in this study the effect of the aggregate travel demand on the individual behavior is considered in the loaded version of MST problem. In this way the dependence of each individual decision when entering the network (marginally) on the decision of all the previous travelers who have entered the network is taken into account.

The proposed concept is applied to the case of Tehran province network, consisting of 56 nodes and 75 links. For this purpose Iran country intercity origin-destination demand matrix of the year 2007 is assigned to the arterial roads of entire country network consisting of 854 nodes, 1147 links and 56 traffic analysis zones for 4 different travel modes (1- passenger, 2- air, 3- train, 4- bus and freight) and travel time on Tehran province network is derived to calculate the MST. Results show that by developing cost concept to the loaded condition, despite decreasing MST link numbers from 54 to 51 and also decreasing its length from 718 km to 701 km (with 627 km common to both) total cost has 2144 seconds increased from

unloaded MST (25973 seconds) to loaded one (28081 seconds). Moreover, if travel time derived from loaded MST and links from unloaded one form a new Tree, the total cost of this tree will be about 17% more than unloaded MST and about 8% more than loaded one, which means 17% increase in total cost with 9% error.

Keywords: network analysis, minimum spanning tree, cost, travel time, Tehran province arterial roads.